

ملخص الرياضيات البحتة

للصف الحادي عشر

الوحدة الرابعة

المتتاليات والمتسلسلات

٣-٤ المتتالية الهندسية

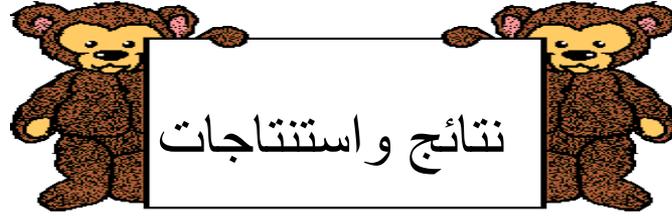
(حدود المتتالية الهندسية)

مثال (١):

أوجد أساس المتتالية : (١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، $\frac{1}{3}$)

الحل:

$$\frac{1}{3} = \text{الأساس}$$



تعريف :

المتتالية (ح ن) تسمى متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان :

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{حيث لكل } n \text{ تنتمي للأعداد الصحيحة الموجبة ، و } (r)$$

عدد حقيقي ثابت ، $a_n \neq 0$

تسمى (r) أساس المتتالية الهندسية.



تمرين :

أي مما يلي يمثل متتالية هندسية :

١) $ح_n = ١ - ن$ ٢) $ح_n = ٣^n$ ؟؟؟؟؟

الحل:

١) $ح_n$ ليست هندسيه

٢) $ح_n = ٣^n$ هندسيه

* الحد العام

مثال (١):

يمارس مروان رياضة المشي على الأقدام فإذا قطع في اليوم الأول مسافة ٣٠٠ متر وكان يقطع في كل يوم تال ضعف المسافة التي قطعها في اليوم السابق له مباشرة . أكتب متتالية المسافة التي يقطعها مروان في كل يوم ولمدة ٥ أيام ؟؟؟؟

الحل :

المسافة المقطوعة في اليوم الأول ٣٠٠ متر : (أ = ٣٠٠)

بما أن المسافة المقطوعة في كل يوم = ضعف المسافة في اليوم السابق
(ر = ٢)

إذن المتتالية هي :

٣٠٠ ، ٦٠٠ ، ١٢٠٠ ، ٢٤٠٠ ، ٤٨٠٠

مثال (٢) :

أكتب المتتالية الهندسية التي حدها الأول = ٩ وحدها السادس = ٢٨٨ ؟؟؟

الحل:

$$ح = أ ر^٠$$

$$\frac{٢٨٨}{٩} = ر^٥ \leftarrow \quad ر^٠ ٩ = ٢٨٨$$

$$٢ = ر \leftarrow \quad ر^٠ ٩ = ٢٨٨$$

المتتالية هي : (٩ ، ١٨ ، ٣٦ ، ٧٢ ، ١٤٤ ،)

مثال (٣) :

ثلاث أعداد تكون متتالية هندسية فإذا كان مقلوب الحد الأول يزيد عن مقلوب الحد الثاني بمقدار ٢ وكان الحد الثالث يزيد عن الحد الثاني بمقدار ١٨ فما هذه الأعداد؟؟؟

حل مثال (٣):

نفرض أن الأعداد هي أ ، أر ، أر^٢

$$(١) \quad \leftarrow \quad ٢ = \frac{١-ر}{أر} \quad \leftarrow \quad ٢ = \frac{١}{أر} - \frac{١}{أ} \quad \leftarrow \quad ٢ أر = ١ - ر$$

$$(٢) \quad \leftarrow \quad ١٨ = أر^٢ \quad \leftarrow \quad ١٨ = (١-ر) أر$$

بقسمة (١) على (٢):

$$\frac{٣٦ = ٢(١-ر)}{١٨} = \frac{٢ أر}{أر(١-ر)}$$

$$٢ = ١ - ر \quad \leftarrow \quad ٧ = ر \quad \text{أو} \quad ٥ = -ر$$

الأعداد هي : $\frac{٣}{٧}$ ، ٣ ، ٢١

$$\frac{٣}{٧} = أ$$

←

إذا كانت ر = ٧ فإن ١٤ = ٦

الأعداد هي : $\frac{٣}{٥}$ ، -٣ ، ١٥

$$\frac{٣}{٥} = أ$$

←

وإذا كانت ر = -٥ فإن -١٠ = ٦

يزداد عدد الطلبة المتحقين بالصف الأول بمعدل ٤ % كل سنة في إحدى مناطق السلطنة . فإذا كان عددهم حاليا ٢٠٠٠٠ طالب فكم سيكون عدد الطلبة بعد ٦ سنوات ???

الحل :

عدد الطلبة حاليا = ٢٠٠٠٠

$$\begin{aligned} \text{عدد الطلبة في السنة الثانية} &= ٢٠٠٠٠ + ٢٠٠٠٠ \times ٤ \% \\ &= (١,٠٤ + ٠) ٢٠٠٠٠ \\ &= (١,٠٤) ٢٠٠٠٠ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{عدد الطلبة في السنة الثالثة} &= (١,٠٤) ٢٠٠٠٠ + (١,٠٤) ٢٠٠٠٠ \times ٤ \% \\ &= (١,٠٤)^2 ٢٠٠٠٠ \end{aligned}$$

وهكذا عدد الطلبة بعد ٦ سنوات $\overset{\gamma}{\text{ح}} = \overset{\gamma}{\text{أ}}$

$$= (١,٠٤)^6 ٢٠٠٠٠ = ٢٥٣٠٦,٤ \text{ طالبا.}$$



نتيجة:

إذا كانت (ح) متتالية هندسية أساسها r فإن :

$$C_n = C_1 r^{n-1}$$

وإذا رمزنا للحد الأول لمتتالية هندسية بالرمز A فإن الصورة العامة هي:

$$A, Ar, Ar^2, \dots, Ar^{n-1}$$



تمرين :

سيارة قيمتها ٧٠٠٠ ريال عماني إذا علمت أن قيمة السيارة في نهاية كل سنة تكون بنسبة ٨٠% من سعرها . أوجد سعر السيارة بعد ٨ سنوات ???

الحل:

سعر السيارة في نهاية السنة الأولى = $٧٠٠٠ \times ٠,٨ = ٥٦٠٠$ ريالاً

سعر السيارة في نهاية السنة الثانية = $(٠,٨)^٢ \times ٧٠٠٠$

سعر السيارة في نهاية السنة الثالثة = $(٠,٨)^٣ \times ٧٠٠٠$ وهكذا

*الأوساط الهندسية

مثال (١):

أدخل ٣ أوساط هندسية بين العددين ٤ ، ٦٤ ؟؟؟

الحل:

بإدخال ٣ أوساط تكون متتالية بالصورة : ٤ ، ؟ ، ؟ ، ؟ ، ٦٤

أي أن عدد حدود المتتالية = ٥ وحدها الأول = ٤ ، وحدها الخامس = ٦٤

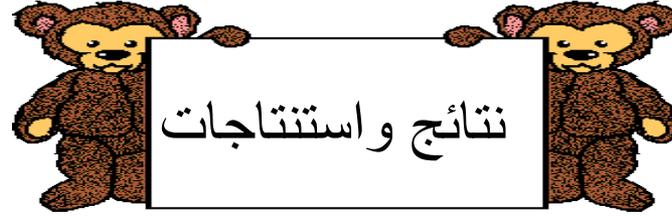
$$ح = أ ر^٤$$

$$٦٤ = ٤ \times ر^٤$$

$$١٦ = ر^٤ \leftarrow ر = ٢ \pm$$

تنتج متتاليتين هندسيتين الأولى أساسها ٢ والأوساط الهندسية هي: ٨ ، ١٦ ، ٣٢

والثانية أساسها - ٢ والأوساط الهندسية: - ٨ ، - ١٦ ، - ٣٢



تعريف:

تسمى الأعداد ج ، د ، ... ، ل أوساطا هندسية للعددين الحقيقيين الموجبين أ ، ب

إذا كانت أ ، ج ، د ، ... ، ل ، ب متتالية هندسية



تمرين :

أوجد قيمة s بحيث تكون ٥ ، s ، ١٨ متتالية هندسية ???

الحل:

$$s = ٩,٤$$

ملخص الرياضيات البحتة

للصف الحادي عشر

الوحدة الرابعة

المتتاليات والمتسلسلات

٤ - ١ الممتنات



مثال (١):

أكمل الأماكن الفارغة بالجدول التالي ثم أجب عما يلي:

ن		٤	٣	٢	١	طول ضلع المربع
	٢٥			٤	١	المساحة

أكتب المتتالية التي تمثل مساحة المربع؟؟

الحل:

ن	٥	٤	٣	٢	١	طول ضلع المربع
٢	٢٥	١٦	٩	٤	١	المساحة

المتتالية التي تمثل مساحة المربعات هي:

١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ،، ٢٥

تابع مثال (١):

نسمي قيم المتتالية حدود المتتالية حيث :
١ الحد الأول يرمز له بالرمز ح_١ وهكذا.....

مثال (٢):

حدد أي مما يلي يمثل متتالية وبين اذا كانت متتالية منتهية أم غير منتهية :

(١) د(ن) = $1 + \frac{3}{n}$ ، ن تنتمي الى (١،٢،٣،٤،٥)

(٢) د(ن) = $\frac{2}{n}$ ، ن تنتمي للأعداد النسبية

(٣) د(ن) = ٢ ، ن تنتمي للأعداد الصحيحة الموجبة

الحل:

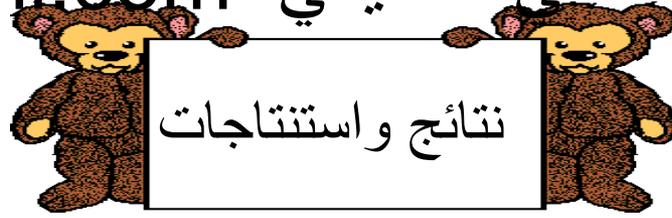
(١) د(ن) دالة حقيقية مجالها (١،٢،٣،٤،٥) وهي مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحة الموجبة
إذن فهي دالة متتالية منتهية

(٢) ليست متتالية

(٣) د(ن) = ٢ دالة حقيقية مجالها الأعداد الصحيحة الموجبة

فهي متتالية غير منتهية

(كل متتالية على صورة د(ن) = أ ، حيث أ تنتمي للأعداد الصحيحة تسمى متتالية ثابتة)



تعريف:

#المتتالية هي دالة حقيقية مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية منها على الصورة
(١، ٢، ٣،، م) ومداها مجموعة جزئية
من ح (الأعداد الحقيقية)

إذا كانت (د) متتالية ، فإن حدها العام او حدها النوني يرمز له بالرمز ح_ن
أي أن د(ن) = ح_ن و قد تكتب المتتالية على الصورة ح_١ ، ح_٢ ، ، ح_{ن-١} ، ح_ن

أو على الصورة (ح_ن)

إذا لم يذكر مجال المتتالية فإن مجالها يعتبر الاعداد الصحيحة الموجبة

تعريف :

يقال للمتتالية ح_n أنها :

(١) متزايدة إذا فقط إذا كان:

لكل ن تنتمي لمجال المتتالية
$$ح_{n+1} < ح_n$$

(٢) متناقصة إذا فقط إذا كان :

لكل ن تنتمي لمجال المتتالية
$$ح_{n+1} > ح_n$$



تمرين :

من المثال رقم (١) أوجد متتالية محيط المربعات ???

الحل:

متتالية محيط المربعات : ٤ , ٨ , ١٢ , ١٦ ,

ملخص الرياضيات البحتة

للصف الحادي عشر

الوحدة الرابعة

المتتاليات والمتسلسلات

٢-٤ المتتالية الحسابية

(العلاقة بين الدالة
الخطية ومعامل ن)

مثال (١):

ما العلاقة بين المتتاليتين التاليتين:

$$(١) (٤، ٨، ١٢، ١٦، ٢٠،)$$

$$(٢) (٥، ٣، ٢، ٠، -١،)$$

لاحظ بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة في كل منهما؟؟؟

الحل :

- (١) كل حد يزيد عن الحد الذي يسبقه مباشرة بمقدار ثابت هو ٤
(٢) الفرق بين كل حد وما يسبقه مباشرة لا يساوي مقدار ثابت

مثال (٢):

أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتتاليات الحسابية التالية :

$$ح_٥ = ١٧ ، ح_١ = ٣٢$$

حل مثال (٢):

(١)

$$د٤ + أ = ١٧$$

(٢)

$$د٩ + أ = ٣٢$$

ب طرح (١) من (٢) ينتج $د = ٣$ و بالتعويض عن د في (١)

$$٣ \times ٤ + أ = ١٧$$

$$٥ = أ$$

الحدود الخمسة الأولى : ٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧

مثال (٣):

إذا كان مجموع الحدود الثلاثة الأولى من متتالية حسابية هو ١٥ ومجموع مربعاتها ٩٣ فما هذه المتتالية؟؟؟

الحل:

بفرض الثلاثة الحدود الأولى هي $أ - د ، أ ، أ + د$

تابع / حل المثال (٣):

$$\begin{aligned} 15 &= (a+d) + a + (d-a) \quad \text{إذن} \\ 5 &= a \end{aligned}$$

$$93 = (a+d)^2 + a^2 + (d-a)^2 \quad \text{و}$$

$$9 = d^2$$

$$d = \pm 3$$

- إذا كانت $d = 3$ فإن المتتالية : (٢ ، ٥ ، ٨ ،)
- إذا كانت $d = -3$ فإن المتتالية : (٨ ، ٥ ، ٢ ،)



تعريف :

المتتالية التي يكون فيه الفرق بين كل حد و الذي يسبقه مباشرة مقدارا ثابتا تسمى متتالية حسابية ويسمى المقدار الثابت أساس المتتالية و يرمز له بالرمز (د)

$$\text{أي أن } \begin{cases} \text{ح}_1 = \text{ح}_2 + \text{د} \\ \text{ح}_2 = \text{ح}_3 + \text{د} \\ \text{ح}_3 = \text{ح}_4 + \text{د} \\ \text{ح}_n = \text{ح}_{n-1} + \text{د} \end{cases}$$

تعريف:

المتتالية د(ن) متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان د(ن) مقدارا من الدرجة الأولى في ن ويكون معامل ن هو أساس المتتالية .



تمرين :

أوجد أساس المتتالية الحسابية ح $= 3 - \frac{2}{5} ن$ ؟؟؟

الحل:

$$\frac{2 -}{5} = د$$

المنتتالية الحساوية :

* الأوساط الحساوية

مثال (١) :

أوجد أربعة أوساط حسابية بين العددين : ١٠ ، ٣٠-

الحل:

إذا أدخلت ٤ أوساط بين المتتاليتين فإن المتتالية المتكونة :

٣٠- ، ؟ ، ؟ ، ؟ ، ؟ ، ١٠

$$ح = أ + (١-٦) د$$

$$٣٠- = ١٠ + ٥ د$$

$$٨- = د$$

الأوساط هي :

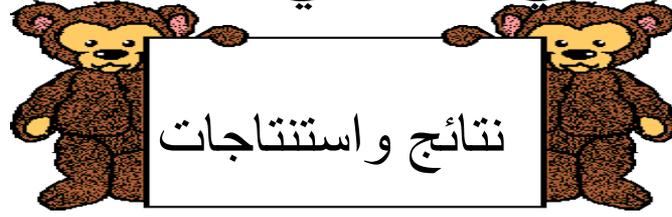
$$٢ = ٨ - ١٠$$

$$٦ - = ٨ - ٢$$

$$١٤ - = ٨ - ٦-$$

$$٢٢- = ٨ - ١٤-$$

الأوساط هي: ٢ ، ٦- ، ١٤- ، ٢٢-



نتيجة :

إذا شكلت ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ، ح_ن متتالية حسابية

فإن ح_٢ ، ح_٣ ، ح_{ن-١} ، تسمى أوساطا حسابية.



تمرين :

أدخل ستة أوساط حسابية بين العددين : ٢ ، ٥,٥ ؟؟؟

الحل :

$$أ = ٢ ، ح = ٥,٥ ، ن = ٦ + ٢ = ٨$$

$$إذن ح = ٢ + ٧ = ٥,٥ ، إذن د = ٥,٥$$

إذن الأوساط هي : ٥,٢ ، ٥,٣ ، ٥,٤ ، ٥,٤ ، ٥,٥ .