تمارين ٤-٥

١) أ) د(س) = س^{٢} − ٨س + ٢

د′(س) = ٢س − ٨

د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

٢س − ٨ > ٠

س > ٤

ب) د(س) = ٢س^{٢} − ٤س + ٧

د′(س) = ٤س − ٤

د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

٤س − ٤ > ٠

س > ١

ج) د(س) = ٥ − ٧س − ٢س^{٢}

د′(س) = −٧ − ٤س

د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

−٧ − ٤س > ٠

س < $-\frac{٧}{٤}$ أو س < −١,٧٥

د) د(س) = س^{٣} − ١٢س^{٢} + ٢

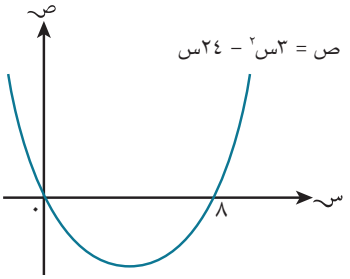
د′(س) = ٣س^{٢} − ٢٤س

د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

٣س^{٢} − ٢٤س > ٠

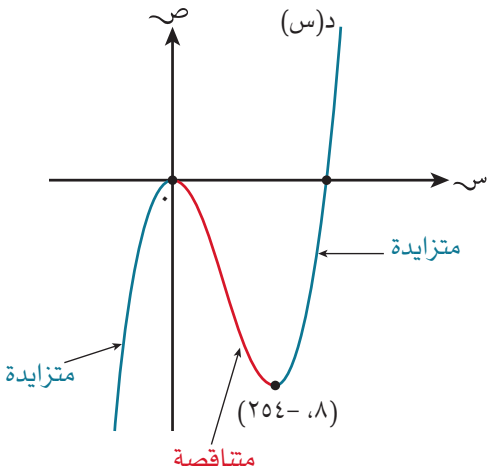
س (٣س − ٢٤) > ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = ٠، س = ٨



د(س) متزايدة على الفترة س < ٠ أو س > ٨

كما هو موضّح في التمثيل البياني للدالة د(س):



هـ) د(س) = ٢س^{٣} − ١٥س^{٢} + ٢٤س + ٦

د′(س) = ٦س^{٢} − ٣٠س + ٢٤

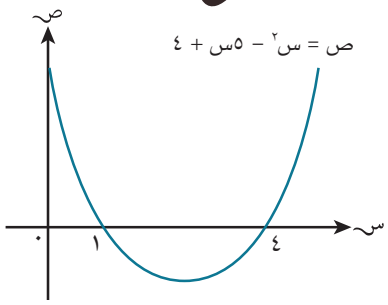
د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

٦س^{٢} − ٣٠س + ٢٤ > ٠

س^{٢} − ٥س + ٤ > ٠

(س − ١)(س − ٤) > ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = ١، س = ٤:



د(س) متزايدة على الفترة س < ١ أو س > ٤

و) د(س) = ١٦ + ١٦س − س^{٢} − س^{٣}

د′(س) = ١٦ − ٢س − ٣س^{٢}

المعلم الإلكتروني الشامل

د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

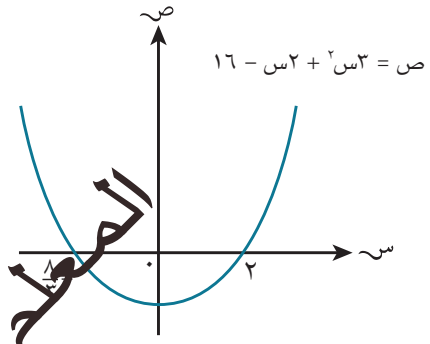
١٦ − ٢س − ٣س٢ < ٠

اضرب في −١ واقلب رمز المتباينة.

٣س٢ + ٢س − ١٦ > ٠

(٣س + ٨)(س − ٢) > ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = −٨/٣، س = ٢:



د(س) دالة متزايدة على الفترة −٨/٣ > س > ٢

٢) أ) د(س) = ٣س٢ − ٨س + ٢

د′(س) = ٦س − ٨

د(س) دالة متناقصة عندما د′(س) > ٠

٦س − ٨ > ٠

س > ٤/٣

ب) د(س) = ١٠ + ٩س − س٢

د′(س) = ٩ − ٢س

د(س) دالة متناقصة عندما د′(س) > ٠

٩ − ٢س > ٠

س < ٩/٢

ج) د(س) = ٢س٣ − ٢١س٢ + ٦٠س − ٥

د′(س) = ٦س٢ − ٤٢س + ٦٠

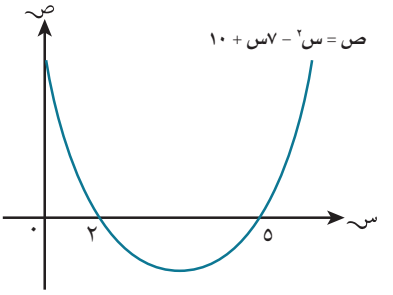
د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

٦س٢ − ٤٢س + ٦٠ > ٠

س٢ − ٧س + ١٠ > ٠

(س − ٢)(س − ٥) > ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = ٢، س = ٥:



د(س) دالة متناقصة على الفترة ٢ > س > ٥

د) د(س) = س٣ − ٣س٢ − ٩س + ٥

د′(س) = ٣س٢ − ٦س − ٩

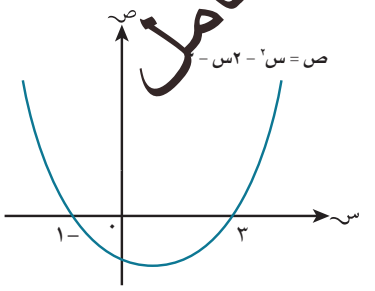
د(س) دالة متناقصة عندما د′(س) > ٠

٣س٢ − ٦س − ٩ > ٠

س٢ − ٢س − ٣ > ٠

(س + ١)(س − ٣) > ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = −١، س = ٣:



د(س) دالة متناقصة على الفترة −١ > س > ٣

هـ) د(س) = −٤٠س + ١٣س٢ − س٣

د′(س) = −٤٠ + ٢٦س − ٣س٢

د(س) دالة متناقصة عندما د′(س) > ٠

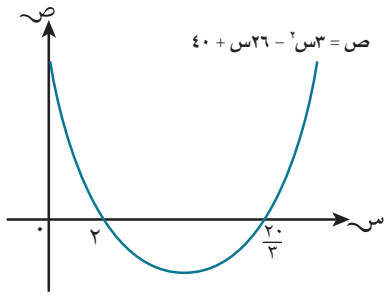
−٤٠ + ٢٦س − ٣س٢ > ٠

المعلم الإلكتروني الشامل

$٣س^{٢} - ٢٦س + ٤٠ < ٠$

$(س - ٢)(٣س - ٢٠) < ٠$

توجد النقاط الحرجة عند س = ٢، س = $\frac{٢٠}{٣}$:



د(س) دالة متناقصة على الفترات

$س > ٢$ أو $س < \frac{٢٠}{٣}$

و) د(س) = ١١ + ٢٤س - ٣س^{٢} - س^{٣}

د′(س) = ٢٤ - ٦س - ٣س^{٢}

د(س) دالة متناقصة عندما د′(س) < ٠

$٢٤ - ٦س - ٣س^{٢} > ٠$

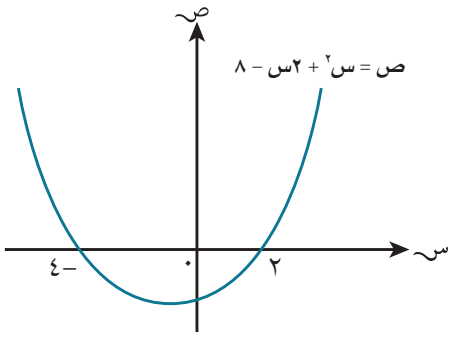
اضرب في -١ واقلب رمز المتباينة.

$٣س^{٢} + ٦س - ٢٤ < ٠$

$س^{٢} + ٢س - ٨ < ٠$

$(س + ٤)(س - ٢) < ٠$

توجد النقاط الحرجة عند س = -٤، س = ٢:



د(س) دالة متناقصة على الفترات

$س > -٤$ أو $س < ٢$

٣) د(س) = $\frac{١}{٦}$ (٥ - ٢س)^{٣} + ٤س

أوجِد د′(س) (استخدم قاعدة السلسلة لتشتق الحد الأول)

د′(س) = $\frac{١}{٢}$ (٥ - ٢س)^{٣} × (-٢) + ٤

= - (٥ - ٢س)^{٢} + ٤

= ٤ - (٥ - ٢س)^{٢}

لتكون الدالة متزايدة فإن د′(س) > ٠

أي أن ٤ - (٥ - ٢س)^{٢} < ٠

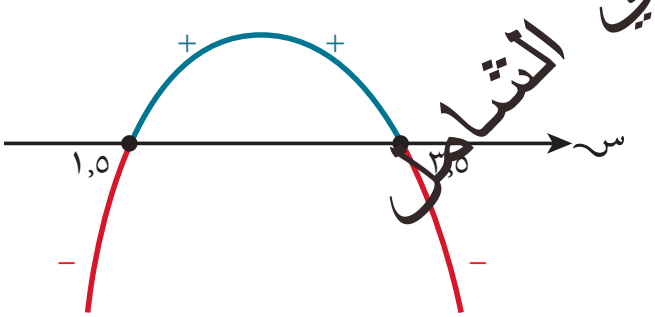
أوجِد النقاط الحرجة معتمدًا على ٤ - (٥ - ٢س)^{٢} = ٠

٥ - ٢س = ±٢

إذا كان ٥ - ٢س = ٢ فإن س = ١,٥

إذا كان ٥ - ٢س = -٢ فإن س = ٣,٥

توجد النقاط الحرجة عند س = ١,٥، س = ٣,٥



نريد أن يكون ٤ - (٥ - ٢س)^{٢} < ٠ وهو يمثل جزء التمثيل البياني حيث د′(س) < ٠ أي جزء التمثيل الذي فوق محور السينات.

وعليه يكون ١,٥ < س < ٣,٥

المعلم الإلكتروني الشامل

٤) $د(س) = \frac{٤}{١ - ٢س}$ ، $س \leq ١$

$= ٤(١ - ٢س)^{-١}$

$د'(س) = \frac{٨}{(١ - ٢س)^{٢}}$

وحيث إن المجال هو $س \leq ١$ فتكون $(١ - ٢س)^{٢}$

موجبة لجميع قيم س في المجال.

لذا $د'(س) > ٠$ لجميع قيم س في مجال د(س).

د دالة متزايدة.

٥) $د(س) = \frac{٥}{(س + ٢)^{٢}} - \frac{٢}{س + ٢}$، $س \leq ٠$

$د(س) = ٥(س + ٢)^{-٢} - ٢(س + ٢)^{-١}$

$د'(س) = ١٠(س + ٢)^{-٣} \times ١ + ٢(س + ٢)^{-٢} \times ١$

$د'(س) = \frac{-١٠}{(س + ٢)^{٣}} + \frac{٢}{(س + ٢)^{٢}}$

اجمع الكسرَين لتحصل على:

$د'(س) = \frac{-١٠}{(س + ٢)^{٣}} + \frac{٢(س + ٢)}{(س + ٢)^{٣}}$

$د'(س) = \frac{٦ - ٢س}{(س + ٢)^{٣}}$

حل المعادلة $٦ - ٢س = ٠$ لتجد النقاط الحرجة.

$س = ٣$ (عندها فقط نقطة حرجة)

عوّض بدل $س = ٢$ في

$د'(س) = \frac{٦ - ٢س}{(س + ٢)^{٣}}$ لتجد:

$د'(٢) = \frac{٦ - (٢)٢}{(٢ + ٢)^{٣}} = -\frac{١}{٣٢}$

الدالة هنا متناقصة.

عوّض بدل $س = ٤$ في

$د'(٤) = \frac{٦ - (٤)٢}{(٤ + ٢)^{٣}} = \frac{١}{١٠٨}$

الدالة هنا متزايدة.

∴ الدالة متناقصة في الفترة $٠ < س < ٣$

ومتزايدة في الفترة $س > ٣$

٦) $د(س) = (٢س + ٥)^{٢} - ٣$، $س \leq ٠$

$د'(س) = ٢(٢س + ٥) \times ٢$

$د'(س) = ٨س + ٢٠$

∴ د (س) دالة متزايدة لأن $٨س + ٢٠ \leq ٠$ لكل $س \leq ٠$

٧) لتكن $د(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س}$

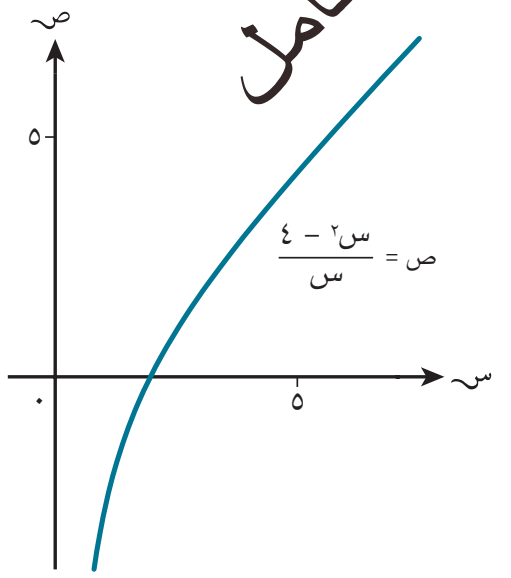
أعد كتابة الدالة في صورة $د(س) = س - ٤س^{-١}$

$د'(س) = ١ + ٤س^{-٢}$

أو $د'(س) = ١ + \frac{٤}{س^{٢}}$

لأي قيم س في مجال الدالة تكون $س^{٢}$ دائمًا موجبة.

وهكذا تكون $د'(س)$ دائمًا موجبة، وبالتالي فإن د(س) دالة متزايدة.



يبيّن التمثيل أن د (س) دالة متزايدة على مجالها.

المعلم الإلكتروني الشامل

٨) د(س) = $\frac{٢}{س^{٤}}$ − س^{٢}، حيث س > ٠

د(س) = ٢س$^{-٤}$ − س^{٢}

د′(س) = −٨س$^{-٥}$ − ٢س

د′(س) = $\frac{-٨}{س^{٥}}$ − $\frac{٢س^{٦}}{س^{٥}}$

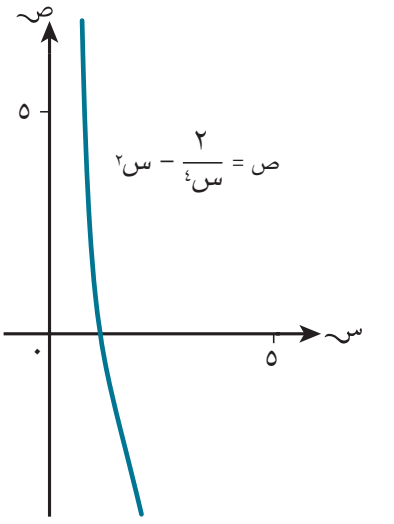
د′(س) = $\frac{-٨ - ٢س^{٦}}{س^{٥}}$

د′(س) = − $\frac{(٨ + ٢س^{٦})}{س^{٥}}$

عندما يكون س > ٠ أي س موجبة فإن

د′(س) = − $\frac{\text{موجب}}{\text{موجب}}$ أي أنها سالبة

∴ الدالة متناقصة لقيم س > ٠



٩) ح(س) = ٢س^{٣} − ٨١س^{٢} + ٨٤٠س

ح(س) = ٢س^{٣} − ٨١س^{٢} + ٨٤٠س حيث تكون

ح(س) متناقصة فإننا نحتاج إلى أن نحل ح′(س) < ٠

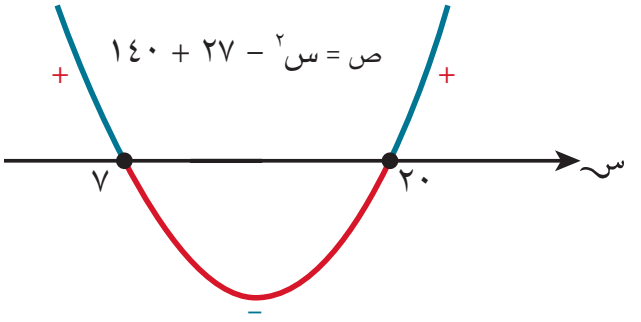
ح′(س) = ٦س^{٢} − ١٦٢س + ٨٤٠ > ٠

ح′(س) = س^{٢} − ٢٧س + ١٤٠ > ٠

(س − ٢٠)(س − ٧) > ٠

توجد نقاط حرجة لقيم س التي تمثل حلًا للمعادلة

س^{٢} − ٢٧س + ١٤٠ = ٠



مجال تناقص دالة الربح هو ٧ < س < ٢٠

الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٧، ٢٠

المعلم الإلكتروني الشامل