$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٦(-٢)^{٢} - ٦(-٢) - ١٢ = ٢٤$ وهي قيمة موجبة.

عوّض بدل س = ٠ في $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٦\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ١٢$ لتحصل على:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٦(٠)^{٢} - ٦(٠) - ١٢ = -١٢$ وهي قيمة سالبة.

وحيث إن إشارة ميل المنحنى تتغير من موجبة إلى سالبة عندما تتحرك قيم س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة، فإن (−١، ١٤) هي نقطة عظمى.

د تحتاج أن تجد أين تكون $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٦\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ١٢$ نقطة صغرى.

أكمل المربع لتحصل على:

$= ٦\left(\text{س}^{٢} - \text{س}\right) - ١٢$

$= ٦\left(\left(\text{س} - \frac{١}{٢}\right)^{٢} - \frac{١}{٤}\right) - ١٢$

$= ٦\left(\text{س} - \frac{١}{٢}\right)^{٢} - ١٣{,}٥$

أقل قيمة للعبارة $٦\left(\text{س} - \frac{١}{٢}\right)^{٢} - ١٣{,}٥$ هي $-١٣{,}٥$

ويكون ذلك عندما س = $\frac{١}{٢}$ لأن $٦\left(\text{س} - \frac{١}{٢}\right)^{٢} \geqslant ٠$

عوّض بدل س = $\frac{١}{٢}$ في معادلة المنحنى لتحصل على الإحداثي الصادي

$\text{ص} = ٢\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٧$

$\text{ص} = ٢\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} - ٣\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} - ١٢\left(\frac{١}{٢}\right) + ٧$

$\text{ص} = \frac{١}{٢}$

النقطة على المنحنى التي يكون عندها أصغر قيمة للميل هي $\left(\frac{١}{٢}، \frac{١}{٢}\right)$ ومقدارها $-١٣{,}٥$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الرابعة

١) لتكن $\text{ص} = \frac{٣\text{س}^{٥} - ٧}{٤\text{س}}$

أعد كتابة الدالة في صورة $\text{ص} = \frac{٣}{٤}\text{س}^{٤} - \frac{٧}{٤}\text{س}^{-١}$

أوجد مشتقة الدالة لتحصل على:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٣} + \frac{٧}{٤}\text{س}^{-٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٣} + \frac{٧}{٤\text{س}^{٢}}$

٢) $\text{ص} = \frac{٨}{٤\text{س} - ٥}$

أعد كتابة الدالة في صورة $\text{ص} = ٨(٤\text{س} - ٥)^{-١}$

استخدم قاعدة السلسلة:

افترض أن ع = ٤س − ٥ فيكون $\text{ص} = ٨\text{ع}^{-١}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٤$، $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = -٨\text{ع}^{-٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

$= -٨\text{ع}^{-٢} \times ٤$

$= -٣٢\text{ع}^{-٢}$

$= -\frac{٣٢}{(٤\text{س} - ٥)^{٢}}$ يمكن حلّها ذهنيًا

ميل المماس عند س = ٢ هو:

$-\frac{٣٢}{(٨ - ٥)^{٢}} = -٣\frac{٥}{٩}$

٣) $\text{ص} = ٣\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + \text{س} - ٧$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٩\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ١$

$= (٣\text{س} - ١)^{٢}$

وهذه القيمة دائمًا موجبة.

٤) $\text{ص} = (٣ - ٥\text{س})^{٣} - ٢\text{س}$

يمكن إيجاد مشتقة دالة مثل $\text{ص} = (٣ - ٥\text{س})^{٣} - ٢\text{س}$ بدون استخدام قاعدة السلسلة، كالآتي:

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(٣ - ٥\text{س})^{٣} = ٣(٣ - ٥\text{س})^{٢} \times (-٥)$$

$$= -١٥(٣ - ٥\text{س})^{٢}،\quad \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(٢\text{س}) = ٢$$

$$\therefore \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left((٣ - ٥\text{س})^{٣} - ٢\text{س}\right)$$

$$= -١٥(٣ - ٥\text{س})^{٢} - ٢$$

كما يمكن استخدام قاعدة السلسلة لتجد مشتقة الحدّ الأول:

افترض أن $\text{ع} = ٣ - ٥\text{س}$ فتكون $\text{ص} = \text{ع}^{٣}$

$$\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = -٥،\quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = ٣\text{ع}^{٢}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$

$$= ٣\text{ع}^{٢} \times -٥$$

$$= ٣(٣ - ٥\text{س})^{٢} \times -٥$$

$$= -١٥(٣ - ٥\text{س})^{٢}$$

الآن أوجِد مشتقة الدالة كاملة:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -١٥(٣ - ٥\text{س})^{٢} - ٢$$

أوجِد مشتقة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (استخدم قاعدة السلسلة في الحدّ الأوّل)

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = -٣٠(٣ - ٥\text{س}) \times -٥$$

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ١٥٠(٣ - ٥\text{س})$$

٥) لتكن الدالة $\text{ص} = \frac{١٥}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}$

أعد كتابة الدالة في صورة $\text{ص} = ١٥(\text{س}^{٢} - ٢\text{س})^{-١}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن $\text{ع} = \text{س}^{٢} - ٢\text{س}$ فيكون $\text{ص} = ١٥\text{ع}^{-١}$

$$\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} - ٢،\quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = -١٥\text{ع}^{-٢}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$

$$= -١٥\text{ع}^{-٢} \times (٢\text{س} - ٢)$$

$$= -١٥(\text{س}^{٢} - ٢\text{س})^{-٢} \times (٢\text{س} - ٢)$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-١٥(٢\text{س} - ٢)}{(\text{س}^{٢} - ٢\text{س})^{٢}}$$

عندما $\text{س} = ٥$ فإن:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{١٥(٢ \times ٥ - ٢)}{(٥^{٢} - ٢ \times ٥)^{٢}}$$

$$= -\frac{١٢٠}{٢٢٥}$$

$$= -\frac{٨}{١٥}$$

٦) أ الدالة $\text{ص} = ٥\sqrt{\text{س}}$

أعد كتابة الدالة في صورة $\text{ص} = ٥\text{س}^{\frac{١}{٢}}$

أوجِد مشتقة الدالة:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٥}{٢\text{س}^{\frac{١}{٢}}}$$

عندما $\text{س} = ٤$ يكون ميل المماس للمنحنى

$$= \frac{٥}{٢(٤)^{\frac{١}{٢}}}$$

$$\text{م} = \frac{٥}{٤}$$

يمر العمودي بالنقطة (٤، ١٠) وميله:

$$-\frac{١}{\text{م}} = -\frac{١}{\frac{٥}{٤}} = = -\frac{٤}{٥}$$

لتجد معادلة العمودي استخدم الصيغة:

$$\text{ص} - \text{ص}_{١} = -\frac{١}{\text{م}}(\text{س} - \text{س}_{١})$$

$$\text{ص} - ١٠ = -\frac{٤}{٥}(\text{س} - ٤)$$

$$\text{ص} - ١٠ = -\frac{٤}{٥}\text{س} + \frac{١٦}{٥}$$

$\text{ص} = -\frac{٤}{٥}\text{س} + \frac{٦٦}{٥}$

$٤\text{س} + ٥\text{ص} = ٦٦$

ب يتقاطع العمودي الذي معادلته $٤\text{س} + ٥\text{ص} = ٦٦$

مع محور السينات حيث $\text{ص} = ٠$

فيكون $٤\text{س} + ٥(٠) = ٦٦$

$٤\text{س} = ٦٦$

$\text{س} = ١٦{,}٥$

إحداثيات **و** $(١٦{,}٥ ، ٠)$

٧) **أ** الدالة $\text{ص} = ٥\text{س} + \frac{١٢}{\text{س}^{٢}}$

أعد كتابة الدالة في صورة $\text{ص} = ٥\text{س} + ١٢\text{س}^{-٢}$

أوجِد المشتقة:

$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = ٥ - ٢٤\text{س}^{-٣}$

$= ٥ - \frac{٢٤}{\text{س}^{٣}}$

ب عند $\text{س} = ٢$ يكون ميل المنحنى:

$\text{م} = ٥ - \frac{٢٤}{٢^{٣}}$

$\text{م} = ٢$

يمر العمودي بالنقطة $(٢ ، ١٣)$ وميله $= -\frac{١}{\text{م}} = -\frac{١}{٢}$

أوجِد معادلة العمودي الذي يمر في $(٢ ، ١٣)$

باستخدام الصيغة:

$\text{ص} - \text{ص}_{١} = -\frac{١}{\text{م}}(\text{س} - \text{س}_{١})$

$\text{ص} - ١٣ = -\frac{١}{٢}(\text{س} - ٢)$

$\text{ص} - ١٣ = -\frac{١}{٢}\text{س} + ١$

$\text{ص} = -\frac{١}{٢}\text{س} + ١٤$

$٢\text{ص} + \text{س} = ٢٨$

يتقاطع العمودي مع محور السينات حيث $\text{ص} = ٠$

فيكون

$٢(٠) + \text{س} = ٢٨$

$\text{س} = ٢٨$

$\therefore$ يتقاطع العمودي مع محور السينات في $(٢٨ ، ٠)$

٨) لتكن $\text{ص} = \frac{١٢}{\sqrt{\text{س}}}$

أعد كتابة الدالة في صورة

$\text{ص} = ١٢\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$

أوجِد المشتقة لتحصل على:

$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = -٦\text{س}^{-\frac{٣}{٢}}$

$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = -\frac{٦}{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}$

عندما $\text{س} = ٩$ فإن ميل المنحنى $= -\frac{٦}{٩^{\frac{٣}{٢}}}$

$\text{م} = -\frac{٢}{٩}$

يمر العمودي بالنقطة $(٩ ، ٤)$ وميله

$= -\frac{١}{\text{م}} = -\frac{١}{-\frac{٢}{٩}} = \frac{٩}{٢}$

أوجِد معادلة العمودي الذي يمر بالنقطة $(٩ ، ٤)$

باستخدام الصيغة:

$\text{ص} - \text{ص}_{١} = -\frac{١}{\text{م}}(\text{س} - \text{س}_{١})$

$\text{ص} - ٤ = \frac{٩}{٢}(\text{س} - ٩)$

$\text{ص} - ٤ = \frac{٩}{٢}\text{س} - \frac{٨١}{٢}$

$\text{ص} = \frac{٩}{٢}\text{س} - \frac{٧٣}{٢}$

$٢\text{ص} = ٩\text{س} - ٧٣$

يتقاطع العمودي مع محور السينات حيث $\text{ص} = ٠$

فيكون:

$٢(٠) = ٩\text{س} - ٧٣$

$\text{س} = \frac{٧٣}{٩}$

وإحداثيات **ل** $(\frac{٧٣}{٩} ، ٠)$

يتقاطع العمودي مع محور الصادات حيث $\text{س} = ٠$

فيكون:

٢ص = ٩(٠) − ٧٣

ص = −٣٦٫٥

وإحداثيات **ب** (٠، −٣٦٫٥)

٩) الدالة ص = س(س − ٣)(س − ٥)

فكّ الأقواس:

ص = (س^{٢} − ٣س)(س − ٥)

ص = س^{٣} − ٥س^{٢} − ٣س^{٢} + ١٥س

ص = س^{٣} − ٨س^{٢} + ١٥س

أوجد مشتقة الدالة لتحصل على:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س^{٢} − ١٦س + ١٥

عند س = ٣ يكون ميل المماس:

= ٣ × ٣^{٢} − ١٦ × ٣ + ١٥

= −٦

استخدم الصيغة ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)، م = −٦،

أ(٣، ٠) معادلة المماس:

ص − ٠ = −٦(س − ٣)

ص = − ٦ س + ١٨ .... [١]

عند س = ٥ يكون ميل المماس:

= ٣ × ٥^{٢} − ١٦ × ٥ + ١٥

= ١٠

استخدم الصيغة ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)، م = ١٠،

ب(٥، ٠) معادلة المماس:

ص − ٠ = ١٠(س − ٥)

ص = ١٠س − ٥٠ .... [٢]

حل المعادلتَين [١]، [٢] لتحصل على:

−٦س + ١٨ = ١٠س − ٥٠

١٦س = ٦٨

س = ٤٫٢٥

عوّض بدل س = ٤٫٢٥ في المعادلة [١] لتحصل على:

ص = −٦(٤٫٢٥) + ١٨

ص = −٧٫٥

فتكون **ج**(٤٫٢٥، −٧٫٥)

١٠) **أ** لتكن الدالة ص = $\frac{٢}{(\text{س} - ٣)^{٢}}$

أعد كتابة الدالة في صورة ص = ٢(س − ٣)$^{-٢}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن ع = س − ٣ فيكون ص = ٢ع$^{-٢}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = ١، $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ = −٤ع$^{-٣}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ × $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

= −٤ع$^{-٣}$ × ١

= −٤ع$^{-٣}$

= − $\frac{٤}{(\text{س} - ٣)^{٣}}$

عندما س = ٤، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = − $\frac{٤}{(٤ - ٣)^{٣}}$ = −٤

يمر المماس بالنقطة (٤، ٢) وميله = −٤

استخدم الصيغة ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

ص − ٢ = −٤(س − ٤)

ص − ٢ = −٤س + ١٦

ص = −٤س + ١٨

ب يمر العمودي بالنقطة (٤، ٢)

وميله = −$\frac{١}{\text{م}}$ = −$\frac{١}{-٤}$ = $\frac{١}{٤}$

استخدم الصيغة ص − ص$_{١}$ = −$\frac{١}{\text{م}}$ (س − س$_{١}$)

ص − ٢ = $\frac{١}{٤}$ (س − ٤)

ص − ٢ = $\frac{١}{٤}$ س − ١

ص = $\frac{١}{٤}$ س + ١

١١) أ لتكن الدالة ص = ٣ − $\frac{١٠}{س}$

أعد كتابة الدالة في صورة ص = ٣ − ١٠س$^{-١}$

اشتق الدالة لتحصل على:

$\frac{دص}{دس}$ = ١٠س$^{-٢}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١٠}{س^{٢}}$

عند النقطة حيث س = ٥ يكون ميل المماس = $\frac{١٠}{٥^{٢}}$

م = $\frac{٢}{٥}$

يمر العمودي بالنقطة (٥، ١) وميله

= −$\frac{١}{م}$ = −$\frac{١}{\frac{٢}{٥}}$ = −$\frac{٥}{٢}$

استخدم الصيغة ص − ص$_{١}$ = −$\frac{١}{م}$(س − س$_{١}$)، ل(٥، ١).

معادلة العمودي على المنحنى هي:

ص − ١ = −$\frac{٥}{٢}$ (س − ٥)

٢ص − ٢ = −٥س + ٢٥

٥س + ٢ص = ٢٧

ب أوجِد إحداثيات ن عند حل المعادلتَين:

٥س + ٢ص = ٢٧ .... [١]

ص = ٣ − $\frac{١٠}{س}$ .... [٢]

استخدم المعادلة [٢] وعوّض بدل ص في المعادلة [١]:

٥س + ٢ (٣ − $\frac{١٠}{س}$) = ٢٧

٥س + ٦ − $\frac{٢٠}{س}$ = ٢٧

٥س^{٢} + ٦س − ٢٠ = ٢٧س

٥س^{٢} − ٢١س − ٢٠ = ٠

(٥س + ٤) (س − ٥) = ٠

إما س − ٥ = ٠، س = ٥ (النقطة ل)

أو ٥س + ٤ = ٠، س = −٠,٨

عوّض بدل س = −٠,٨ في المعادلة [٢] لتحصل على:

ص = ٣ − $\frac{١٠}{−٠,٨}$

ص = ١٥,٥

فتكون ن (−٠,٨، ١٥,٥)

١٢) أ (١، −١)، ب (٤، ١١).

ميل أب = $\frac{ص_{٢} − ص_{١}}{س_{٢} − س_{١}}$

= $\frac{١١ − (−١)}{٤ − ١}$

= ٤

الدالة ص = ٣س − $\frac{٤}{س}$

أعد كتابة الدالة في صورة ص = ٣س − ٤س$^{-١}$

أوجد مشتقة الدالة لتحصل على:

$\frac{دص}{دس}$ = ٣ + ٤س$^{-٢}$

= ٣ + $\frac{٤}{س^{٢}}$

ميل المماس عند ج، د يساوي ٤ فيكون:

= ٣ + $\frac{٤}{س^{٢}}$ = ٤

٣س^{٢} + ٤ = ٤س^{٢}

س^{٢} = ٤

س = ±٢

عوّض بدل س = ٢ في ص = ٣س − $\frac{٤}{س}$ لتحصل على:

ص = ٣(٢) − $\frac{٤}{٢}$

ص = ٤

عوّض بدل س = − ٢ في ٣س − $\frac{٤}{س}$ لتحصل على:

$ص = ٣(-٢) - \frac{٤}{-٢}$

$ص = -٤$

إحداثيات النقطتَين **ج**، ء هي (٢، ٤)، (-٢، -٤).

أوجِد نقطة منتصف $\overline{\text{ج ء}}$ باستخدام الصيغة:

$$\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{٢ + (-٢)}{٢} ، \frac{٤ + (-٤)}{٢}\right)$$

نقطة المنتصف (٠، ٠).

$$\text{ميل ج ء} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{-٤ - ٤}{-٢ - ٢} = ٢$$

ميل أي مستقيم عمودي على **ج** ء يساوي $-\frac{١}{٢}$

∴ ميل العمود المنصف هو $-\frac{١}{٢}$ ويمر في (٠، ٠)

أوجِد معادلة العمود المنصف باستخدام:

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$ص - ٠ = -\frac{١}{٢} (س - ٠)$

$ص = -\frac{١}{٢}س$

١٣) لتكن الدالة $ص = ٢ - \frac{١٨}{٢س + ٣}$

يمر المنحنى بالنقطة أ على محور السينات حيث

$ص = ٠$

أي أن $٢ - \frac{١٨}{٢س + ٣} = ٠$

$\frac{١٨}{٢س + ٣} = ٢$

$٤س + ٦ = ١٨$

$س = ٣$

فتكون النقطة أ(٣، ٠)

يمر المنحنى بالنقطة ب على محور الصادات حيث

$س = ٠$

أي أن $ص = ٢ - \frac{١٨}{٢(٠) + ٣}$

$ص = ٢ - \frac{١٨}{٣}$

$ص = -٤$

فيكون ب (٠، -٤)

أعد كتابة الدالة $ص = ٢ - \frac{١٨}{٢س + ٣}$ في صورة:

$ص = ٢ - ١٨(٢س + ٣)^{-١}$

أوجد مشتقة الدالة لتحصل على:

$$\frac{ءص}{ءس} = ١٨ (٢س + ٣)^{-٢} \times ٢$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣٦}{(٢س + ٣)^٢}$$

ميل المماس عند النقطة، س = ٣ هو:

$$\frac{٣٦}{(٢ \times ٣ + ٣)^٢}$$

$$م = \frac{٣٦}{٨١} = \frac{٤}{٩}$$

يمر العمودي بالنقطة (٣،٠)

وميله $= -\frac{١}{م} = -\frac{١}{\frac{٤}{٩}} = -\frac{٩}{٤}$

استخدم الصيغة $ص - ص_١ = -\frac{١}{م} (س - س_١)$،

$-\frac{١}{م} = -\frac{٩}{٤}$

أ(٣، ٠)

لتجد معادلة العمودي على المنحنى:

$ص - ٠ = -\frac{٩}{٤} (س - ٣)$

$٤ص = -٩س + ٢٧$

$٤ص + ٩س = ٢٧$

١٤) أ لتكن الدالة ص = ٣ + ٤س − س^{٢}

أوجد مشتقة الدالة لتحصل على:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٤ − ٢س

عند س = ٣ يكون ميل المماس:

= ٤ − ٢ × ٣

م = −٢

يمر العمودي بالنقطة (٣، ٦) وميله

$-\frac{١}{\text{م}} = -\frac{١}{-٢} = \frac{١}{٢}$

استخدم الصيغة ص − ص$_{١}$ = $-\frac{١}{\text{م}}$ (س − س$_{١}$)،

$-\frac{١}{\text{م}} = \frac{١}{٢}$، ل (٣، ٦) لتجد معادلة العمودي على المنحنى:

ص − ٦ = $\frac{١}{٢}$(س − ٣)

٢ص − ١٢ = س − ٣

٢ص = س + ٩

ب يقطع هذا العمودي محور السينات في النقطة أ حيث ص = ٠ فيكون، ٢ (٠) = س + ٩

س = −٩

وتكون أ (−٩، ٠)

يقطع هذا العمودي محور الصادات في النقطة ب حيث س = ٠

فيكون، ٢ص = ٠ + ٩

ص = ٤,٥

وتكون ب (٠، ٤,٥)

أوجِد نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ باستخدام:

$\left(\frac{\text{س}_{١} + \text{س}_{٢}}{٢}، \frac{\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢}}{٢}\right)$

$= \left(\frac{-٩ + ٠}{٢}، \frac{٠ + ٤,٥}{٢}\right)$

نقطة المنتصف $\left(\frac{-٩}{٢}، \frac{٩}{٤}\right)$.

ج لإيجاد تقاطع العمودي مع المنحنى، حل المعادلتَين الآنيتَين:

ص = ٣ + ٤س − س^{٢} .... [١]

٢ص = س + ٩ .... [٢]

الطريقة ١

اضرب المعادلة [١] في ٢ لتحصل على:

٢ص = ٦ + ٨س − ٢س^{٢}

ويكون، ٦ + ٨س − ٢س^{٢} = س + ٩

أو ٢س^{٢} − ٧س + ٣ = ٠

(٢س − ١) (س − ٣) = ٠

فيكون إما: س − ٣ = ٠ أي أن س = ٣ (معلومة من السؤال) أو ٢س − ١ = ٠

س = $\frac{١}{٢}$

عوّض بدل س = $\frac{١}{٢}$ في المعادلة [٢] لتحصل على:

٢ص = $\frac{١}{٢}$ + ٩

٢ص = ٩,٥

ص = ٤,٧٥

فيتقاطع العمودي مع المنحنى ثانية في $\left(\frac{١}{٢}، ٤\frac{٣}{٤}\right)$

ملاحظة:

طريقة بديلة لحل المعادلتَين الآنيتَين عرضت أدناه. سوف تلاحظ أن الطريقة الأولى (التعويض عن ص من المعادلة [١] في المعادلة [٢]) أسهل من الطريقة الثانية، ومن المرجح أن تقل فيها الأخطاء.

الطريقة ٢

اكتب س بدلالة ص في المعادلة [٢] وعوّض بدل س في المعادلة [١]:

س = ٢ص − ٩

ص = ٣ + ٤ (٢ص − ٩) − (٢ص − ٩)^{٢}

انتبه للإشارات !

$ص = ٣ + ٨ص - ٣٦ - ((٢ص - ٩)(٢ص - ٩))$

$ص = ٣ + ٨ص - ٣٦ - (٤ص^{٢} - ١٨ص - ١٨ص + ٨١)$

$ص = ٣ + ٨ص - ٣٦ - ٤ص^{٢} + ٣٦ص - ٨١$

$٤ص^{٢} - ٤٣ص + ١١٤ = ٠$

إذا لاحظت من النظرة الأولى أن المعادلة التربيعية يصعب تحليلها إلى العوامل، فلا تضيّع الوقت، واستخدم الصيغة التربيعية.

يمكن معرفة ذلك أيضًا من خلال إيجاد المميز، وبالتالي يمكن تحليل المعادلة.

قارن المعادلة مع $أص^{٢} + ب ص + جـ = ٠$

فيكون $أ = ٤$، $ب = -٤٣$، $جـ = ١١٤$

$$ص = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$ص = \frac{-(-٤٣) \pm \sqrt{(-٤٣)^{٢} - ٤(٤)(١١٤)}}{٢(٤)}$$

$$ص = \frac{٤٣ \pm \sqrt{٢٥}}{٨}$$

$ص = \frac{٤٣ + ٥}{٨} = ٦$ (معلومة في السؤال).

$ص = \frac{٤٣ - ٥}{٨}$، $ص = ٤\frac{٣}{٤}$

الآن عوّض بدل $ص = ٤\frac{٣}{٤}$ في المعادلة [٢] لتحصل على:

$$٢\left(٤\frac{٣}{٤}\right) = س + ٩$$

$س = ٠,٥$

يتقاطع العمودي مع المنحنى ثانية عند النقطة $\left(\frac{١}{٢}، ٤\frac{٣}{٤}\right)$

١٥) أ المعادلة $ص = (٦س + ٢)^{\frac{١}{٣}}$

أوجِد المشتقة باستخدام قاعدة السلسلة:

افترض أن $ع = ٦س + ٢$، فيكون $ص = ع^{\frac{١}{٣}}$

$\frac{دع}{دس} = ٦$ و $\frac{دص}{دع} = \frac{١}{٣}ع^{-\frac{٢}{٣}}$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$

$$= \frac{١}{٣}ع^{-\frac{٢}{٣}} \times ٦$$

$$= ٢(٦س + ٢)^{-\frac{٢}{٣}}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{(٦س + ٢)^{-\frac{٢}{٣}}}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{\sqrt[٣]{(٦س + ٢)^{٢}}}$$

عند النقطة أ حيث $س = ١$ يكون:

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{\sqrt[٣]{(٦ \times ١ + ٢)^{٢}}}$$

$$= \frac{٢}{٤}$$

$$م = \frac{١}{٢}$$

استخدم $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$، $م = \frac{١}{٢}$، أ $(١، ٢)$ لتجد معادلة المماس.

$ص - ٢ = \frac{١}{٢}(س - ١)$

$٢ص - ٤ = س - ١$

$٢ص = س + ٣$

يمر العمودي بالنقطة $(١، ٢)$

وميله $= -\frac{١}{م} = -\frac{١}{\frac{١}{٢}} = -٢$

استخدم الصيغة $ص - ص_{١} = -\frac{١}{م}(س - س_{١})$،

$م = -٢$، $(١، ٢)$ لتجد معادلة العمودي.

$ص - ٢ = -٢(س - ١)$

$ص - ٢ = -٢س + ٢$

$ص + ٢س = ٤$

ب استخدم صيغة الميل $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$ لتجد معادلة المستقيم ب ج.

ب(٠، $\frac{٣}{٢}$)، ج (٢، ٠)

فيكون ميل ب ج = $\frac{٠ - \frac{٣}{٢}}{٢ - ٠} = -\frac{٣}{٤}$

استخدم ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)، م = $-\frac{٣}{٤}$،

ج (٢، ٠) لتجد معادلة المستقيم ب ج.

ص = $-\frac{٣}{٤}$ (س − ٢)............ [١]

أوجِد معادلة المستقيم و أ.

استخدم $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$، و(٠، ٠)، أ (١، ٢)

ميل و أ = $\frac{٢ - ٠}{١ - ٠} = ٢$

استخدم ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)، م = ٢، و(٠، ٠).

ص − ٠ = ٢ (س − ٠)

معادلة و أ هي ص = ٢س .... [٢]

لتجد هـ نقطة تقاطع المستقيمَين و أ، ب ج حل المعادلتَين [١]، [٢] آنيًا.

أي: ص = $-\frac{٣}{٤}$(س − ٢)، ص = ٢س

$-\frac{٣}{٤}$ (س − ٢) = ٢س

−٣ (س − ٢) = ٨س

−٣س + ٦ = ٨س

١١س = ٦

س = $\frac{٦}{١١}$

عوّض بدل س = $\frac{٦}{١١}$

في المعادلة [٢] لتحصل على:

ص = ٢ × $\frac{٦}{١١} = \frac{١٢}{١١}$

فتكون النقطة هـ $\left(\frac{٦}{١١}، \frac{١٢}{١١}\right)$

أوجِد نقطة منتصف و أ حيث أ(١، ٢)، و(٠، ٠)

باستخدام

$$\left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢} ، \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{١ + ٠}{٢} ، \frac{٢ + ٠}{٢}\right)$$

فتكون نقطة المنتصف $\left(\frac{١}{٢}، ١\right)$.

وعلية فإن هـ ليست هي نقطة منتصف $\overline{\text{و أ}}$.

١٦) لتكن الدالة ص = ٢٧س − $\frac{٤}{(\text{س} + ٢)^٢}$

أعد كتابة الدالة في صورة

ص = ٢٧س − ٤ (س + ٢)$^{-٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢٧ − (−٢) × ٤ (س + ٢)$^{-٣}$ × ١

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢٧ + ٨(س + ٢)$^{-٣}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢٧ + $\frac{٨}{(\text{س} + ٢)^٣}$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠

٢٧ + $\frac{٨}{(\text{س} + ٢)^٣}$ = ٠

−٢٧ = $\frac{٨}{(\text{س} + ٢)^٣}$

(س + ٢)^٣ = $-\frac{٨}{٢٧}$

س + ٢ = $-\frac{٢}{٣}$

س = $-\frac{٨}{٣}$

∴ توجد نقطة حرجة عند س = $-\frac{٨}{٣}$

لتحدد نوع النقطة الحرجة إما أن تجد $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢}$ أو تجد الميل إلى جانبَي س = $-\frac{٨}{٣}$

٢٥٥

الطريقة ١

أوجِد $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{٢}}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢٧ + ٨(\text{س} + ٢)^{-٣}$$

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{٢}} = -٣ \times ٨(\text{س} + ٢)^{-٤} \times ١$$

$$= \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{٢}} = -\frac{٢٤}{(\text{س} + ٢)^{٤}}$$

عوّض بدل س= $-\frac{٨}{٣}$ في دالة المشتقة الثانية لتحصل على:

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{٢}} = -\frac{٢٤}{\left(\left(-\frac{٨}{٣}\right) + ٢\right)^{٤}} = -\frac{٢٤٣}{٢}$$

هذه قيمة سالبة فتكون النقطة الحرجة نقطة عظمى.

> اقرأ السؤال جيدًا. ليس مطلوبًا في هذا السؤال أن تجد الإحداثي الصادي.

الطريقة ٢

أوجِد الميل إلى جانبَي النقطة الحرجة.

أوجِد الميل عند النقطة س = −٣

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢٧ + \frac{٨}{(-٣ + ٢)^{٣}} = ١٩$$

اختر نقطة إلى الجانب الآخر من $-\frac{٨}{٣}$ مثل $-\frac{٧}{٣}$

(**ملاحظة**: عندما س = −٢ فإن

$\text{ص} = ٢٧ \times -٢ - \frac{٤}{(-٢ + ٢)^{٢}}$، ومنه فإن س = −٢ خط تقاربي).

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢٧ + \frac{٨}{\left(-\frac{٧}{٣} + ٢\right)^{٣}} = -١٨٩$$

وحيث إن الميل يتغير من موجب إلى سالب فتكون النقطة الحرجة نقطة عظمى.

١٧) أ لتكن الدالة $\text{ص} = \frac{٨}{\text{س}} + ٢\text{س}$

أعد كتابة الدالة في صورة $\text{ص} = ٨\text{س}^{-١} + ٢\text{س}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٨\text{س}^{-٢} + ٢$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{٨}{\text{س}^{٢}} + ٢$$

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{٢}} = ١٦\text{س}^{-٣}$$

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{٢}} = \frac{١٦}{\text{س}^{٣}}$$

ب عند النقطة الحرجة يكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$$-\frac{٨}{\text{س}^{٢}} + ٢ = ٠$$

$$-\frac{٨}{\text{س}^{٢}} = -٢$$

$$-٢\text{س}^{٢} = -٨$$

$$\text{س}^{٢} = ٤$$

$$\text{س} = \pm ٢$$

توجد نقاط حرجة عند س = ±٢

لتحدد نوع النقاط الحرجة.

عوّض بدل قيم الإحداثيات السينية (س = ±٢)

في $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{٢}}$

إذا كان س = ٢ فإن $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{٢}} = \frac{١٦}{\text{س}^{٣}}$ وقيمتها:

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{٢}} = \frac{١٦}{٢^{٣}} = ٢$ وهي قيمة موجبة، وعليه تكون

س = ٢ نقطة صغرى.

عوّض بدل س = ٢ في $\text{ص} = \frac{٨}{\text{س}} + ٢\text{س}$ لتجد الإحداثي الصادي.

$$\text{ص} = \frac{٨}{٢} + ٢ \times ٢ = ٨$$

إذا كان س = −٢ فإن $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{٢}} = \frac{١٦}{\text{س}^{٣}}$ وقيمتها:

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{٢}} = \frac{١٦}{(-٢)^{٣}} = -٢$ وهي قيمة سالبة، وعليه

تكون س = ٢ نقطة عظمى.

عوّض بدل س = −٢ في ص = $\frac{\text{٨}}{\text{س}}$ + ٢س لتجد الإحداثي الصادي.

ص = $\frac{\text{٨}}{\text{−٢}}$ + ٢(−٢) = −٨

الحل: النقطة (٢، ٨) نقطة صغرى لأن

$\frac{\text{ءٔ}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{ءٔس}^{\text{٢}}}$ > ٠ عندما س = ٢

النقطة (−٢، −٨) نقطة عظمى لأن $\frac{\text{ءٔ}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{ءٔس}^{\text{٢}}}$ < ٠

عندما س = −٢

١٨) أ لتكن الدالة ص = س$^{\text{٣}}$ + س$^{\text{٢}}$ − ٥س + ٧

$\frac{\text{ءٔص}}{\text{ءٔس}}$ = ٣س$^{\text{٢}}$ + ٢س − ٥

إذا كانت $\frac{\text{ءٔص}}{\text{ءٔس}}$ < ٣ فإن:

٣س$^{\text{٢}}$ + ٢س − ٥ < ٣

٣س$^{\text{٢}}$ + ٢س − ٨ < ٠

(٣س − ٤)(س + ٢) < ٠

تمثيل الدالة ص = (٣س − ٤)(س + ٢) دالة تربيعية شكلها ∪

حل المعادلات الآتية لتجد المقاطع من محور السينات:

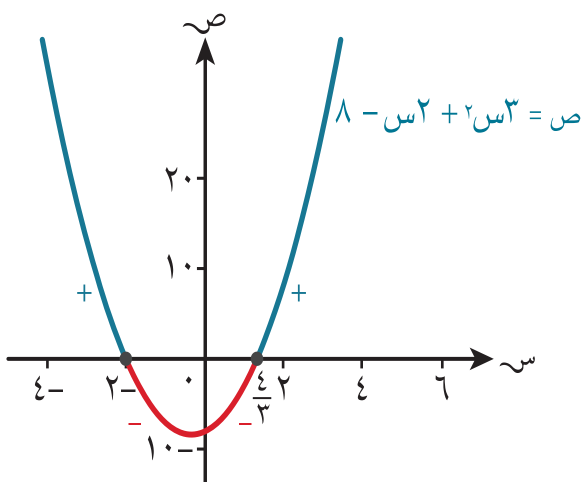
٣س − ٤ = ٠

٣س = ٤

س = $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$

و س + ٢ = ٠

س = −٢



نريد أن نحل المتباينة ٣س$^{\text{٢}}$ + ٢س − ٨ < ٠، أي عندما يكون المنحنى أسفل المحور السيني.

الحل: −٢ < س < $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$

ب حل المعادلة $\frac{\text{ءٔص}}{\text{ءٔس}}$ = ٠ لتجد النقاط الحرجة على المنحنى.

وحيث إن $\frac{\text{ءٔص}}{\text{ءٔس}}$ = ٣س$^{\text{٢}}$ + ٢س − ٥

٣س$^{\text{٢}}$ + ٢س − ٥ = ٠

(٣س + ٥)(س − ١) = ٠

إما: ٣س + ٥ = ٠

٣س = −٥

س = −$\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$

أو: س − ١ = ٠

س = ١

إذا كانت س = −$\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$، فعوّض بدل س = −$\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$ في

ص = س$^{\text{٣}}$ + س$^{\text{٢}}$ − ٥س + ٧ لتحصل على:

ص = $\left(-\frac{\text{٥}}{\text{٣}}\right)^{\text{٣}}$ + $\left(-\frac{\text{٥}}{\text{٣}}\right)^{\text{٢}}$ − ٥$\left(-\frac{\text{٥}}{\text{٣}}\right)$ + ٧

ص = $\frac{\text{٣٦٤}}{\text{٢٧}}$

لذا $\left(-\frac{٥}{٣}، \frac{٣٦٤}{٢٧}\right)$ نقطة حرجة.

إذا كانت س = ١، فعوّض بدل س = ١ في $ص = س^{٣} + س^{٢} - ٥س + ٧$ لتحصل على:

$ص = (١)^{٣} + (١)^{٢} - ٥(١) + ٧$

$ص = ٤$

لذا (١، ٤) نقطة حرجة.

أوجِد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ حيث إنك تحدّد نوع النقطة الحرجة عندما $س = -\frac{٥}{٣}$

وحيث إن $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} + ٢س - ٥$

يكون $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٦س + ٢$

لذا عندما $س = -\frac{٥}{٣}$

فإن $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٦\left(-\frac{٥}{٣}\right) + ٢ = -٨$

وهذه قيمة سالبة فتكون $\left(-\frac{٥}{٣}، \frac{٣٦٤}{٢٧}\right)$ نقطة عظمى.

عوّض بدل س = ١ في $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٦س + ٢$ لتحصل على: $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٦(١) + ٢ = ٨$

وهذه قيمة موجبة فتكون (١، ٤) نقطة صغرى.

١٩) أ لتكن الدالة $ص = س^{٣} + عس^{٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} + ٢عس$

توجد النقاط الحرجة عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

فيكون $٣س^{٢} + ٢عس = ٠$

$س(٣س + ٢ع) = ٠$

إما $س = ٠$

أو $٣س + ٢ع = ٠$ ومنها $س = -\frac{٢}{٣}ع$.

إذا كانت س = ٠، فعوّض بدل س = ٠ في

$ص = س^{٣} + عس^{٢}$ لتحصل على:

$ص = ٠^{٣} + ع \times ٠^{٢}$

ومنها $ص = ٠$

لذا تكون نقطة الأصل (٠، ٠) نقطة حرجة

إذا كانت $س = -\frac{٢}{٣}ع$، فعوّض بدل $س = -\frac{٢}{٣}ع$ في $ص = س^٣ + ع س^٢$ لتحصل على:

$$ص = \left(-\frac{٢}{٣}ع\right)^٣ + ع \times \left(-\frac{٢}{٣}ع\right)^٢$$

$$ص = -\frac{٨}{٢٧}ع^٣ + \frac{٤}{٩}ع^٣$$

$$ص = -\frac{٤}{٢٧}ع^٣$$

فتكون $\left(-\frac{٢ع}{٣}، \frac{٤ع^٣}{٢٧}\right)$ نقطة حرجة.

ب لتجد نوع كل نقطة حرجة اتبع ما يأتي:

$$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢ + ٢عس$$

$$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٦س + ٢ع$$

عوّض بدل $س = ٠$ في $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٦س + ٢ع$ لتحصل على: $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٦(٠) + ٢ع = ٢ع$

بما أن ع موجبة، فإن ٢ع موجبة أيضًا، فتكون (٠، ٠) نقطة صغرى.

عوّض بدل $س = -\frac{٢}{٣}ع$ في $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٦س + ٢ع$ لتحصل على: $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٦\left(-\frac{٢}{٣}ع\right) + ٢ع = -٢ع$

بما أن ع موجبة فإن −٢ع سالبة، فتكون $\left(-\frac{٢ع}{٣}، \frac{٤ع^٣}{٢٧}\right)$ نقطة عظمى.

ج لتكن الدالة $ص = س^٣ + عس^٢ + عس$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢ + ٢عس + ع$$

إذا لم توجد نقاط حرجة فلا توجد جذور حقيقية لـ $٣س^٢ + ٢عس + ع = ٠$

قارن المعاملات مع $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$، $أ = ٣$، $ب = ٢ع$، $جـ = ع$.

استخدم الصيغة التربيعية $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ فيكون: $ب^٢ - ٤أجـ < ٠$ لأنه لا توجد جذور.

بالتعويض في المميز نجد أن: $(٢ع)^٢ - ٤ \times ٣ \times ع < ٠$

أي أن $٤ع^٢ - ١٢ع < ٠$

ومنها $٤ع(ع - ٣) < ٠$

حل المعادلة ٤ع (ع −٣) =٠ يعطي المقاطع من المحور السيني.