تمارين ٤-٦

١) أ) ص = س^{٢} − ٤س + ٨

$\frac{ص}{س}$ = ٢س − ٤

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ص}{س}$ = ٠

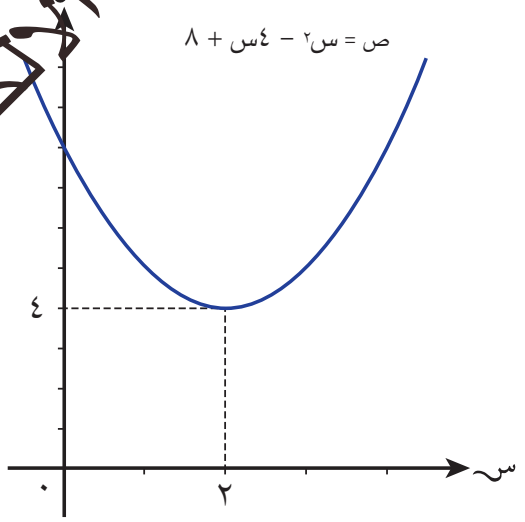
٢ س − ٤ = ٠ ومنها س = ٢

النقطة الحرجة (٢، ٤).

قيمة $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ تخبرنا عن نوع النقطة الحرجة.

$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ = ٢ > ٠

لذا توجد نقطة صغرى عند (٢، ٤)



ب) ص = (٣ + س) (٢ − س) = ٦ − س − س^{٢}

$\frac{ص}{س}$ = −١ − ٢س

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ص}{س}$ = ٠

−١ − ٢س = ٠ أي عند س= −٠,٥

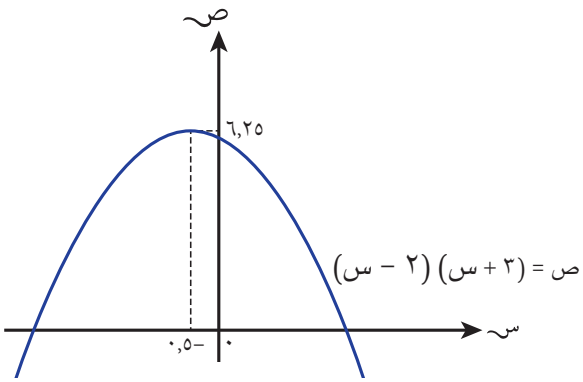
عندما س= −٠,٥ فإن

توجد نقطة حرجة عند (−٠,٥ ، ٦,٢٥).

قيمة $\frac{ك^{٢}ص}{ك س^{٢}}$ تخبرنا عن نوع النقطة الحرجة.

$\frac{ك^{٢}ص}{ك س^{٢}}$ = −٢ < ٠

النقطة الحرجة هي نقطة عظمى عند (−٠,٥، ٦,٢٥).



ج) ص = س^{٣} − ١٢س + ٦

$\frac{ص}{س}$ = ٣س^{٢} − ١٢

توجد النقطة الحرجة عندما $\frac{ص}{س}$ = ٠

٣س^{٢} − ١٢ = ٠ أي عند س = −٢، س = ٢

عندما س = −٢ فإن ص = (−٢)^{٣} − ١٢(−٢) + ٦ = ٢٢

عندما س = ٢ فإن ص = (٢)^{٣} − ١٢(٢) + ٦ = −١٠

توجد نقاط حرجة عند (− ٢، ٢٢)، (٢، − ١٠).

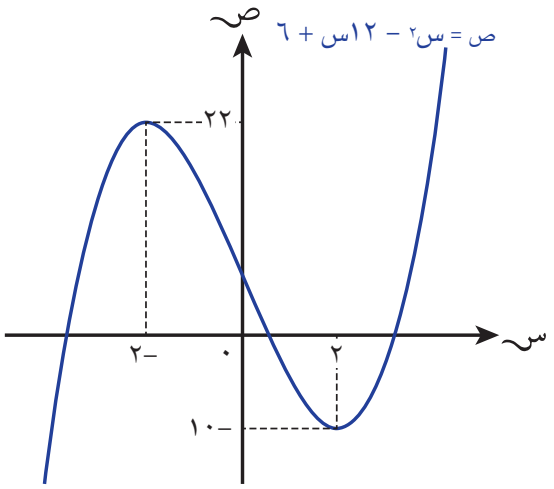
تدلنا قيمة $\frac{ك^{٢}ص}{ك س^{٢}}$ عن نوع النقاط الحرجة.

$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ = ٦س { > ٠ عندما س = −٢ ، < ٠ عندما س = ٢

توجد نقطة عظمى عند (−٢، ٢٢).

توجد نقطة صغرى عند (٢، −١٠).

المعلم الإلكتروني الشامل



د ص = ١٠ + ٩س − ٣س² − س³

$\frac{ود ص}{ود س}$ = ٩ − ٦س − ٣س²

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ود ص}{ود س}$ = ٠

٩ − ٦س − ٣س² = ٠

يكمل الحل ويوجد قيم س

س² + ٢س − ٣ = ٠

(س + ٣)(س − ١) = ٠

إما س = −٣ أو س = ١

عندما س = ١، فإن

ص = ١٠ + ٩(١) − ٣(١)² − (١)³ = ١٥

عندما س = −٣، فإن

ص = ١٠ + ٩(−٣) − ٣(−٣)² − (−٣)³ = −١٧

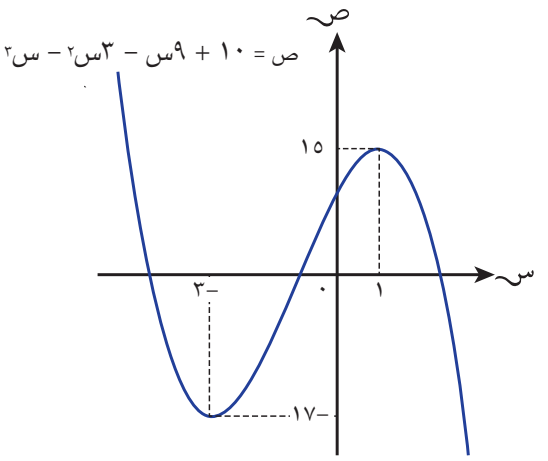
توجد نقاط حرجة عند (−٣، −١٧)، (١، ١٥).

تخبرنا قيمة $\frac{ود² ص}{ود س²}$ عن نوع النقاط الحرجة

$\frac{ود² ص}{ود س²}$ = −٦س − ٦ { عندما س = −٣ < ٠ ، عندما س = ١ > ٠

توجد نقطة صغرى عند (−٣، − ١٧).

وتوجد نقطة عظمى عند (١، ١٥).



هـ ص = س⁴ + ٤س − ١

$\frac{ود ص}{ود س}$ = ٤س³ + ٤

توجد النقطة الحرجة عندما $\frac{ود ص}{ود س}$ = ٠

٤س³ + ٤ = ٠

٤س³ = −٤

س³ = −١

س = −١

عندما س = −١

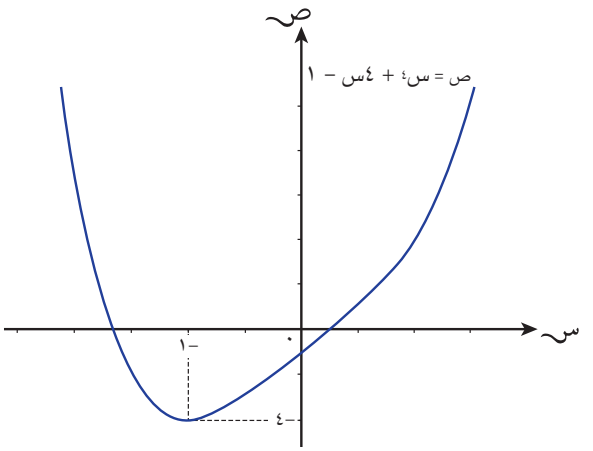
فإن ص = (−١)⁴ + ٤(−١) − ١ = −٤

توجد نقطة حرجة عند النقطة (−١، −٤).

تخبرنا قيمة $\frac{ود² ص}{ود س²}$ عن نوع النقطة الحرجة.

$\frac{ود² ص}{ود س²}$ = ١٢س² > ٠ عندما س = −١

توجد نقطة صغرى عند (−١، −٤).



المعلم الالكتروني الشامل

و ص = (٢س − ٣)^{٢} − ٦س

$\frac{ع ص}{ع س}$ = ٣(٢س − ٣)^{٢} × ٢ − ٦

$\frac{ع ص}{ع س}$ = ٦(٢س − ٣)^{٢} − ٦

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٠

٦(٢س − ٣)^{٢} − ٦ = ٠

٦(٢س − ٣)^{٢} = ٦

(٢س − ٣)^{٢} = ١

٢س − ٣ = ±√١

س = $\frac{٣ + \sqrt{١}\pm}{٢}$ = ١ أو ٢

عندما س = ١ فإن

ص = (٢ × ١ − ٣)^{٣} − ٦ × ١ = −٧

عندما س = ٢ فإن

ص = (٢ × ٢ − ٣)^{٣} − ٦ × ٢ = −١١

توجد النقاط الحرجة عند (١، −٧) و(٢، −١١).

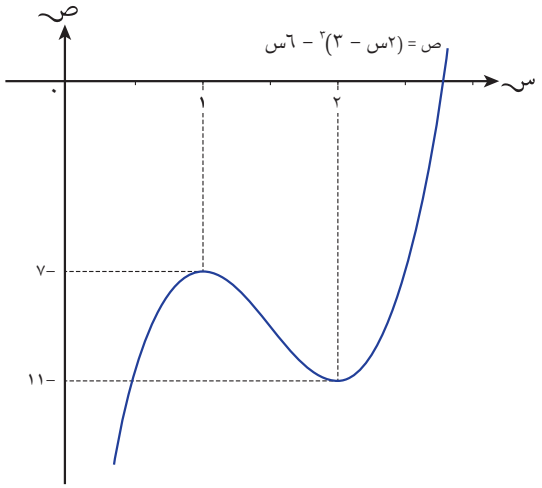
تخبرنا قيمة $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ عن نوع النقاط الحرجة.

$\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ = ٦ × ٢(٢س − ٣) × ٢

= ٤٨س − ٧٢ { > ٠ عندما س = ١ ، < ٠ عندما س = ٢

توجد نقطة عظمى عند (١، −٧).

توجد نقطة صغرى عند (٢، −١١).



٢) **أ** ص = √٧س + $\frac{٩}{\sqrt{٧س}}$ = س$^{\frac{١}{٢}}$ + ٩س$^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{١}{٢}$س$^{-\frac{١}{٢}}$ − $\frac{٩}{٢}$س$^{-\frac{٣}{٢}}$

$\frac{١}{٢}$س$^{-\frac{١}{٢}}$ = $\frac{٩}{٢}$س$^{-\frac{٣}{٢}}$

ارفع الطرفين للقوة −٢

٤س = $\frac{٤}{٨١}$ س^{٣}

س^{٣} − ٨١ = ٠

س(س^{٢} − ٨١س) = ٠

س = −٩، س = ٠، س = ٩

الحل الوحيد المقبول هو س = ٩ (لأن الدالة غير معرّفة عند س = −٩، س = ٠).

عندما س = ٩ فإن ص = √٩٧ + $\frac{٩}{\sqrt{٩٧}}$ = ٦

توجد نقطة حرجة عند (٩، ٦)

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{١}{٢}$س$^{-\frac{١}{٢}}$ − $\frac{٩}{٢}$س$^{-\frac{٣}{٢}}$

$\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ = − $\frac{١}{٤}$س$^{-\frac{٣}{٢}}$ + $\frac{٢٧}{٤}$س$^{-\frac{٥}{٢}}$

عندما س = ٩ فإن

$\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ = − $\frac{١}{٤}$ × ٩$^{-\frac{٣}{٢}}$ + $\frac{٢٧}{٤}$ × ٩$^{-\frac{٥}{٢}}$ = $\frac{١}{٥٤}$ > ٠

توجد نقطة صغرى عند (٩، ٦)

ب ص = ٤س^{٢} + $\frac{٨}{س}$ = ٤س^{٢} + ٨س$^{-١}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = ٨س − $\frac{٨}{س^{٢}}$

٨س − $\frac{٨}{س^{٢}}$ = ٠

٨س = $\frac{٨}{س^{٢}}$

٨س^{٣} = ٨

س^{٣} = ١

المعلم الإلكتروني الشامل

س = ١

عندما س = ١ فإن ص = ٤(١)^{٢} + $\frac{٨}{١}$ = ١٢

توجد نقطة حرجة عند (١، ١٢)

$\frac{ع^{٢}ص}{ع س^{٢}}$ = $\frac{١٦}{س^{٣}}$ + ٨

عندما س = ١ فإن

$\frac{ع^{٢}ص}{ع س^{٢}}$ = $\frac{١٦}{س^{٣}}$ + ٨ = ٢٤ > ٠

توجد نقطة صغرى عند (١، ١٢).

ج ص = $\frac{(س - ٣)^{٢}}{س}$ = $\frac{س^{٢} - ٦س + ٩}{س}$

= س − ٦ + ٩س$^{-١}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = ١ − $\frac{٩}{س^{٢}}$

١ − $\frac{٩}{س^{٢}}$ = ٠

س^{٢} = ٩

س = ±٣

عندما س = −٣ فإن ص = $\frac{(-٣ - ٣)^{٢}}{-٣}$ = −١٢

عندما س = ٣ فإن ص = $\frac{(٣ - ٣)^{٢}}{-٣}$ = ٠

توجد نقاط حرجة عند (−٣، −١٢)، (٣، ٠)

$\frac{ع^{٢}ص}{ع س^{٢}}$ = $\frac{١٨}{س^{٣}}$ { < ٠ عندما س = −٣ ، > ٠ عندما س = ٣ }

توجد نقطة عظمى عند (−٣، −١٢).

توجد نقطة صغرى عند (٣، ٠).

د ص = س^{٣} + $\frac{٤٨}{س}$ + ٤

ص = س^{٣} + ٤٨ س$^{-١}$ + ٤

$\frac{ع ص}{ع س}$ = ٣س^{٢} − $\frac{٤٨}{س^{٢}}$

٣س^{٢} − $\frac{٤٨}{س^{٢}}$ = ٠

٣س^{٢} = $\frac{٤٨}{س^{٢}}$

٣س^{٤} = ٤٨

س^{٤} = ١٦

س = ±٢

عندما س = −٢ فإن ص = (−٢)^{٣} + $\frac{٤٨}{-٢}$ + ٤ = −٢٨

عندما س = ٢ فإن ص = ٢^{٣} + $\frac{٤٨}{٢}$ + ٤ = ٣٦

توجد النقاط الحرجة عند (−٢، −٢٨)، (٢، ٣٦).

$\frac{ع^{٢}ص}{ع س^{٢}}$ = ٦س + $\frac{٩٦}{س^{٣}}$ { > ٠ عندما س = −٢ ، < ٠ عندما س = ٢ }

توجد نقطة عظمى (−٢، −٢٨).

توجد نقطة صغرى عند (٢، ٣٦).

هـ ص = ٤$\sqrt{س}$ − س

ص = ٤س$^{\frac{١}{٢}}$ − س

$\frac{ع ص}{ع س}$ = ٤ × $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ − ١ = $\frac{٢}{\sqrt{س}}$ − ١

$\frac{٢}{\sqrt{س}}$ − ١ = ٠

$\frac{٢}{\sqrt{س}}$ = ١

$\sqrt{س}$ = ٢

س = ٤

عندما س = ٤، فإن ص = ٤$\sqrt{٤}$ − ٤ = ٨ − ٤ = ٤

توجد نقطة حرجة عند (٤، ٤).

$\frac{ع^{٢}ص}{ع س^{٢}}$ = − $\frac{١}{س^{\frac{٣}{٢}}}$

عندما س = ٤ فإن $\frac{ع^{٢}ص}{ع س^{٢}}$ = − $\frac{١}{٨}$ < ٠

توجد نقطة عظمى عند (٤ ، ٤).

و ص = ٢س + $\frac{٨}{س^{٢}}$

ص = ٢س + ٨س$^{-٢}$

المعلم الإلكتروني الشامل

$\frac{د ص}{د س} = ٢ - ١٦س^{-٣} = ٢ - \frac{١٦}{س^٣}$

$٢ - \frac{١٦}{س^٣} = ٠$

$\frac{١٦}{س^٣} = ٢$

$٢س^٣ = ١٦$

$س^٣ = ٨$

$س = ٢$

عندما س = ٢ فإن ص = $٢ \times ٢ + \frac{٨}{٢^٢} = ٦$

توجد نقطة حرجة عند (٢، ٦)

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = -١٦(-٣)س^{-٤} = \frac{٤٨}{س^٤}$

عندما س = ٢ فإن $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{٤٨}{٢^٤} = ٣ > ٠$

توجد نقطة صغرى عند (٢، ٦).

٣) لتكن الدالة ص = $\frac{س^٢ - ٩}{س^٢}$

أعد كتابة الدالة في صورة ص = $١ - ٩س^{-٢}$

$\frac{د ص}{د س} = ١٨س^{-٣} = \frac{١٨}{س^٣}$

توجد نقطة حرجة عندما $\frac{د ص}{د س} = ٠$

$\frac{١٨}{س^٣} = ٠$

لا يوجد حل لهذه المعادلة.

لذا لا توجد نقاط حرجة.

٤) أ لتكن الدالة ص = $٢س^٣ - ٣س^٢ - ٣٦س + ك$

$\frac{د ص}{د س} = ٦س^٢ - ٦س - ٣٦$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{د ص}{د س} = ٠$

$٦س^٢ - ٦س - ٣٦ = ٠$

$س^٢ - س - ٦ = ٠$

$(س - ٣)(س + ٢) = ٠$

إما س = -٢ أو س = ٣

ب إذا كان س = -٢ فإن

ص = $٢(-٢)^٣ - ٣(-٢)^٢ - ٣٦(-٢) + ك = ك + ٤٤$

توجد نقطة حرجة عند (-٢، ك + ٤٤).

إذا كان س = ٣ فإن

ص = $٢(٣)^٣ - ٣(٣)^٢ - ٣٦(٣) + ك = ك - ٨١$

توجد نقطة حرجة عند (٣، ك - ٨١)

إذا وقعت النقاط الحرجة على محور السينات

فإن: ك + ٤٤ = ٠ ومنها ك = -٤٤

ك - ٨١ = ٠ ومنها ك = ٨١

قيمتا ك هما -٤٤، ١٨

٥) أ ص = $س^٣ + أس^٢ - ٩س + ٢$

$\frac{د ص}{د س} = ٣س^٢ + ٢أس - ٩$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{د ص}{د س} = ٠$

$٣س^٢ + ٢أس - ٩ = ٠$

عوّض بدل س = -٣ في المعادلة لتحصل على:

$٣(-٣)^٢ + ٢أ(-٣) - ٩ = ٠$

$٢٧ - ٦أ - ٩ = ٠$

$-٦أ = -١٨$

أ = ٣

ب ص = $س^٣ + ٣س^٢ - ٩س + ٢$

$\frac{د ص}{د س} = ٣س^٢ + ٦س - ٩$

$\frac{د ص}{د س} > ٠$

$٣س^٢ + ٦س - ٩ > ٠$

$س^٢ + ٢س - ٣ > ٠$

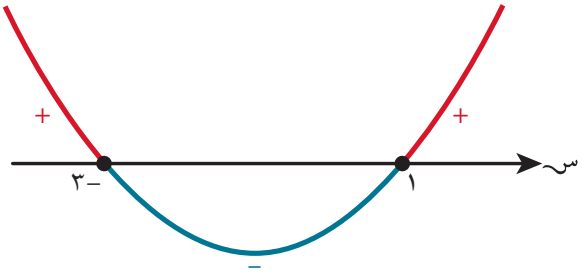
$(س + ٣)(س - ١) > ٠$

نجد النقاط الحرجة عندما نجد قيم س التي

تحقق المعادلة (س + ٣)(س - ١) = ٠ وهي:

المعلم الإلكتروني الشامل

س = ١، س = −٣ وهما ممثلتان على الشكل الآتي:



نريد س٢ + ٢س − ٣ < ٠ وهو جزء التمثيل البياني حيث $\frac{ص}{س}$ < ٠ أي الجزء الواقع أسفل محور السينات.

وعليه يكون −٣ < س < ١

٦) لتكن الدالة ص = ٢س٣ + أس٢ + بس − ٣٠

$\frac{ص}{س}$ = ٦س٢ + ٢أس + ب

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ص}{س}$ = ٠

٦س٢ + ٢أس + ب = ٠

عوّض بدل س = ٣ في المعادلة لتحصل على:

٦(٣)٢ + ٢أ(٣) + ب = ٠

٥٤ + ٦أ + ب = ٠

٦أ + ب = −٥٤ ..... [١]

عندما يمر منحنى ص = ٢س٣ + أس٢ + بس − ٣٠

في (٤، ٢) فعوّض بدل س = ٤، ص = ٢ في المعادلة لتحصل على:

٢ = ٢(٤)٣ + أ(٤)٢ + ب(٤) − ٣٠

٢ = ١٢٨ + ١٦أ + ٤ب − ٣٠

١٦أ + ٤ب = −٩٦

٤أ + ب = −٢٤ ..... [٢]

حل المعادلتَين [١]، [٢] لتحصل على:

٢أ = −٣٠

أ = −١٥

عوّض بدل أ = −١٥ في المعادلة [٢] لتجد أن:

٤(−١٥) + ب = −٢٤

ب = ٣٦

ص = ٢س٣ − ١٥س٢ + ٣٦س − ٣٠

$\frac{ص}{س}$ = ٦س٢ − ٣٠س + ٣٦

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ص}{س}$ = ٠

٦س٢ − ٣٠س + ٣٦ = ٠

س٢ − ٥س + ٦ = ٠

(س − ٣)(س − ٢) = ٠

س = ٣ (معطاة في السؤال)، أو س = ٢

إذا كان س = ٢ فإن

ص = ٢(٢)٣ − ١٥(٢)٢ + ٣٦(٢) − ٣٠ = −٢

إذا توجد نقطة حرجة أخرى عند (٢، −٢).

توجد طريقتان لتحديد نوع النقطة الحرجة:

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

أوجِد المشتقة الثانية $\frac{د٢ص}{دس٢}$

$\frac{د٢ص}{دس٢}$ = ١٢س − ٣٠

عندما س = ٢ فإن $\frac{د٢ص}{دس٢}$ = ١٢(٢) − ٣٠ = −٦

وعليه فإن $\frac{د٢ص}{دس٢}$ < ٠

∴ (٢، −٢) نقطة عظمى.

المعلم الإلكتروني للتفاضل

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

أوجِد الميل على جانبَي النقطة (٢، −٢).

عوّض بدل س = ١ في $\frac{ص}{س}$ = ٦س^{٢} − ٣٠س + ٣٦ = ٠

لتحصل على $\frac{ص}{س}$ = ٦(١)^{٢} − ٣٠(١) + ٣٦ = ١٢

وهي كمية موجبة.

التعويض بدل س = ٣ لا يساعد بسبب وجود نقطة حرجة عند س = ٣

عوّض بدل س = ٢,٥ في

$\frac{ص}{س}$ = ٦س^{٢} − ٣٠س + ٣٦ = ٠

لتحصل على:

$\frac{ص}{س}$ = ٦(٢,٥)^{٢} − ٣٠(٢,٥) + ٣٦ = $-\frac{٣}{٢}$ وهي كمية سالبة.

وحيث إن إشارة الميل تتغير من موجبة إلى سالبة كلما تحركت قيم س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة، فإن (٢، −٢) نقطة عظمى.

٧) لتكن الدالة ص = ٢س^{٣} + أس^{٢} + بس − ٣٠

$\frac{ص}{س}$ = ٦س^{٢} + ٢أس + ب

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ص}{س}$ = ٠

٦س^{٢} + ٢أس + ب = ٠

قارن المعادلة مع أس^{٢} + بس + جـ = ٠ واستخدم الصيغة التربيعية لتجد أن:

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$، حيث أ = ٦، ب = ٢أ، ج = ب

س = $\frac{-٢أ \pm \sqrt{(٢أ)^{٢} - ٤(٦)(ب)}}{(٦)٢}$

لا توجد حلول حقيقية إذا كان (٢أ)^{٢} − ٤(٦)(ب) < ٠

وعليه ٤أ^{٢} − ٢٤ب < ٠

أ^{٢} − ٦ب < ٠

أ^{٢} < ٦ب

٨) لتكن الدالة ص = ١ + ٢س + $\frac{ك^{٢}}{٢س - ٣}$

أعد كتابة الدالة في صورة

ص = ١ + ٢س + ك^{٢}(٢س − ٣)$^{-١}$

$\frac{ص}{س}$ = ٢ + ك^{٢} × −١(٢س − ٣)$^{-٢}$ × ٢

= ٢ − ٢ك^{٢}(٢س − ٣)$^{-٢}$

= ٢ − $\frac{٢ك^{٢}}{(٢س - ٣)^{٢}}$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ص}{س}$ = ٠

٢ − $\frac{٢ك^{٢}}{(٢س - ٣)^{٢}}$ = ٠

٢ = $\frac{٢ك^{٢}}{(٢س - ٣)^{٢}}$

$\frac{ك^{٢}}{(٢س - ٣)^{٢}}$ = ١

(٢س − ٣)^{٢} = ك^{٢}

٢س − ٣ = ±ك

س = $\frac{ك + ٣}{٢}$ أو س = $\frac{-ك + ٣}{٢}$

اقرأ التعليمات بانتباه. يطلب هذا التمرين قيم س فقط وليس قيم ص.

لتقرّر نوع النقاط الحرجة، أوجِد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$:

وحيث إن $\frac{ص}{س}$ = ٢ − ٢ك^{٢} (٢س − ٣)$^{-٢}$

المعلم الإلكتروني الشامل

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = -٢ \times -٢ك^٢ (٢س - ٣)^{-٣} \times ٢$

$= ٨ك^٢ (٢س - ٣)^{-٣}$

$= \frac{٨ك^٢}{(٢س - ٣)^٣}$

عوّض بدل س $= \frac{ك + ٣}{٢}$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{٨ك^٢}{(٢ \times \frac{ك + ٣}{٢} - ٣)^٣}$

$= \frac{٨ك^٢}{ك^٣}$

$= \frac{٨}{ك}$ وهي قيمة موجبة لأن ك موجبة

وعليه فإنه توجد عند س $= \frac{ك + ٣}{٢}$ نقطة صغرى.

عوّض بدل س $= \frac{-ك + ٣}{٢}$

$= \frac{٨ك^٢}{-ك^٣}$

$= -\frac{٨}{ك}$ وهي قيمة سالبة لأن ك موجبة.

وعليه توجد نقطة عظمى عند $\frac{-ك + ٣}{٢}$

اختبار المشتقة الأولى يحتاج إلى عمل أكثر بكثير من الطريقة أعلاه ويقود أحياناً إلى الخطأ.

٩) لتكن الدالة ص = س^٤ − ٤س^٣ + ٤س^٢ + ١

$\frac{د ص}{د س} = ٤س^٣ - ١٢س^٢ + ٨س$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{د ص}{د س} = ٠$

٤س^٣ − ١٢س^٢ + ٨س = ٠

"لا تقسم المعادلة على س لأنك ستفقد أحد الحلول"

٤س(س^٢ − ٣س + ٢) = ٠

٤س(س − ١)(س − ٢) = ٠

فيكون س = ٠، أو س= ١، أو س = ٢

إذا كان س = ٠

فإن ص = ٠^٤ − ٤(٠)^٣ + ٤(٠)^٢ + ١ = ١

إذا كان س = ١

فإن ص = ١^٤ − ٤(١)^٣ + ٤(١)^٢ + ١ = ٢

إذا كان س = ٢

فإن ص = ٢^٤ − ٤(٢)^٣ + ٤(٢)^٢ + ١ = ١

النقاط الحرجة هي (٠، ١)، (١، ٢)، (٢، ١).

لتحدد نوع النقاط الحرجة هذه، وهي متقاربة، فمن الحكمة استخدام المشتقة الثانية.

الآن أوجِد $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = ١٢س^٢ - ٢٤س + ٨$

بتعويض قيم س في المشتقة الثانية:

س = ٠ فإن ١٢(٠)^٢ − ٢٤(٠) + ٨ = ٨ وهي موجبة

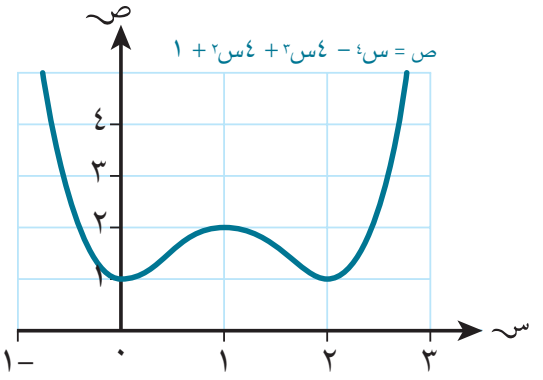
فيكون (٠، ١) قيمة صغرى.

س = ١ فإن ١٢(١)^٢ − ٢٤(١) + ٨ = −٤ وهي سالبة

فيكون (١، ٢) قيمة عظمى.

س = ٢ فإن ١٢(٢)^٢ − ٢٤(٢) + ٨ = ٨ وهي موجبة

فتكون (٢، ١) قيمة صغرى.



المعلم الإلكتروني المتكامل

١٠) أ لتكن الدالة ص = س^{٣} + أس^{٢} + ب

$\frac{د ص}{د س}$ = ٣س^{٢} + ٢أس

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{د ص}{د س}$ = ٠

٣س^{٢} + ٢أس = ٠

عوّض عن س = ٤ في ٣س^{٢} + ٢أس = ٠ لتحصل على: ٣(٤)^{٢} + ٢أ × ٤ = ٠

٨أ = −٤٨

أ = −٦

عوّض بدل س = ٤، ص = ٢٧، أ = −٦ في

ص = س^{٣} + أس^{٢} + ب لتحصل على: ب = ٥

ب معادلة المنحنى هي ص = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٥

فيكون، $\frac{د ص}{د س}$ = ٣س^{٢} − ١٢س

توجد طريقتان لتحديد نوع النقاط الحرجة:

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ٦س − ١٢

عندما س= ٤ فإن $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ٦ × ٤ − ١٢ = ١٢

فهي موجبة، وعليه فإن (٤، −٢٧) نقطة صغرى.

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

الآن ادرس الميل على جانبَي النقطة (٤، −٢٧).

عوّض بدل قيمة واحدة من كل جانب من س = ٤

عوّض بدل س = ٣ في $\frac{د ص}{د س}$ = ٣س^{٢} − ١٢س

لتحصل على: $\frac{د ص}{د س}$ = ٣(٣)^{٢} − ١٢(٣) أو −٩ وهي سالبة.

عوّض بدل س = ٥ في $\frac{د ص}{د س}$ = ٣س^{٢} − ١٢س

لتحصل على $\frac{د ص}{د س}$: ٣(٥)^{٢} − ١٢(٥) أو ١٥ وهي موجبة.

وحيث تتغيّر إشارة الميل من سالب إلى موجب عندما تتحرك س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة فتكون (٤، −٢٧) نقطة صغرى.

ج بما أن $\frac{د ص}{د س}$ = ٣س^{٢} − ١٢س، فإنه توجد نقاط حرجة عندما $\frac{د ص}{د س}$ = ٠، ٣س^{٢} − ١٢س = ٠

لا "تقسم" المعادلة على س، فبإجراء القسمة تفقد أحد الحلول س = ٠

٣س (س − ٤) = ٠

س = ٤ معطى في السؤال، أو س = ٠

إذا كان س = ٠ فأوجِد الإحداثي الصادي بالتعويض في معادلة المنحنى.

أي أن ص = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٥

ويكون ص = ٣٠ − ٦(٠)^{٢} + ٥ = ٥

فتكون (٠، ٥) النقطة الحرجة الأخرى.

توجد طريقتان لتحديد نوع النقطة الحرجة:

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

لتحدد نوع النقطة عوض بدل س = ٠ في $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$

فيكون $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ٦ × ٠ − ١٢ = −١٢ وهي سالبة.

النقطة (٠، ٥) نقطة عظمى.

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

ادرس ميل المنحنى على جانبَي النقطة (٠، ٥).

عوّض البدل بقيمة واحدة من كل جانب من س = ٠

عوّض بدل س = −١ في $\frac{د ص}{د س}$ = ٣س^{٢} − ١٢س

لتحصل على: $\frac{د ص}{د س}$ = ٣(−١)^{٢} − ١٢(−١) = ١٥

وهي موجبة.

المعلم الإلكتروني الشامل

عوّض بدل س = ١ في $\frac{ص}{س}$ = ٣س^{٢} − ١٢س

لتحصل على:

$\frac{ص}{س}$ = ٣(١)^{٢} − ١٢(١) = −٩ وهي سالبة.

وحيث تتغيّر إشارة الميل من موجب إلى سالب مع تحرك قيمة س على المنحنى من اليسار إلى اليمين، فتكون (٠، ٥) نقطة عظمى.

د تحتاج إلى أن تجد نقطة على المنحنى حيث تكون $\frac{ص}{س}$ قيمة صغرى.

أي أن ٣س^{٢} − ١٢س قيمة صغرى.

أكمل المربع لـ ٣س^{٢} − ١٢س:

٣(س^{٢} − ٤س)

= ٣((س − ٢)^{٢} − ٢^{٢})

= ٣((س − ٢)^{٢} − ٤)

= ٣(س − ٢)^{٢} − ١٢

أقل قيمة للعبارة ٣(س − ٢)^{٢} − ١٢ هي −١٢

عندما س = ٢ لأن ٣(س − ٢)^{٢} ⩾ ٠

عوّض بدل س = ٢ في معادلة المنحنى لتحصل على الإحداثي الصادي للنقطة:

أي أن ص = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٥ تصبح

ص = ٢^{٣} − ٦(٢)^{٢} + ٥ = −١١

أصغر قيمة للميل هي −١٢ عند النقطة (٢، −١١)

(١١) أ ص = أس + $\frac{ب}{س^{٢}}$

عوّض بدل س = ٢، ص = ١٢ لتحصل على:

١٢ = ٢أ + $\frac{ب}{٢^{٢}}$

٤٨ = ٨أ + ب ..... [١]

أعد كتابة ص = أس + $\frac{ب}{س^{٢}}$ في صورة

ص = أس + ب س$^{-٢}$، ثم أوجد المشتقة لتحصل على: $\frac{ص}{س}$ = أ − ٢ب س$^{-٣}$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ص}{س}$ = ٠

أ − $\frac{٢ب}{س^{٣}}$ = ٠

وبما أن النقطة الحرجة عند س = ٢

أ − $\frac{٢ب}{٢^{٣}}$ = ٠

أ = $\frac{٢ب}{٨}$، ب = ٤أ ..... [٢]

استخدم المعادلة [٢] وعوّض بدل ب في المعادلة [١] لتحصل على: ٤٨ = ٨أ + ٤أ

أ = ٤

عوّض بدل أ = ٤ في المعادلة [٢] لتحصل على

ب = ١٦

ب معادلة المنحنى ص = ٤س + $\frac{١٦}{س^{٢}}$

$\frac{ص}{س}$ = ٤ − $\frac{٣٢}{س^{٣}}$ = ٤ − ٣٢س$^{-٣}$

توجد طريقتان لتحديد نوع النقطة الحرجة عند س = ٢

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

أوجِد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ = ٩٦س$^{-٤}$ = $\frac{٩٦}{س^{٤}}$

عوّض بدل س = ٢ في $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ = $\frac{٩٦}{س^{٤}}$ لتحصل على:

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ = $\frac{٩٦}{٢^{٤}}$ = ٦ وهي قيمة موجبة لذا توجد قيمة صغرى عند س = ٢

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

ادرس ميل المنحنى على جانبَي النقطة س = ٢

عوّض بدل س = ١ في $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٣٢}{س^{٣}}$ − ٤

المعلم الإلكتروني الشامل

لتحصل على:

$\frac{ص}{س} = ٤ - \frac{٣٢}{س^{٣}} = -٢٨$ وهي قيمة سالبة.

عوّض بدل س = ٣ في $\frac{ص}{س} = ٤ - \frac{٣٢}{س^{٣}}$

لتحصل على: $\frac{ص}{س} = ٤ - \frac{٣٢}{٣^{٣}} = \frac{٧٦}{٢٧}$ وهي قيمة موجبة.

حيث إن إشارة ميل المنحنى تتغيّر من سالب إلى موجب عندما تتحرك النقطة س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة، توجد عند س = ٢ نقطة صغرى.

ج ص = ٤س + ١٦س$^{-٢}$

$\frac{ص}{س} = ٤ - ٣٢س^{-٣}$

$= ٤ - \frac{٣٢}{س^{٣}}$

تكون الدالة متزايدة عندما $\frac{ص}{س} > ٠$

$٤ - \frac{٣٢}{س^{٣}} > ٠$

$\frac{٣٢}{س^{٣}} < ٤$

$س^{٣} > ٨$

$س > ٢$

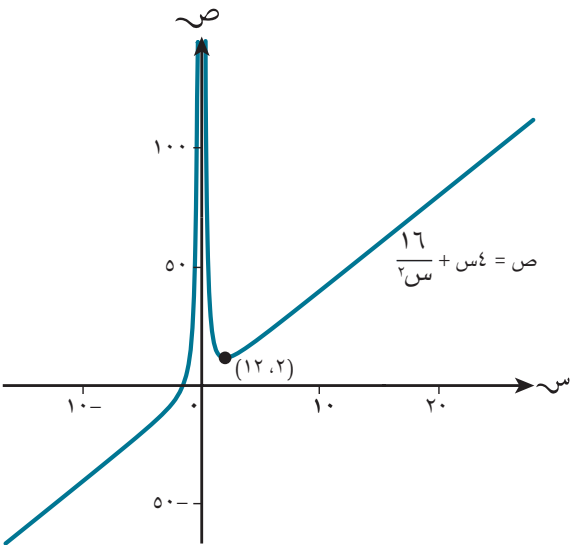
للمنحنى قيمة صغرى عند س = ٢ وخط تقارب رأسي (حيث تكون الدالة غير معرّفة) عند

س = ٠، ∴ هذه هي القيم الحرجة للدالة.

ونلاحظ من المنحنى أدناه أن $٤ - \frac{٣٢}{س^{٣}} > ٠$

عندما س < ٠

الدالة متزايدة عند س < ٠ أو س > ٢ كما هو موضّح في المنحنى أدناه:



١٢) أ لتكن الدالة ص = س^{٢} + $\frac{أ}{س}$ + ب

عوّض بدل س= ٣، ص = ٥ لتحصل على:

٥ = ٣^{٢} + $\frac{أ}{٣}$ + ب

١٥ = ٢٧ + أ + ٣ب

أ + ٣ب = -١٢ ..... [١]

أعد كتابة ص = س^{٢} + $\frac{أ}{س}$ + ب في صورة

ص = س^{٢} + أس$^{-١}$ + ب

فإن $\frac{ص}{س}$ = ٢س - أس$^{-٢}$ = ٢س - $\frac{أ}{س^{٢}}$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ص}{س} = ٠$

وعليه يكون ٢س - $\frac{أ}{س^{٢}}$ = ٠

عندما س = ٣ فإن ٢(٣) - $\frac{أ}{٢(٣)}$ = ٠

٦ - $\frac{أ}{٩}$ = ٠

أ = ٥٤

عوّض بدل أ = ٥٤ في المعادلة [١] لتحصل على:

أ + ٣ب = -١٢ ويكون ٥٤ + ٣ب = -١٢

ب = -٢٢

تصبح معادلة المنحنى ص = س^{٢} + $\frac{٥٤}{س}$ - ٢٢

المعلم الإلكتروني الشامل

ب توجد طريقتان لتحديد نوع النقطة الحرجة عند (٣، ٥):

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

أوجِد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٢س - أس^{-٢} = ٢س - ٥٤س^{-٢}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٢ + ١٠٨س^{-٣} = ٢ + \frac{١٠٨}{س^٣}$

عوّض بدل س = ٣ لتحصل على:

$٢ + \frac{١٠٨}{٣^٣} = ٦$ وهي قيمة موجبة.

فتكون (٣، ٥) نقطة صغرى.

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

ادرس ميل المنحنى على جانبَي النقطة (٣، ٥).

عوّض بدل س = ٢ في $\frac{دص}{دس} = ٢س - \frac{٥٤}{س^٢}$ لتحصل على:

$\frac{دص}{دس} = ٢(٢) - \frac{٥٤}{٢^٢} = -\frac{١٩}{٢}$ وهي قيمة سالبة.

عوّض بدل س = ٤ في $\frac{دص}{دس} = ٢س - \frac{٥٤}{س^٢}$ لتحصل على:

$\frac{دص}{دس} = ٢(٤) - \frac{٥٤}{٢^٢} = \frac{٣٧}{٨}$ وهي قيمة موجبة.

وحيث إن إشارة ميل المنحنى تتغيّر من سالبة إلى موجبة عندما تتحرك قيمة س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة، فتكون (٣، ٥) نقطة صغرى.

ج ص = $س^٢ + ٥٤س^{-١} - ٢٢$

$\frac{دص}{دس} = ٢س - \frac{٥٤}{س^٢}$

تكون الدالة متناقصة عندما $\frac{دص}{دس} < ٠$

$٢س - \frac{٥٤}{س^٢} < ٠$

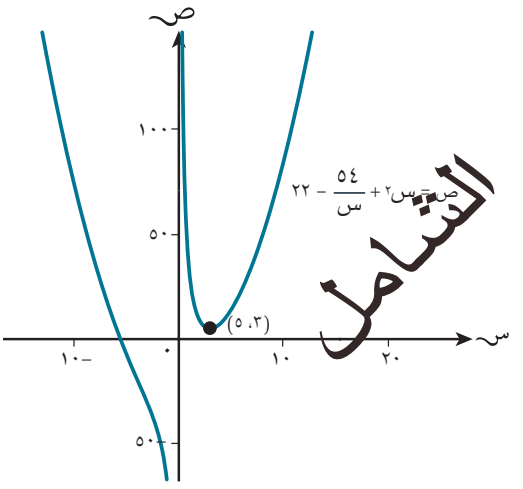
$\frac{٢س^٣ - ٥٤}{س^٢} < ٠$

$س^٣ < ٢٧$

$س < ٣$

للمنحنى قيمة صغرى عند س = ٣ وخط تقارب رأسي (حيث تكون الدالة غير معرّفة) عند س = ٠، ∴ هذه هي القيم الحرجة للدالة.

ونلاحظ من المنحنى أدناه أن $٢س - \frac{٥٤}{س^٢} < ٠$ عندما س < ٠ أو ٠ < س < ٣:



١٣) أ لتكن الدالة ص = $٢س^٣ + أس^٢ + بس + ٧$

عوّض بدل س = ٢، ص = -١٣ في الدالة لتحصل على:

$-١٣ = ٢ \times ٢^٣ + أ \times ٢^٢ + ب \times ٢ + ٧$

$-١٣ = ٢٣ + ٤أ + ٢ب$

$٤أ + ٢ب = -٣٦$ ..... [١]

بما أن ص = $٢س^٣ + أس^٢ + بس + ٧$

المعلم الإلكتروني الشامل

فإن $\frac{ص}{س} = ٦س^{٢} + ٢أس + ب$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ص}{س} = ٠$

فيكون $٦س^{٢} + ٢أس + ب = ٠$

عوّض بدل س = ٢ لتحصل على:

$٦ \times ٢^{٢} + ٢أ \times ٢ + ب = ٠$ ..... [٢]

$٤أ + ب = -٢٤$ ..... [٢]

اطرح المعادلة [٢] من المعادلة [١] لتحصل على: $ب = -١٢$

عوّض بدل ب في المعادلة [٢] لتحصل على:

$٤أ + (-١٢) = -٢٤$ ..... [٢]

$أ = -٣$

ب حل المعادلة $\frac{ص}{س} = ٠$ لتحصل على جميع النقاط الحرجة.

من الجزئية السابقة: $\frac{ص}{س} = ٦س^{٢} + ٢أس + ب$

حيث $أ = -٣$، $ب = -١٢$. فيكون

$\frac{ص}{س} = ٦س^{٢} - ٦س - ١٢$

فيكون $٦س^{٢} - ٦س - ١٢ = ٠$ أو $س^{٢} - س - ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$س = ٢$ (معطاة في السؤال)، أو $س = -١$

عوّض بدل $س = -١$ في معادلة المنحنى لتحصل على الإحداثي الصادي.

$ص = ٢س^{٣} + أس^{٢} + بس + ٧$

$ص = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ١٢س + ٧$

$ص = ٢(-١)^{٣} - ٣(-١)^{٢} - ١٢(-١) + ٧$

$ص = ١٤$

فتكون النقطة الحرجة الأخرى هي (-١، ١٤).

ج توجد طريقتان لتحديد نوع النقطة الحرجة:

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

أوجِد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$

$\frac{ص}{س} = ٦س^{٢} - ٦س - ١٢$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ١٢س - ٦$

عوّض بدل س = ٢ لتجد أن $١٢ \times ٢ - ٦ = ١٨$ وهي قيمة موجبة، فتكون (٢، -١٣) نقطة صغرى.

عوّض بدل $س = -١$ لتجد أن $١٢ \times ٢ - ٦ = -١٨$ وهي قيمة سالبة، فتكون (-١، ١٤) نقطة عظمى.

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

الآن ادرس ميل المنحنى على جانبَي النقطة (٢، -١٣):

عوّض بدل س = ١ في $\frac{ص}{س} = ٦س^{٢} - ٦س - ١٢$

لتحصل على: $\frac{ص}{س} = ٦(١)^{٢} - ٦(١) - ١٢ = -١٢$

وهي قيمة سالبة.

عوّض بدل س = ٣ في $\frac{ص}{س} = ٦س^{٢} - ٦س - ١٢$

لتحصل على: $\frac{ص}{س} = ٦(٣)^{٢} - ٦(٣) - ١٢ = ٢٤$

وهي قيمة موجبة.

وحيث إنه تتغير إشارة ميل المنحنى من سالبة إلى موجبة عندما تتحرك قيم س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة، فإن (٢، -١٣) هي نقطة صغرى.

الآن ادرس ميل المنحنى على جانبَي النقطة (-١، ١٤):

عوّض بدل $س = -٢$ في

$\frac{ص}{س} = ٦س^{٢} - ٦س - ١٢$ لتحصل على:

المعلم الإلكتروني الشامل

$\frac{ص}{س} = ٦(-٢)^{٢} - ٦(-٢) - ١٢ = ٢٤$ وهي قيمة موجبة.

عوّض بدل س = ٠ في $\frac{ص}{س} = ٦س^{٢} - ٦س - ١٢$ لتحصل على:

$\frac{ص}{س} = ٦(٠)^{٢} - ٦(٠) - ١٢ = -١٢$ وهي قيمة سالبة.

وحيث إن إشارة ميل المنحنى تتغير من موجبة إلى سالبة عندما تتحرك قيم س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة، فإن (-١، ١٤) هي نقطة عظمى.

د تحتاج أن تجد أين تكون

$\frac{ص}{س} = ٦س^{٢} - ٦س - ١٢$ نقطة صغرى.

أكمل المربع لتحصل على:

$= ٦(س^{٢} - س) - ١٢$

$= ٦\left((س - \frac{١}{٢})^{٢} - \frac{١}{٤}\right) - ١٢$

$= ٦(س - \frac{١}{٢})^{٢} - ١٣,٥$

أقل قيمة للعبارة $٦(س - \frac{١}{٢})^{٢} - ١٣,٥$ هي $-١٣,٥$

ويكون ذلك عندما س = $\frac{١}{٢}$ لأن $٦(س - \frac{١}{٢})^{٢} \geq ٠$

عوّض بدل س = $\frac{١}{٢}$ في معادلة المنحنى لتحصل على الإحداثي الصادي

$ص = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ١٢س + ٧$

$ص = ٢(\frac{١}{٢})^{٣} - ٣(\frac{١}{٢})^{٢} - ١٢(\frac{١}{٢}) + ٧$

ص = $\frac{١}{٢}$

النقطة على المنحنى التي يكون عندها أصغر قيمة للميل هي $(\frac{١}{٢}، \frac{١}{٢})$ ومقدارها $-١٣,٥$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الرابعة

١) لتكن ص = $\frac{٣س^{٥} - ٧}{٤س}$

أعد كتابة الدالة في صورة ص = $\frac{٣}{٤}س^{٤} - \frac{٧}{٤}س^{-١}$

أوجد مشتقة الدالة لتحصل على:

$\frac{ص}{س} = ٣س^{٣} + \frac{٧}{٤}س^{-٢}$

$\frac{ص}{س} = ٣س^{٣} + \frac{٧}{٤س^{٢}}$

٢) ص = $\frac{٨}{٤س - ٥}$

أعد كتابة الدالة في صورة ص = $٨(٤س - ٥)^{-١}$

استخدم قاعدة السلسلة:

افترض أن ع = ٤س - ٥ فيكون ص = $٨ع^{-١}$

$\frac{ع}{س} = ٤$، $\frac{ص}{ع} = -٨ع^{-٢}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

$= -٨ع^{-٢} \times ٤$

$= -٣٢ع^{-٢}$

$= -\frac{٣٢}{(٤س - ٥)^{٢}}$ يمكن حلّها ذهنيًا

ميل المماس عند س = ٢ هو:

$-\frac{٣٢}{(٨ - ٥)^{٢}} = -٣\frac{٥}{٩}$

٣) ص = $٣س^{٣} - ٣س^{٢} + س - ٧$

$\frac{ص}{س} = ٩س^{٢} - ٦س + ١$

$= (٣س - ١)^{٢}$

وهذه القيمة دائمًا موجبة.

المعلم الإلكتروني الشامل