$= \frac{١}{٢\sqrt{\frac{٨}{٨١}}}$

$= \frac{٩}{٢\sqrt{٨}}$

$= \frac{٩}{٤\sqrt{٢}}$

$= \frac{٩}{٨}\sqrt{٢}$

$= \frac{٩}{٨}\sqrt{٢} =$ ك$\sqrt{٢}$

$\therefore$ ك $= \frac{٩}{٨} = ١,١٢٥$

تمارين ٤-٤

١) أ ص = س^{٢} − ٣س + ٢

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢س − ٣

عندما س = ٣، فإن الميل = ٢ × ٣ − ٣ = ٣

معادلة المماس عند النقطة (٣، ٢) هي ص − ٢ = ٣(س − ٣)

المعادلة هي ص = ٣س − ٧

ب ص = (٢س − ٥)^{٤}

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤(٢س − ٥)^{٣} × ٢ = ٨(٢س − ٥)^{٣}

عندما س = ٢، فإن الميل = ٨(٤ − ٥)^{٣} = −٨

معادلة المماس عند النقطة (٢، ١) هي ص − ١ = −٨(س − ٢)

المعادلة هي ص = ١٧ − ٨س

ج ص = $\frac{\text{س}^{٣} - ٥}{\text{س}}$ = س − ٥س$^{-١}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢س + $\frac{٥}{\text{س}^{٢}}$

عند س = −١، فإن الميل يساوي ٢(−١) + $\frac{٥}{(-١)^{٢}}$ = ٣

معادلة المماس عند النقطة (−١، ٦) هي ص − ٦ = ٣(س + ١)

المعادلة هي ص = ٣س + ٩

د ص = ٢$\sqrt{\text{س} - ٥}$ = ٢(س − ٥)$^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ × $\frac{١}{٢}$ (س − ٥)$^{-\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$

عندما س = ٩، فإن الميل = $\frac{١}{\sqrt{٤}} = \frac{١}{٢}$

معادلة المماس عند النقطة (٩، ٤) هي ص − ٤ = $\frac{١}{٢}$(س − ٩)

المعادلة هي ص = $\frac{١}{٢}$س − $\frac{١}{٢}$ أو ٢ص = س − ١

٢) أ $٣\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٩\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٤$

عندما س = ٠، فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٤$

ويكون ميل العمودي $\frac{١}{٤}$

معادلة العمودي المار في (٠، ١) هي

$\text{ص} - ١ = \frac{١}{٤}(\text{س} - ٠)$

المعادلة هي ٤ص = س + ٤

ب $\text{ص} = \frac{٣}{\sqrt[٣]{\text{س} + ١}} = ٣(\text{س} + ١)^{-\frac{١}{٣}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣(-\frac{١}{٣})(\text{س} + ١)^{-\frac{٤}{٣}} = -\frac{١}{\sqrt[٣]{(\text{س} + ١)^{٤}}}$

عندما س = −٢، فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\sqrt[٣]{-١}} = -١$

ميل العمودي ١ معادلة العمودي المار في

(−٢، −٣) هي ص + ٣ = ١ (س + ٢)

بإضافة −٣ إلى الطرفين

المعادلة هي ص = س − ١

ج $\text{ص} = (٥ - ٢\text{س})^{٣}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣(٥ - ٢\text{س})^{٣}(-٢) = -٦(٥ - ٢\text{س})^{٢}$

عندما س = ٣، فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٦(-١)^{٢} = -٦$

ميل العمودي $\frac{١}{٦}$

معادلة العمودي المار في (٣، −١) هي

$\text{ص} + ١ = \frac{١}{٦}(\text{س} - ٣)$

المعادلة هي ٦ص = س − ٩

د $\text{ص} = \frac{٢٠}{\text{س}^{٢} + ١} = ٢٠(\text{س}^{٢} + ١)^{-١}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢٠(-٢)(\text{س}^{٢} + ١)^{-٢} \times ٢\text{س}$

$= \frac{٤٠\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}$

عندما س = ٣، فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١٢٠}{(٩ + ١)^{٢}} = -\frac{٦}{٥}$

ميل العمودي $\frac{٥}{٦}$

معادلة العمودي المار في (٣، ٢) هي

$\text{ص} - ٢ = \frac{٥}{٦}(\text{س} - ٣)$

المعادلة هي ٦ص = ٥س − ٣

٣) أ $\text{ص} = \frac{٨}{(\text{س} + ٢)^{٢}}$

أعد كتابة المعادلة في صورة $٨(\text{س} + ٢)^{-٢}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن ع = س + ٢ فيكون $\text{ص} = ٨\text{ع}^{-٢}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ١$ و $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -١٦\text{ع}^{-٣}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

$= -١٦\text{ع}^{-٣} \times ١$

$= -\frac{١٦}{(\text{س} + ٢)^{٣}}$

عندما س = ٢ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{١٦}{(٢ + ٢)^{٣}} = -\frac{١}{٤}$

يمر المماس في $(٢، \frac{١}{٢})$ وميله

$\text{م} = -\frac{١}{٤}$ استخدم الصيغة $\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{١})$

$\text{ص} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٤}(\text{س} - ٢)$

٤ص − ٢ = −س + ٢

س + ٤ص = ٤

ب يمر العمودي في $(٢، \frac{١}{٢})$ وميله $-\frac{١}{-\frac{١}{٤}} = ٤$

استخدم الصيغة $\text{ص} - \text{ص}_{١} = -\frac{١}{\text{م}}(\text{س} - \text{س}_{١})$

فتكون: $\text{ص} - \frac{١}{٢} = ٤\,(\text{س} - ٢)$

٢ص − ١ = ٨س − ١٦

٢ص = ٨س − ١٥

ص = ٤س − ٧,٥

٤) أ ص = ٥ − ٣س − ٢س^{٢}

$\frac{دص}{دس}$ = −٣ − ٤س

عندما س = −٢، فإن ميل المماس للمنحنى:

= −٣ − ٤(−٢) أو ٥

ميل المماس للمنحنى م = ٥

يمر العمودي في (−٢، ٣) وميله:

$-\frac{١}{م} = -\frac{١}{٥}$

استخدم الصيغة ص − ص$_{١}$ = $-\frac{١}{م}$ (س − س$_{١}$)

فتكون:

ص − ٣ = $-\frac{١}{٥}$ (س − (−٢))

ص − ٣ = $-\frac{١}{٥}$ س − $\frac{٢}{٥}$

٥ص − ١٥ = −س − ٢

س + ٥ص = ١٣

ب معادلة العمودي هي ص = $-\frac{١}{٥}$ س + $\frac{١٣}{٥}$

معادلة المنحنى هي ص = ٥ − ٣س − ٢س^{٢}، حل المعادلتين ينتج:

$-\frac{١}{٥}$ س + $\frac{١٣}{٥}$ = ٥ − ٣س − ٢س^{٢}

−س + ١٣ = ٢٥ − ١٥س − ١٠س^{٢}

١٠س^{٢} + ١٤س − ١٢ = ٠

٥س^{٢} + ٧س − ٦ = ٠

لا تقضِ وقتًا طويلًا في محاولة التحليل إلى العوامل، لذا استخدم الصيغة التربيعية.

استخدم الصيغة التربيعية:

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

حيث أ = ٥، ب = ٧، جـ = −٦

س = $\frac{-٧ \pm \sqrt{٧^{٢} - ٤(٥)(-٦)}}{٢(٥)}$

س = $\frac{-٧ \pm \sqrt{١٦٩}}{١٠}$

س = ٠٫٦ أو س = −٢ (هذه القيمة معطاة)

عوّض بدل س = ٠٫٦ في المعادلة الخطيّة

ص = $-\frac{١}{٥}$ س + $\frac{١٣}{٥}$ لتحصل على:

ص = $-\frac{١}{٥}$ (٠٫٦) + $\frac{١٣}{٥}$

ص = ٢٫٤٨

فتكون إحداثيات النقطة الجديدة (٠٫٦، ٢٫٤٨)

٥) ص = س^{٣} − ٥س + ٣

اشتق المعادلة تحصل على:

$\frac{دص}{دس}$ = ٣س^{٢} − ٥

عندما س = −١، فإن ميل مماس المنحنى:

= ٣ (−١)^{٢} − ٥ = −٢

ميل المماس م = −٢

يمر العمودي في (−١، ٧) وميله $-\frac{١}{م} = -\frac{١}{-٢} = \frac{١}{٢}$

استخدم الصيغة ص − ص$_{١}$ = $-\frac{١}{م}$ (س − س$_{١}$)

فتكون:

ص − ٧ = $\frac{١}{٢}$ (س − (−١))

ص − ٧ = $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$

٢ص − ١٤ = س + ١

٢ص = س + ١٥

يقطع العمودي محور الصادات بالنقطة **ل** حيث س = ٠

فيكون، ٢ص = ٠ + ١٥

ص = ٧٫٥

وعليه **ل**(٠، ٧٫٥)

٦) ص = ٥ − ٣س − س^{٢}

$\frac{دص}{دس}$ = −٣ − ٢س

عندما س= −١، فإن ميل المماس للمنحنى

= −٣ − ٢(−١) = −١

استخدم الصيغة $ص - ص_1 = م\,(س - س_1)$ لتجد معادلة المماس

$ص - ٧ = -١$

$ص - ٧ = -س - ١$

$ص = ٦ - س$ .... [١]

عندما س= −٤، فإن ميل المماس للمنحنى

$= -٣ - ٢(-٤) = ٥$

أوجِد معادلة المماس باستخدام الصيغة:

$ص - ص_1 = م\,(س - س_1)$

$ص - ١ = ٥\,(س - (-٤))$

$ص - ١ = ٥س + ٢٠$

$ص = ٥س + ٢١$ .... [٢]

حل المعادلتَين [١]، [٢] آنيًا لتحصل على:

ص٦ − س = ٥س + ٢١

٦س = −١٥

س = −٢,٥

عوّض بدل س = −٢,٥ في المعادلة (١) لتحصل على:

ص = ٦ − (−٢,٥)

ص = ٨,٥

إحداثيات النقطة **ل** (−٢,٥، ٨,٥).

٧) أ $ص = ٤ - ٢\sqrt{س}$

أعد كتابة الدالة في صورة $ص = ٤ - ٢س^{\frac{١}{٢}}$

أوجد مشتقة الدالة:

$\frac{ءص}{ءس} = -س^{-\frac{١}{٢}}$

عندما س = ١٦، فإن ميل المماس للمنحنى:

$م = -١٦^{-\frac{١}{٢}} = -\frac{١}{٤}$

يمر العمودي بالنقطة (١٦، − ٤) وميله

$-\frac{١}{م} = -\frac{١}{-\frac{١}{٤}} = ٤$

استخدم الصيغة $ص - ص_1 = -\frac{١}{م}\,(س - س_1)$

فتكون:

$ص - (-٤) = ٤\,(س - ١٦)$

$ص + ٤ = ٤س - ٦٤$

$ص = ٤س - ٦٨$

ب الإحداثي الصادي لنقاط محور السينات ص = ٠

وحيث إن العمودي يقطع محور السينات:

$٤س - ٦٨ = ٠$

س = ١٧، أي أن النقطة **ن** (١٧، ٠)

٨) أ معادلة المنحنى $ص = ٢س - \frac{١٠}{س^٢} + ٨$

أعد كتابة المعادلة في صورة

$ص = ٢س - ١٠س^{-٢} + ٨$

أوجد مشتقة الدالة:

$\frac{ءص}{ءس} = ٢ + ٢٠س^{-٣}$ أو $\frac{ءص}{ءس} = ٢ + \frac{٢٠}{س^٣}$

ب ميل مماس المنحنى عند النقطة حيث س = −٤ هو:

$٢ + \frac{٢٠}{(-٤)^٣}$ أو $\frac{٢٧}{١٦}$ لذا $م = \frac{٢٧}{١٦}$

ميل العمودي للمنحنى عند النقطة $(-٤، -\frac{٥}{٨})$ هو

$-\frac{١}{م} = -\frac{١}{\frac{٢٧}{١٦}} = -\frac{١٦}{٢٧}$

استخدم الصيغة $ص - ص_1 = -\frac{١}{م}\,(س - س_1)$

$ص - -\frac{٥}{٨} = -\frac{١٦}{٢٧}\,(س - (-٤))$

$ص + \frac{٥}{٨} = -\frac{١٦}{٢٧}\,(س - ٤)$

يتقاطع العمودي مع محور الصادات عندما س = ٠

عوض بدل س لتحصل على:

$ص + \frac{٥}{٨} = -\frac{١٦}{٢٧}\,(٠ + ٤)$

$ص = -\frac{٦٤}{٢٧} - \frac{٥}{٨}$

$ص = -\frac{٦٤٧}{٢١٦}$

لذا، يتقاطع العمودي مع محور الصادات على المنحنى في النقطة $\left(٠، -\frac{٦٤٧}{٢١٦}\right)$

٩) $\text{ص} = \frac{٦}{\sqrt{\text{س} - ٢}}$

أعد كتابة المعادلة في صورة ص = ٦(س − ٢)$^{-\frac{١}{٢}}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد مشتقة الدالة:

افترض أن ع = س − ٢ فيكون ص = ص = ٦ع$^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ١$ و $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = -٣\text{ع}^{-\frac{٣}{٢}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٣\text{ع}^{-\frac{٣}{٢}} \times ١$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{٣}{(\text{س} - ٢)^{\frac{٣}{٢}}}$

ميل المماس عند النقطة حيث س = ٣:

$= -\frac{٣}{(٣ - ٢)^{\frac{٣}{٢}}}$

م = −٣

ميل العمودي عند النقطة (٣، ٦) هو:

$-\frac{١}{\text{م}} = -\frac{١}{-٣}$ أو $\frac{١}{٣}$

أوجِد معادلة العمودي عند هذه النقطة باستخدام الصيغة: $\text{ص} - \text{ص}_١ = -\frac{١}{\text{م}} (\text{س} - \text{س}_١)$

$\text{ص} - ٦ = \frac{١}{٣} (\text{س} - ٣)$

٣ص − ١٨ = س − ٣

٣ص = س + ١٥

يتقاطع العمودي مع محور السينات في النقطة **ل** حيث ص = ٠

فيكون ٠ = س + ١٥

س = −١٥

إحداثيات **ل** (−١٥، ٠).

يتقاطع العمودي مع محور الصادات في النقطة **ن** حيث س = ٠

فيكون ٣ص = ٠ + ١٥

ص = ٥

إحداثيات **ن** (٠، ٥).

نقطة منتصف **ل ن** هي $\left(\frac{-١٥ + ٠}{٢}، \frac{٠ + ٥}{٢}\right)$

أو (−٧,٥، ٢,٥)

١٠) ص = س^٥ − ٨س^٣ + ١٦س

أوجد مشتقة المعادلة لتحصل على:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥\text{س}^٤ - ٢٤\text{س}^٢ + ١٦$

عندما س = ١، فإن ميل المنحنى:

= ٥(١)^٤ − ٢٤(١)^٢ + ١٦ أو −٣

يمر العمودي بالنقطة (١، ٩)

ميل العمودي $= -\frac{١}{\text{م}} = -\frac{١}{-٣} = \frac{١}{٣}$

أوجِد معادلة العمودي المار بالنقطة **ل** (١، ٩) باستخدام الصيغة:

$\text{ص} - \text{ص}_١ = -\frac{١}{\text{م}} (\text{س} - \text{س}_١)$

$\text{ص} - ٩ = \frac{١}{٣} (\text{س} - ١)$

$\text{ص} - ٩ = \frac{١}{٣}\text{س} - \frac{١}{٣}$

$\text{ص} = \frac{١}{٣}\text{س} + \frac{٢٦}{٣}$ .... [١]

عندما س = −١، فإن ميل المنحنى:

= ٥(−١)^٤ − ٢٤(−١)^٢ + ١٦ = −٣

أوجِد معادلة المماس المار بالنقطة **ن** (−١، −٩) باستخدام الصيغة:

$\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م} (\text{س} - \text{س}_١)$

ص − (−٩) = −٣ (س − (−١))

ص + ٩ = −٣س − ٣

$ص = -٣س - ١٢$ .... [٢]

حل المعادلتَين [١]، [٢] آنيًا لتجد إحداثيات النقطة ر:

$$\frac{١}{٣}س + \frac{٢٦}{٣} = -٣س - ١٢$$

$$س + ٢٦ = -٩س - ٣٦$$

$$١٠س = -٦٢$$

$$س = -٦{,}٢$$

عوّض بدل س= −٦,٢ في المعادلة [٢] لتحصل على:

$$ص = -٣ \times -٦{,}٢ - ١٢$$

$$ص = ٦{,}٦$$

إحداثيات ر (−٦,٢، ٦,٦)

١١) $ص = ٢(\sqrt{س} - ١)^٢ = ٢$

أعد كتابة المعادلة في صورة

$$ص = ٢(س^{\frac{١}{٢}} - ١)^٢ + ٢$$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد مشتقة الدالة:

افترض أن $ع = س^{\frac{١}{٢}} - ١$، فيكون $ص = ٢ع^٣ + ٢$

$$\frac{دع}{دس} = \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} \quad ، \quad \frac{دص}{دع} = ٦ع^٢$$

استخدم قاعدة السلسلة

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$

$$= ٦ع^٢ \times \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}}$$

$$= \frac{٣(س^{\frac{١}{٢}} - ١)^٢}{س^{\frac{١}{٢}}}$$

عندما س = ٤ فإن ميل المنحنى:

$$= \frac{٣(٤^{\frac{١}{٢}} - ١)^٢}{٤^{\frac{١}{٢}}} \text{ أو } \frac{٣}{٢}$$

فيكون، $م = \frac{٣}{٢}$

يمر العمودي بالنقطة (٤، ٤)

وميله $= -\frac{١}{م}$ أو $-\frac{١}{\frac{٣}{٢}}$ أو $-\frac{٢}{٣}$

أوجِد معادلة العمودي عند النقطة (٤، ٤) باستخدام الصيغة:

$$ص - ص_١ = -\frac{١}{م}(س - س_١)$$

$$ص - ٤ = \frac{٢}{٣}(س - ٤)$$

$$ص - ٤ = -\frac{٢}{٣}س + \frac{٨}{٣}$$

$ص = -\frac{٢}{٣}س + \frac{٢٠}{٣}$ .... [١]

عندما س = ٩ يكون ميل المنحنى:

$$= \frac{٣(٩^{\frac{١}{٢}} - ١)^٢}{٩^{\frac{١}{٢}}} \text{ أو } ٤$$

وعليه م = ٤

يمر العمودي بالنقطة (٩، ١٨) وميله $= -\frac{١}{م} = -\frac{١}{٤}$

أوجِد معادلة العمودي المار بالنقطة ل (٩، ١٨) باستخدام الصيغة:

$$ص - ص_١ = م(س - س_١)$$

$$ص - ١٨ = -\frac{١}{٤}س + \frac{٩}{٤}$$

$ص = -\frac{١}{٤}س + \frac{٨١}{٤}$ .... [٢]

حل المعادلتين [١]، [٢] آنيًا لتجد إحداثيات النقطة ر:

$$-\frac{٢}{٣}س + \frac{٢٠}{٣} = -\frac{١}{٤}س + \frac{٨١}{٤}$$

$$-٨س + ٨٠ = -٣س + ٢٤٣$$

$$٥س = -١٦٣$$

$$س = -٣٢{,}٦$$

عوّض بدل س = −٣٢,٦ في المعادلة [٢] لتحصل على:

$$ص = -\frac{١}{٤} \times -٣٢{,}٦ + \frac{٨١}{٤}$$

$$ص = ٢٨{,}٤$$

إحداثيات ر (−٣٢,٦، ٢٨,٤)

١٢) أ الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$، حيث أ(٢، ١٢)، ب(٦، ٢٠)

= $\frac{٢٠ - ١٢}{٦ - ٢}$ أو ٢

معطى معادلة المنحنى ص = ٣س + $\frac{١٢}{س}$

أعد كتابة المعادلة في صورة ص = ٣س + ١٢س$^{-١}$

اشتق لتحصل على:

$\frac{دص}{دس}$ = ٣ − ١٢س$^{-٢}$ أو ٣ − $\frac{١٢}{س^٢}$

فيكون ٣ − $\frac{١٢}{س^٢}$ = ٢

١ = $\frac{١٢}{س^٢}$

س = ±٢$\sqrt{٣}$

عوّض بدل س = ٢$\sqrt{٣}$ في المعادلة ص = ٣س + $\frac{١٢}{س}$

لتحصل على: ص = ٣ × ٢$\sqrt{٣}$ + $\frac{١٢}{٢\sqrt{٣}}$

ص = ٦$\sqrt{٣}$ + $\frac{١٢}{٢\sqrt{٣}}$ أو ٨$\sqrt{٣}$

عوّض بدل س = −٢$\sqrt{٣}$ في المعادلة

ص = ٣س + $\frac{١٢}{س}$ لتحصل على:

ص = ٣ × −٢$\sqrt{٣}$ + $\frac{١٢}{-٢\sqrt{٣}}$

ص = −٦$\sqrt{٣}$ − ٢$\sqrt{٣}$ أو −٨$\sqrt{٣}$

إحداثيات ج، د هي (٢$\sqrt{٣}$، ٨$\sqrt{٣}$)، (−٢$\sqrt{٣}$، −٨$\sqrt{٣}$)

ب أوجِد إحداثيات نقطة منتصف ج د باستخدام

الصيغة: $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

= $\left(\frac{٢\sqrt{٣} + (-٢\sqrt{٣})}{٢}، \frac{٨\sqrt{٣} + (-٨\sqrt{٣})}{٢}\right)$

نقطة المنتصف (٠، ٠)

أوجِد ميل ج د باستخدام الصيغة:

الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

= $\frac{٨\sqrt{٣} + (-٨\sqrt{٣})}{٢\sqrt{٣} + (-٢\sqrt{٣})}$ أو ٤

ميل العمود المنصف للقطعة ج د = −$\frac{١}{٤}$ ويمر بالنقطة (٠، ٠).

فتكون معادلته ص = −$\frac{١}{٤}$س أو س + ٤ص = ٠

١٣) لتكن ص = س(س − ١)(س + ٢)

فكّ الأقواس لتحصل على:

ص = (س^٢ − س)(س + ٢)

ص = س^٣ + ٢س^٢ − س^٢ − ٢س

ص = س^٣ + س^٢ − ٢س

أوجد مشتقة الدالة لتحصل على:

$\frac{دص}{دس}$ = ٣س^٢ + ٢س − ٢

عندما س= ١ فإن ميل المنحنى:

= ٣ × ١^٢ + ٢ × ١ − ٢ أو ٣

وعليه م = ٣

يمر العمودي بالنقطة (١، ٠) وميله = −$\frac{١}{م}$ = −$\frac{١}{٣}$

أوجِد معادلة العمودي الذي يمر بالنقطة (١، ٠) باستخدام الصيغة:

ص − ص$_١$ = −$\frac{١}{م}$(س − س$_١$)، حيث م ≠ ٠

ص − ٠ = −$\frac{١}{٣}$(س − ١)

ص − ٠ = −$\frac{١}{٣}$س + $\frac{١}{٣}$

ص = −$\frac{١}{٣}$س + $\frac{١}{٣}$ .... [١]

عندما س = −٢ فإن ميل المنحنى:

= ٣(−٢)^٢ + ٢ × −٢ − ٢ أو ٦

م = ٦

العمودي يمر بالنقطة (−٢، ٠) وميله = −$\frac{١}{م}$ = −$\frac{١}{٦}$

أوجِد معادلة العمودي الذي يمر بالنقطة ل (−٢، ٠) باستخدام الصيغة:

$$\text{ص} - \text{ص}_{١} = -\frac{١}{٦}(\text{س} - \text{س}_{١})$$

$$\text{ص} - ٠ = -\frac{١}{٦}(\text{س} - (-٢))$$

$$\text{ص} = \frac{١}{٦}\text{س} - \frac{١}{٣} \quad \text{.............} \quad [٢]$$

حل المعادلتَين [١]، [٢] آنيًا لتجد إحداثيات النقطة ج:

$$\text{س} + -\frac{١}{٣}\text{س} = -\frac{١}{٦}\text{س} - \frac{١}{٣}$$

$$-٢\text{س} + ٢ = -\text{س} - ٢$$

$$\text{س} = ٤$$

عوّض بدل س = ٤ في المعادلة [١] لتحصل على:

$$\text{ص} = -\frac{١}{٣} \times ٤ + \frac{١}{٣}$$

$$\text{ص} = -١$$

إحداثيات ج (٤، −١)

١٤) لتكن $\text{ص} = \frac{٥}{٢ - ٣\text{س}}$

أعد كتابة المعادلة في صورة

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن ع = ٢ − ٣س فيكون ص = ٥$\text{ع}^{-١}$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = -٣، \quad \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = -٥\text{ع}^{-٢}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$= -٥\text{ع}^{-٢} \times -٣$$

$$= \frac{١٥}{(٢ - ٣ \times -١)^{٢}}$$

عندما س= −١ فإن ميل المماس:

$$= \frac{١٥}{(٢ - ٣ \times -١)^{٢}}$$

$$= \frac{١٥}{٢٥} \text{ أو } ٠,٦$$

استخدم $\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{١})$

معادلة المماس الذي يمر بالنقطة (−١، ١) وميله ٠,٦ هي:

$$\text{ص} - ١ = ٠,٦(\text{س} - (-١))$$

$$\text{ص} - ١ = ٠,٦\text{س} + ٠,٦$$

$$\text{ص} = ٠,٦\text{س} + ١,٦$$

يتقاطع المماس مع محور السينات حيث ص = ٠

أي أن ٠ = ٠,٦ س + ١,٦

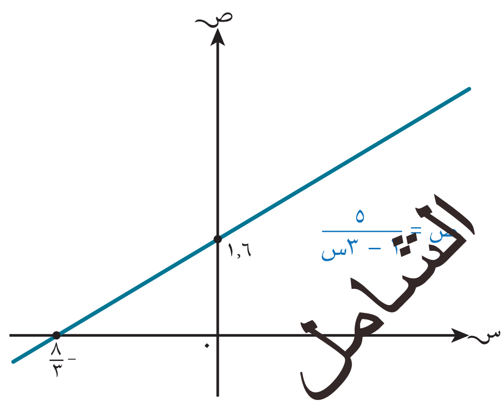
$$\text{س} = -\frac{٨}{٣}$$

ويتقاطع مع محور الصادات حيث س = ٠

أي أن ص = ٠,٦ (٠) + ١,٦

ص = ١,٦

انظر التمثيل البياني:



ظل الزاوية التي يصنعها المماس مع محور السينات:

$$= ١,٦ \div \frac{٨}{٣} \text{ أو } ٠,٦$$

$$\text{ظا}^{-١}(٠,٦) = ٣٠,٩٦^{\circ}$$

١٥) لتكن $\text{ص} = ٢\text{س}^{٢} + \text{ك}\text{س} - ٣$

يقطع المنحنى محور السينات حيث ص = ٠

$$\text{أي أن } ٠ = \frac{١٢}{٢\text{س} - ٣} - ٤$$

$$\frac{١٢}{٢\text{س} - ٣} = ٤$$

$$١٢ = ٤(٢\text{س} - ٣)$$

$١٢ = ٨\text{س} - ١٢$

$\text{س} = ٣$

ل $(٣،٠)$

أعد كتابة الدالة في صورة $\text{ص} = ١٢(٢\text{س} - ٣)^{-١} - ٤$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن $\text{ع} = ٢\text{س} - ٣$ فيكون $\text{ص} = ١٢\text{ع}^{-١} - ٤$

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٢$، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = -١٢\text{ع}^{-٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$= -١٢\text{ع}^{-٢} \times ٢$

$= -\frac{٢٤}{(٢\text{س} - ٣)^{٢}}$

عندما س = ٣، فإن ميل المماس:

$= -\frac{٢٤}{(٢ \times ٣ - ٣)^{٢}}$

$= -\frac{٢٤}{٩}$ أو $-\frac{٨}{٣}$

استخدم الصيغة $\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{١})$، حيث

$\text{م} = -\frac{٨}{٣}$، **ل** $(٣،٠)$

معادلة المماس عند النقطة **ل** هي:

$\text{ص} - ٠ = -\frac{٨}{٣}(\text{س} - ٣)$

$\text{ص} = -\frac{٨}{٣}\text{س} + ٨$

يقطع المماس محور الصادات حيث س = ٠

$\text{ص} = -\frac{٨}{٣}(٠) + ٨$

$\text{ص} = ٨$

النقطة **و** $(٠،٨)$

استخدم قانون المسافة:

ل و $= \sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$

ل $(٣،٠)$، **و** $(٠،٨)$

ل و $= \sqrt{(٠ - ٣)^{٢} + (٨ - ٠)^{٢}}$

ل و $= \sqrt{٧٣}$

١٦) أ لتكن $\text{ص} = ٢\text{س}^{٢} + \text{ك}\text{س} - ٣$

أوجد مشتقة الدالة لتحصل على: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\text{س} + \text{ك}$

عندما س = ٣ فإن ميل المنحنى:

$= ٤ \times \text{س} + \text{ك}$

$= ١٢ \times \text{ك}$

يمر العمودي بالنقطة $(٣، -٦)$

وميله $= -\frac{١}{\text{م}} = -\frac{١}{١٢ + \text{ك}}$

أعد ترتيب $\text{س} + ٥\text{ص} = ١٠$ لتجد ميل هذا المستقيم ومقارنته مع $\text{ص} = \text{م}\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{م}\,\text{س} + \text{جـ}$

$٥\text{ص} = -\text{س} + ١٠$

$\text{ص} = -\frac{١}{٥}\text{س} + ٢$

الميل $= -\frac{١}{٥}$

فيكون $-\frac{١}{٥} = -\frac{١}{١٢ + \text{ك}}$

قارن بين المقامين تجد أن:

$١٢ + \text{ك} = ٥$

$\text{ك} = -٧$

ب أوجِد ميل العمودي بتعويض ك = −٧ في:

$-\frac{١}{١٢ + \text{ك}}$

فيكون $-\frac{١}{١٢ + (-٧)}$ أو $-\frac{١}{٥}$

لتجد معادلة العمودي المار في **ل** $(٣، -٦)$

استخدم الصيغة:

$\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{١})$

$\text{ص} - (-٦) = -\frac{١}{٥}(\text{س} - ٣)$

ص + ٦ = $-\frac{١}{٥}$ س + $\frac{٣}{٥}$

ص = $-\frac{١}{٥}$ س − $\frac{٢٧}{٥}$

معادلة المنحنى ص = ٢س^{٢} + كس − ٣ وعندما ك = −٧ تصبح المعادلة ص = ٢س^{٢} − ٧س − ٣

حل المعادلتَين ص = ٢س^{٢} − ٧س − ٣،

ص = $-\frac{١}{٥}$ س − $\frac{٢٧}{٥}$ آنيًا يعطي إحداثيات نقطة تقاطع المنحى مع العمودي.

فيكون = ٢س^{٢} − ٧س − ٣ = $-\frac{١}{٥}$ س − $\frac{٢٧}{٥}$

١٠س^{٢} − ٣٥س − ١٥ = −س − ٢٧

١٠س^{٢} − ٣٤س + ١٢ = ٠

استخدم الصيغة التربيعية $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

حيث أ =١٠، ب = −٣٤، ج =١٢

س = $\frac{-(-٣٤) \pm \sqrt{(-٣٤)^{٢} - ٤(١٠)(١٢)}}{٢(١٠)}$

س = $\frac{٣٤ \pm \sqrt{٦٧٦}}{٢٠}$

س = ٠,٤ أو س = ٣ (وهي معطاة)

عوّض بدل س = ٠,٤ في المعادلة الخطيّة لتحصل على:

ص = $-\frac{١}{٥}$ س − $\frac{٢٧}{٥}$

ومنها نجد أن ص = $-\frac{١}{٥}$ (٠,٤) − $\frac{٢٧}{٥}$

ص = −٥,٤٨

إحداثيات النقاط التي يتقاطع فيها العمودي مع المنحنى مرة أخرى (٠,٤، −٥,٤٨)

تمارين ٤-٥

١) أ د(س) = س^٢ − ٨س + ٢

د′(س) = ٢س − ٨

د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

٢س − ٨ > ٠

س > ٤

ب د(س) = ٢س^٢ − ٤س + ٧

د′(س) = ٤س − ٤

د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

٤س − ٤ > ٠

س > ١

ج د(س) = ٥ − ٧س − ٢س^٢

د′(س) = −٧ − ٤س

د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

−٧ −٤س > ٠

س < −$\frac{٧}{٤}$ أو س < −١,٧٥

د د(س) = س^٣ − ١٢س^٢ + ٢

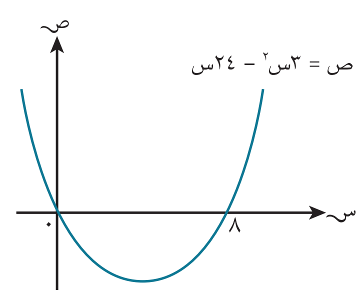
د′(س) = ٣س^٢ − ٢٤س

د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

٣س^٢ − ٢٤س > ٠

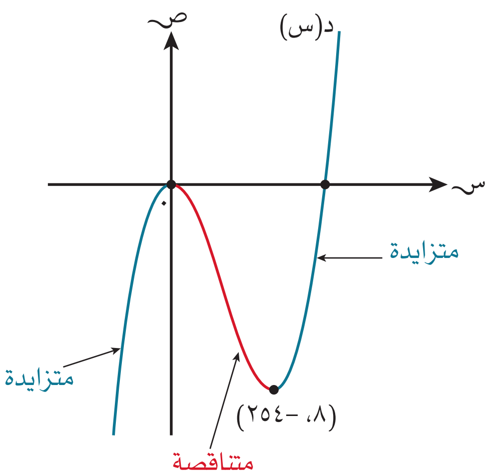
س (٣س − ٢٤) > ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = ٠، س = ٨



د(س) متزايدة على الفترة س < ٠ أو س > ٨

كما هو موضّح في التمثيل البياني للدالة د(س):



هـ د(س) = ٢س^٣ − ١٥س^٢ + ٢٤س + ٦

د′(س) = ٦س^٢ − ٣٠س + ٢٤

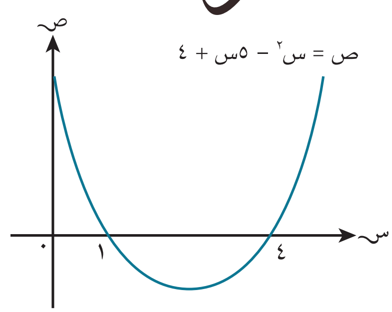
د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

٦س^٢ − ٣٠س + ٢٤ > ٠

س^٢ − ٥س + ٤ > ٠

(س − ١)(س − ٤) > ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = ١، س = ٤:



د(س) متزايدة على الفترة س < ١ أو س > ٤

و د(س) = ١٦ + ١٦س − س^٢ − س^٣

د′(س) = ١٦ − ٢س − ٣س^٢

د(س) دالة متزايدة عندما د'(س) > ٠

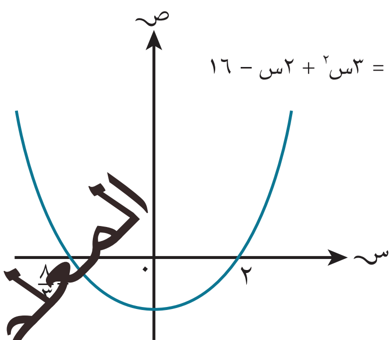
١٦ − ٢س − ٣س^{٢} > ٠

اضرب في −١ واقلب رمز المتباينة.

٣س^{٢} + ٢س − ١٦ < ٠

(٣س + ٨)(س − ٢) < ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = −$\frac{٨}{٣}$، س = ٢:



د(س) دالة متزايدة على الفترة −$\frac{٨}{٣}$ < س < ٢

٢) أ د(س) = ٣س^{٢} − ٨س + ٢

د'(س) = ٦س − ٨

د(س) دالة متناقصة عندما د'(س) < ٠

٦س − ٨ < ٠

س < $\frac{٤}{٣}$

ب د(س) = ١٠ + ٩س − س^{٢}

د'(س) = ٩ − ٢س

د(س) دالة متناقصة عندما د'(س) < ٠

٩ − ٢س < ٠

س > $\frac{٩}{٢}$

ج د(س) = ٢س^{٣} − ٢١س^{٢} + ٦٠س − ٥

د'(س) = ٦س^{٢} − ٤٢س + ٦٠

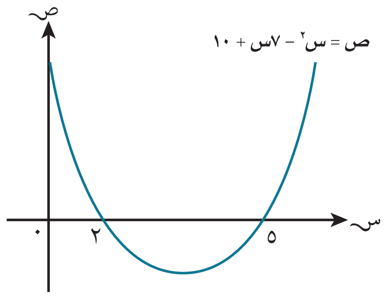
د(س) دالة متزايدة عندما د'(س) > ٠

٦س^{٢} − ٤٢س + ٦٠ > ٠

س^{٢} − ٧س + ١٠ < ٠

(س − ٢)(س − ٥) < ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = ٢، س = ٥:



د(س) دالة متناقصة على الفترة ٢ < س < ٥

د د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س + ٥

د'(س) = ٣س^{٢} − ٦س − ٩

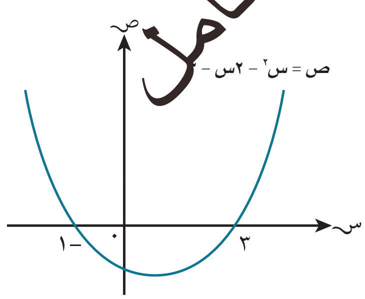
د(س) دالة متناقصة عندما د'(س) < ٠

٣س^{٢} − ٦س − ٩ < ٠

س^{٢} − ٢س − ٣ < ٠

(س + ١)(س − ٣) < ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = −١، س = ٣:



د(س) دالة متناقصة على الفترة −١ < س < ٣

هـ د(س) = −٤٠س + ١٣س^{٢} − س^{٣}

د'(س) = −٤٠ + ٢٦س − ٣س^{٢}

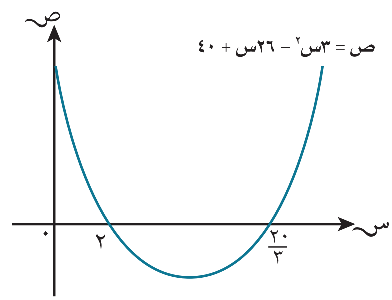
د(س) دالة متناقصة عندما د'(س) < ٠

−٤٠ + ٢٦س − ٣س^{٢} < ٠

٣س^{٢} − ٢٦س + ٤٠ > ٠

(س − ٢)(٣س − ٢٠) > ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = ٢، س = $\frac{٢٠}{٣}$:



د(س) دالة متناقصة على الفترات

س < ٢ أو س > $\frac{٢٠}{٣}$

و) د(س) = ١١ + ٢٤ س − ٣س^{٢} − س^{٣}

د′(س) = ٢٤ − ٦س − ٣س^{٢}

د(س) دالة متناقصة عندما د′(س) < ٠

٢٤ − ٦س − ٣س^{٢} < ٠

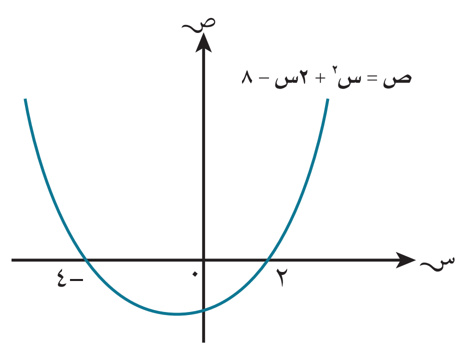
اضرب في −١ واقلب رمز المتباينة.

٣س^{٢} + ٦س − ٢٤ > ٠

س^{٢} + ٢س − ٨ > ٠

(س + ٤)(س − ٢) > ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = −٤، س = ٢:



د(س) دالة متناقصة على الفترات

س < −٤ أو س > ٢

٣) د(س) = $\frac{١}{٦}$ (٥ − ٢س)^{٣} + ٤س

أوجِد د′(س) (استخدم قاعدة السلسلة لتشتق الحد الأول)

د′(س) = $\frac{١}{٢}$ (٥ − ٢س)^{٢} × (−٢) + ٤

= − (٥ − ٢س)^{٢} + ٤

= ٤ − (٥ − ٢س)^{٢}

لتكون الدالة متزايدة فإن د′(س) > ٠

أي أن ٤ − (٥ − ٢س)^{٢} > ٠

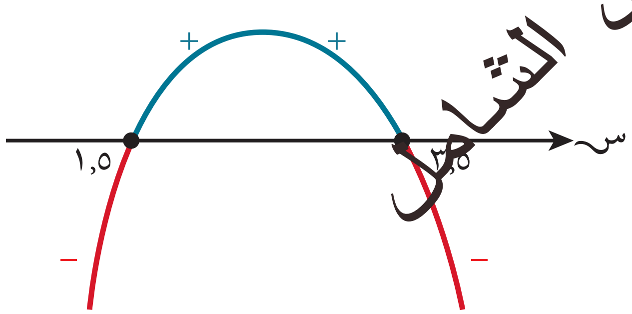
أوجِد النقاط الحرجة معتمدًا على ٤ − (٥ − ٢س)^{٢} = ٠

٥ − ٢س = ±٢

إذا كان ٥ − ٢س = ٢ فإن س = ١,٥

إذا كان ٥ − ٢س = −٢ فإن س = ٣,٥

توجد النقاط الحرجة عند س = ١,٥، س = ٣,٥



نريد أن يكون ٤ − (٥ − ٢س)^{٢} > ٠ وهو يمثل جزء التمثيل البياني حيث د′(س) > ٠ أي جزء التمثيل الذي فوق محور السينات.

وعليه يكون ١,٥ < س < ٣,٥

٤) $د(س) = \frac{٤}{١ - ٢س}$ ، $س \geqslant ١$

$= ٤(١ - ٢س)^{-١}$

$د'(س) = \frac{٨}{(١ - ٢س)^{٢}}$

وحيث إن المجال هو $س \geqslant ١$ فتكون $(١ - ٢س)^{٢}$

موجبة لجميع قيم س في المجال.

لذا $د'(س) > ٠$ لجميع قيم س في مجال د(س).

د دالة متزايدة.

٥) $د(س) = \frac{٥}{(س + ٢)^{٢}} - \frac{٢}{س + ٢}$، $س \geqslant ٠$

$د(س) = ٥(س + ٢)^{-٢} - ٢(س + ٢)^{-١}$

$د'(س) = ١٠(س + ٢)^{-٣} \times ١ + ٢(س + ٢)^{-٢} \times ١$

$د'(س) = \frac{-١٠}{(س + ٢)^{٣}} + \frac{٢}{(س + ٢)^{٢}}$

اجمع الكسرَين لتحصل على:

$د'(س) = \frac{-١٠}{(س + ٢)^{٣}} + \frac{٢(س + ٢)}{(س + ٢)^{٣}}$

$د'(س) = \frac{٢س - ٦}{(س + ٢)^{٣}}$

حل المعادلة $٢س - ٦ = ٠$ لتجد النقاط الحرجة.

$س = ٣$ (عندها فقط نقطة حرجة)

عوّض بدل $س = ٢$ في

$د'(س) = \frac{٢س - ٦}{(س + ٢)^{٣}}$ لتجد:

$د'(٢) = \frac{٢(٢) - ٦}{(٢ + ٢)^{٣}} = -\frac{١}{٣٢}$

الدالة هنا متناقصة.

عوّض بدل $س = ٤$ في

$د'(٤) = \frac{٢(٤) - ٦}{(٤ + ٢)^{٣}} = \frac{١}{١٠٨}$

الدالة هنا متزايدة.

∴ الدالة متناقصة في الفترة $٠ < س < ٣$

ومتزايدة في الفترة $س > ٣$

٦) $د(س) = (٢س + ٥)^{٢} - ٣$، $س \geqslant ٠$

$د'(س) = ٢(٢س + ٥) \times ٢$

$د'(س) = ٨س + ٢٠$

∴ د(س) دالة متزايدة لأن $٨س + ٢٠ \geqslant ٠$ لكل $س \geqslant ٠$

٧) لتكن $د(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س}$

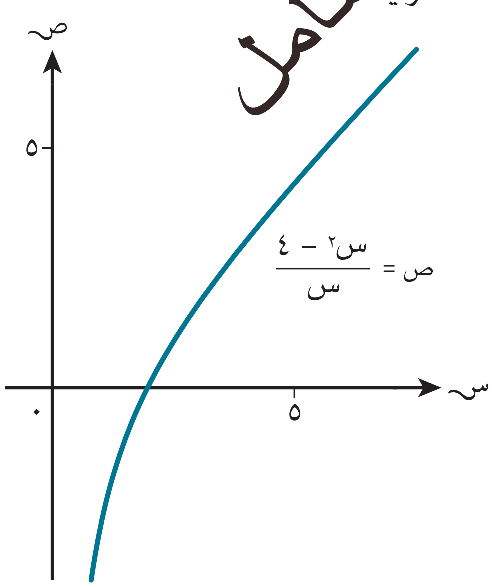
أعد كتابة الدالة في صورة $د(س) = س - ٤س^{-١}$

$د'(س) = ١ + ٤س^{-٢}$

أو $د'(س) = ١ + \frac{٤}{س^{٢}}$

لأي قيم س في مجال الدالة تكون $س^{٢}$ دائمًا موجبة.

وهكذا تكون د'(س) دائمًا موجبة، وبالتالي فإن د(س) دالة متزايدة.



يبيّن التمثيل أن د(س) دالة متزايدة على مجالها.

٨) $د(س) = \frac{٢}{س^{٤}} - س^{٢}$، حيث $س > ٠$

$د(س) = ٢س^{-٤} - س^{٢}$

$د'(س) = -٨س^{-٥} - ٢س$

$د'(س) = \frac{-٨}{س^{٥}} - \frac{٢س^{٦}}{س^{٥}}$

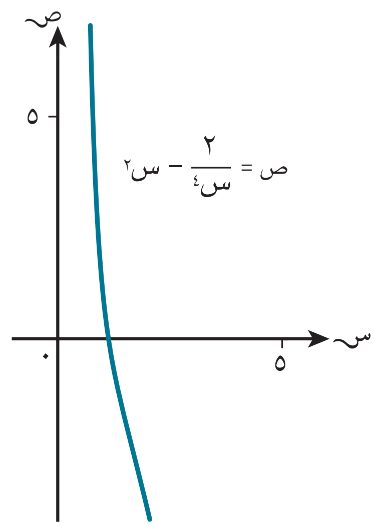
$د'(س) = \frac{-٨ - ٢س^{٦}}{س^{٥}}$

$د'(س) = -\frac{(٨ + ٢س^{٦})}{س^{٥}}$

عندما يكون $س > ٠$ أي $س^{٥}$ موجبة فإن

$د'(س) = -\frac{موجب}{موجب}$ أي أنها سالبة

∴ الدالة متناقصة لقيم $س > ٠$



٩) $ح(س) = ٢س^{٣} - ٨١س^{٢} + ٨٤٠س$

$ح(س) = ٢س^{٣} - ٨١س^{٢} + ٨٤٠س$ حيث تكون

$ح(س)$ متناقصة فإننا نحتاج إلى أن نحل $ح'(س) < ٠$

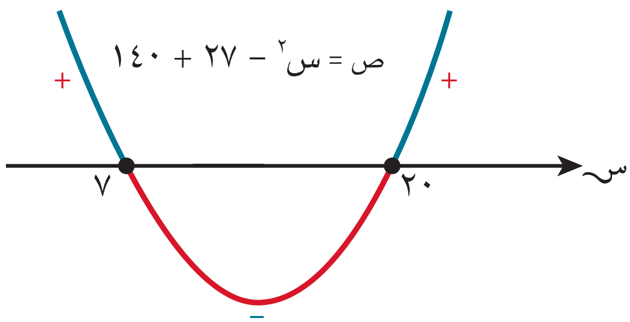
$ح'(س) = ٦س^{٢} - ١٦٢س + ٨٤٠ < ٠$

$ح'(س) = س^{٢} - ٢٧س + ١٤٠ < ٠$

$(س - ٢٠)(س - ٧) < ٠$

توجد نقاط حرجة لقيم س التي تمثل حلًا للمعادلة

$س^{٢} - ٢٧س + ١٤٠ = ٠$



مجال تناقص دالة الربح هو $٧ < س < ٢٠$

الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٧، ٢٠

تمارين ٤-٦

١) أ ص = س^{٢} − ٤س + ٨

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢س − ٤

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

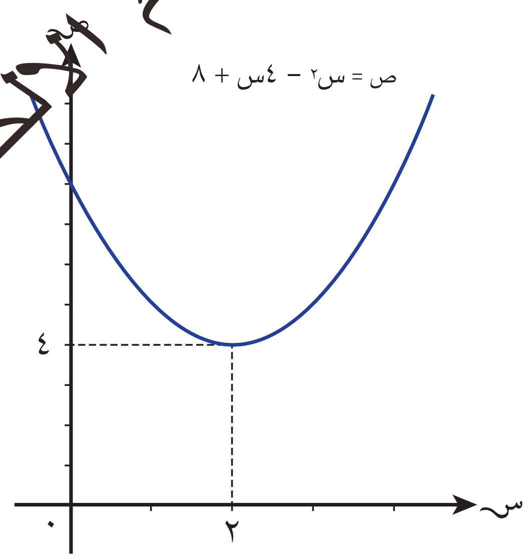
٢ س − ٤ = ٠ ومنها س = ٢

النقطة الحرجة (٢، ٤).

قيمة $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ تخبرنا عن نوع النقطة الحرجة.

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ = ٢ > ٠

لذا توجد نقطة صغرى عند (٢، ٤)



ب ص = (٣ + س) (٢ − س) = ٦ − س − س^{٢}

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −١ − ٢س

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

−١ − ٢س = ٠ أي عند س= −٠,٥

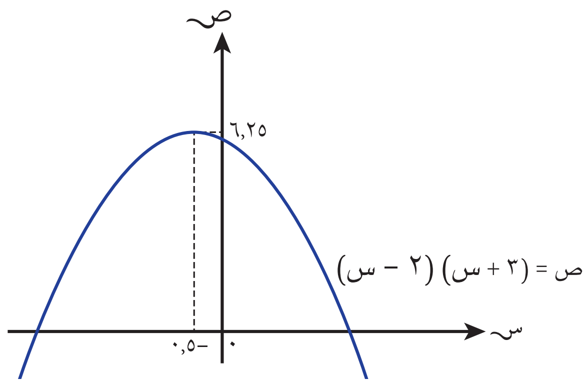
عندما س= −٠,٥ فإن

توجد نقطة حرجة عند (−٠,٥، ٦,٢٥).

قيمة $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ تخبرنا عن نوع النقطة الحرجة.

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = −٢ < ٠

النقطة الحرجة هي نقطة عظمى عند (−٠,٥، ٦,٢٥).



ج ص = س^{٣} − ١٢س + ٦

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} − ١٢

توجد النقطة الحرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

٣س^{٢} − ١٢ = ٠ أي عند س = −٢، س = ٢

عندما س = −٢ فإن ص = (−٢)^{٣} − ١٢(−٢) + ٦ = ٢٢

عندما س = ٢ فإن ص = (٢)^{٣} − ١٢(٢) + ٦ = −١٠

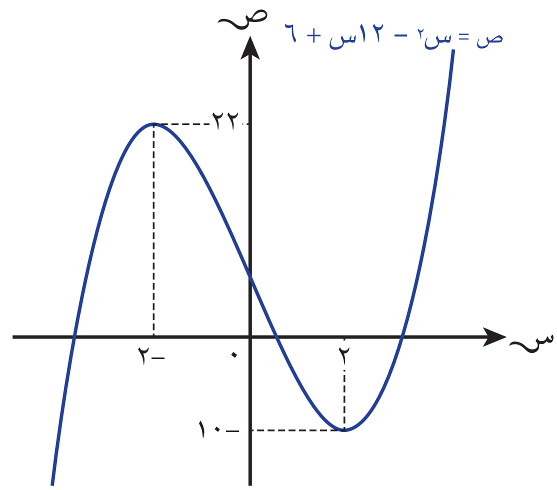
توجد نقاط حرجة عند (− ٢، ٢٢)، (٢، − ١٠).

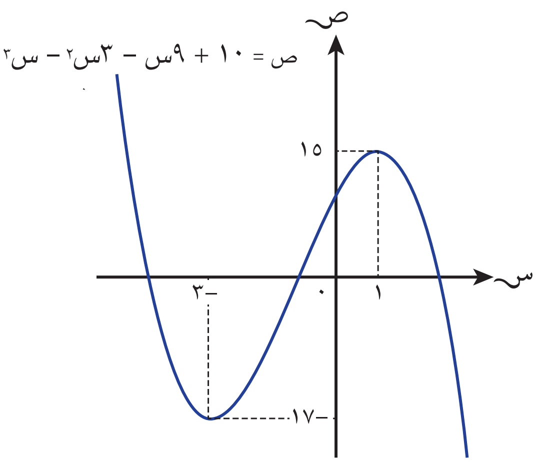
تدلنا قيمة $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ عن نوع النقاط الحرجة.

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ = ٦س $\begin{cases} > ٠ \text{ عندما س = −٢} \\ < ٠ \text{ عندما س = ٢} \end{cases}$

توجد نقطة عظمى عند (−٢، ٢٢).

توجد نقطة صغرى عند (٢، −١٠).





د ص = ١٠ + ٩س − ٣س^{٢} − س^{٣}

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٩ − ٦س − ٣س^{٢}

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

٩ − ٦س − ٣س^{٢} = ٠

يكمل الحل ويوجد قيم س

س^{٢} + ٢س − ٣ = ٠

(س + ٣)(س − ١) = ٠

إما س = −٣ أو س = ١

عندما س = ١، فإن

ص = ١٠ + ٩(١) − ٣(١)^{٢} − (١)^{٣} = ١٥

عندما س = −٣، فإن

ص = ١٠ + ٩(−٣) − ٣(−٣)^{٢} − (−٣)^{٣} = −١٧

توجد نقاط حرجة عند (−٣، −١٧)، (١، ١٥).

تخبرنا قيمة $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ عن نوع النقاط الحرجة

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = −٦ − ٦س $\begin{cases} > ٠ \text{ عندما س = −٣} \\ < ٠ \text{ عندما س = ١} \end{cases}$

توجد نقطة صغرى عند (−٣، − ١٧).

وتوجد نقطة عظمى عند (١، ١٥).

هـ ص = س^{٤} + ٤س − ١

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٤س^{٣} + ٤

توجد النقطة الحرجة عندما $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

٤س^{٣} + ٤ = ٠

٤س^{٣} = −٤

س^{٣} = −١

س = −١

عندما س = −١

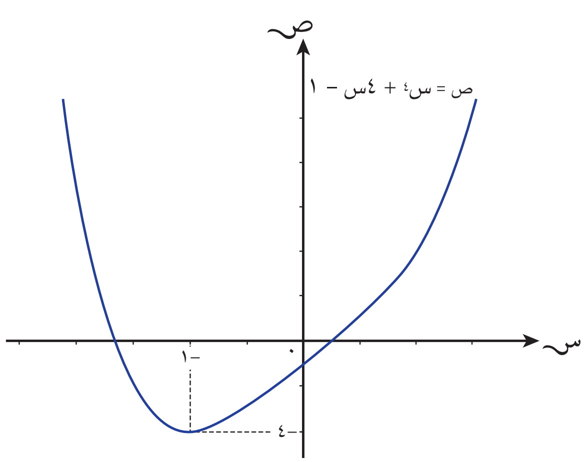
فإن ص = (−١)^{٤} + ٤(−١) − ١ = −٤

توجد نقطة حرجة عند النقطة (−١، −٤).

تخبرنا قيمة $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ عن نوع النقطة الحرجة.

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ١٢س^{٢} > ٠ عندما س = −١

توجد نقطة صغرى عند (−١، −٤).



و $ص = (٢س - ٣)^{٣} - ٦س$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣(٢س - ٣)^{٢} \times ٢ - ٦$

$\frac{ءص}{ءس} = ٦(٢س - ٣)^{٢} - ٦$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$٦(٢س - ٣)^{٢} - ٦ = ٠$

$٦(٢س - ٣)^{٢} = ٦$

$(٢س - ٣)^{٢} = ١$

$٢س - ٣ = \pm\sqrt{١}$

$س = \frac{\pm\sqrt{١} + ٣}{٢} = ١$ أو ٢

عندما $س = ١$ فإن

$ص = (٢ \times ١ - ٣)^{٣} - ٦ \times ١ = -٧$

عندما $س = ٢$ فإن

$ص = (٢ \times ٢ - ٣)^{٣} - ٦ \times ٢ = -١١$

توجد النقاط الحرجة عند (١، −٧) و(٢، −١١).

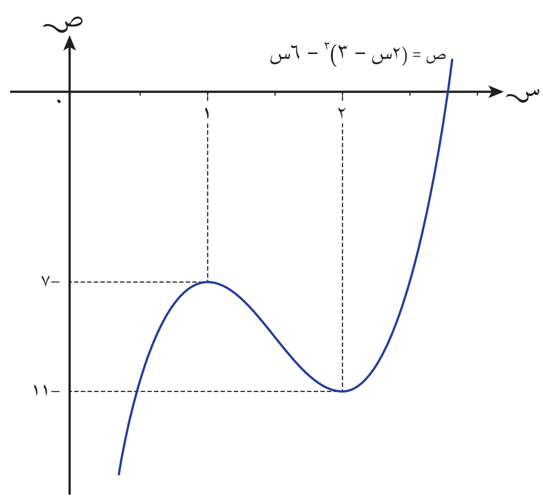
تخبرنا قيمة $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ عن نوع النقاط الحرجة.

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٦ \times ٢(٢س - ٣) \times ٢$

$= ٤٨س - ٧٢ \begin{cases} < ٠ & \text{عندما } س = ١ \\ > ٠ & \text{عندما } س = ٢ \end{cases}$

توجد نقطة عظمى عند (١، −٧).

توجد نقطة صغرى عند (٢، −١١).



٢) أ $ص = \sqrt{س} + \frac{٩}{\sqrt{س}} = س^{\frac{١}{٢}} + ٩س^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} - \frac{٩}{٢}س^{-\frac{٣}{٢}}$

$\frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{٩}{٢}س^{-\frac{٣}{٢}}$

ارفع الطرفين للقوة −٢

$٤س = \frac{٤}{٨١}س^{٣}$

$س^{٣} - ٨١ = ٠$

$س(س^{٢} - ٨١س) = ٠$

$س = -٩$، $س = ٠$، $س = ٩$

الحل الوحيد المقبول هو $س = ٩$ (لأن الدالة غير معرّفة عند $س = -٩$، $س = ٠$).

عندما $س = ٩$ فإن $ص = \sqrt{٩} + \frac{٩}{\sqrt{٩}} = ٦$

توجد نقطة حرجة عند (٩، ٦)

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} - \frac{٩}{٢}س^{-\frac{٣}{٢}}$

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = -\frac{١}{٤}س^{-\frac{٣}{٢}} + \frac{٢٧}{٤}س^{-\frac{٥}{٢}}$

عندما $س = ٩$ فإن

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = -\frac{١}{٤} \times ٩^{-\frac{٣}{٢}} + \frac{٢٧}{٤} \times ٩^{-\frac{٥}{٢}} = \frac{١}{٥٤} > ٠$

توجد نقطة صغرى عند (٩، ٦)

ب $ص = ٤س^{٢} + \frac{٨}{س} = ٤س^{٢} + ٨س^{-١}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٨س - \frac{٨}{س^{٢}}$

$٨س - \frac{٨}{س^{٢}} = ٠$

$٨س = \frac{٨}{س^{٢}}$

$٨س^{٣} = ٨$

$س^{٣} = ١$

$\text{س} = ١$

عندما $\text{س} = ١$ فإن $\text{ص} = ٤(١)^{٢} + \frac{٨}{١} = ١٢$

توجد نقطة حرجة عند (١، ١٢)

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = ٨ + \frac{١٦}{\text{س}^{٣}}$

عندما $\text{س} = ١$ فإن

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = ٨ + \frac{١٦}{\text{س}^{٣}} = ٢٤ > ٠$

توجد نقطة صغرى عند (١، ١٢).

ج) $\text{ص} = \frac{(\text{س} - ٣)^{٢}}{\text{س}} = \frac{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}{\text{س}}$

$= \text{س} - ٦ + ٩\text{س}^{-١}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١ - \frac{٩}{\text{س}^{٢}}$

$١ - \frac{٩}{\text{س}^{٢}} = ٠$

$\text{س}^{٢} = ٩$

$\text{س} = \pm ٣$

عندما $\text{س} = -٣$ فإن $\text{ص} = \frac{(-٣ - ٣)^{٢}}{-٣} = -١٢$

عندما $\text{س} = ٣$ فإن $\text{ص} = \frac{(٣ - ٣)^{٢}}{-٣} = ٠$

توجد نقاط حرجة عند (−٣، −١٢)، (٣، ٠)

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = \frac{١٨}{\text{س}^{٣}} \begin{cases} < ٠ & \text{عندما س} = -٣ \\ > ٠ & \text{عندما س} = ٣ \end{cases}$

توجد نقطة عظمى عند (−٣، −١٢).

توجد نقطة صغرى عند (٣، ٠).

د) $\text{ص} = \text{س}^{٣} + \frac{٤٨}{\text{س}} + ٤$

$\text{ص} = \text{س}^{٣} + ٤٨\,\text{س}^{-١} + ٤$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢} - \frac{٤٨}{\text{س}^{٢}}$

$٣\text{س}^{٢} - \frac{٤٨}{\text{س}^{٢}} = ٠$

$٣\text{س}^{٢} = \frac{٤٨}{\text{س}^{٢}}$

$٣\text{س}^{٤} = ٤٨$

$\text{س}^{٤} = ١٦$

$\text{س} = \pm ٢$

عندما $\text{س} = -٢$ فإن $\text{ص} = (-٢)^{٣} + \frac{٤٨}{-٢} + ٤ = -٢٨$

عندما $\text{س} = ٢$ فإن $\text{ص} = ٢^{٣} + \frac{٤٨}{٢} + ٤ = ٣٦$

توجد النقاط الحرجة عند (−٢، −٢٨)، (٢، ٣٦).

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = ٦\text{س} + \frac{٩٦}{\text{س}^{٣}} \begin{cases} < ٠ & \text{عندما س} = -٢ \\ > ٠ & \text{عندما س} = ٢ \end{cases}$

توجد نقطة عظمى (−٢، −٢٨).

توجد نقطة صغرى عند (٢، ٣٦).

هـ) $\text{ص} = ٤\sqrt{\text{س}} - \text{س}$

$\text{ص} = ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}} - \text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤ \times \frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}} - ١ = \frac{٢}{\sqrt{\text{س}}} - ١$

$\frac{٢}{\sqrt{\text{س}}} - ١ = ٠$

$١ = \frac{٢}{\sqrt{\text{س}}}$

$\sqrt{\text{س}} = ٢$

$\text{س} = ٤$

عندما $\text{س} = ٤$، فإن $\text{ص} = ٤\sqrt{٤} - ٤ = ٨ - ٤ = ٤$

توجد نقطة حرجة عند (٤، ٤).

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = -\frac{١}{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}$

عندما $\text{س} = ٤$ فإن $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = -\frac{١}{٨} < ٠$

توجد نقطة عظمى عند (٤ ، ٤).

و) $\text{ص} = ٢\text{س}^{٢} + \frac{٨}{\text{س}^{٢}}$

$\text{ص} = ٢\text{س}^{٢} + ٨\text{س}^{-٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢ - ١٦س^{-٣} = ٢ - \frac{١٦}{س^{٣}}$

$٢ - \frac{١٦}{س^{٣}} = ٠$

$٢ = \frac{١٦}{س^{٣}}$

$٢س^{٣} = ١٦$

$س^{٣} = ٨$

$س = ٢$

عندما $س = ٢$ فإن $ص = ٢ \times ٢ + \frac{٨}{٢^{٢}} = ٦$

توجد نقطة حرجة عند (٢، ٦)

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = -١٦(-٣)س^{-٤} = \frac{٤٨}{س^{٤}}$

عندما $س = ٢$ فإن $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{٤٨}{٢^{٤}} = ٣ > ٠$

توجد نقطة صغرى عند (٢، ٦).

٣) لتكن الدالة $ص = \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢}}$

أعد كتابة الدالة في صورة $ص = ١ - ٩س^{-٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = ١٨س^{-٣} = \frac{١٨}{س^{٣}}$

توجد نقطة حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\frac{١٨}{س^{٣}} = ٠$

لا يوجد حل لهذه المعادلة.

لذا لا توجد نقاط حرجة.

٤) **أ** لتكن الدالة $ص = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ٣٦س + ك$

$\frac{ءص}{ءس} = ٦س^{٢} - ٦س - ٣٦$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$٦س^{٢} - ٦س - ٣٦ = ٠$

$س^{٢} - س - ٦ = ٠$

$(س - ٣)(س + ٢) = ٠$

إما $س = -٢$ أو $س = ٣$

ب إذا كان $س = -٢$ فإن

$ص = ٢(-٢)^{٣} - ٣(-٢)^{٢} - ٣٦(-٢) + ك = ك + ٤٤$

توجد نقطة حرجة عند (−٢، ك + ٤٤).

إذا كان $س = ٣$ فإن

$ص = ٢(٣)^{٣} - ٣(٣)^{٢} - ٣٦(٣) + ك = ك - ٨١$

توجد نقطة حرجة عند (٣، ك − ٨١)

إذا وقعت النقاط الحرجة على محور السينات

فإن: $ك + ٤٤ = ٠$ ومنها $ك = -٤٤$

$ك - ٨١ = ٠$ ومنها $ك = ٨١$

قيمتا ك هما −٤٤، ١٨

٥) **أ** $ص = س^{٣} + أس^{٢} - ٩س + ٢$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} + ٢أس - ٩$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$٣س^{٢} + ٢أس - ٩ = ٠$

عوّض بدل $س = -٣$ في المعادلة لتحصل على:

$٣(-٣)^{٢} + ٢أ(-٣) - ٩ = ٠$

$٢٧ - ٦أ - ٩ = ٠$

$-٦أ = -١٨$

$أ = ٣$

ب $ص = س^{٣} + ٣س^{٢} - ٩س + ٢$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} + ٦س - ٩$

$\frac{ءص}{ءس} < ٠$

$٣س^{٢} + ٦س - ٩ < ٠$

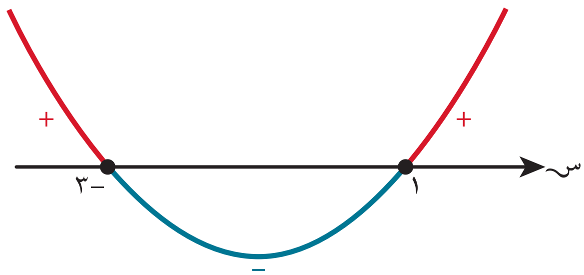
$س^{٢} + ٢س - ٣ < ٠$

$(س + ٣)(س - ١) < ٠$

نجد النقاط الحرجة عندما نجد قيم س التي

تحقق المعادلة $(س + ٣)(س - ١) = ٠$ وهي:

س = ١، س = −٣ وهما ممثلتان على الشكل الآتي:



نريد س^٢ + ٢س − ٣ < ٠ وهو جزء التمثيل البياني حيث $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ < أي الجزء الواقع أسفل محور السينات.

وعليه يكون −٣ < س < ١

٦) لتكن الدالة ص = ٢س^٣ + أس^٢ + ب س − ٣٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^٢ + ٢أس + ب

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

٦س^٢ + ٢أس + ب = ٠

عوّض بدل س = ٣ في المعادلة لتحصل على:

٦(٣)^٢ + ٢أ(٣) + ب = ٠

٥٤ + ٦أ + ب = ٠

٦أ + ب = −٥٤ .... [١]

عندما يمر منحنى ص = ٢س^٣ + أس^٢ + ب س − ٣٠ في (٤، ٢) فعوّض بدل س = ٤، ص = ٢ في المعادلة لتحصل على:

٢ = ٢(٤)^٣ + أ(٤)^٢ + ب(٤) − ٣٠

٢ = ١٢٨ + ١٦أ + ٤ب − ٣٠

١٦أ + ٤ب = −٩٦

٤أ + ب = −٢٤ .... [٢]

حل المعادلتَين [١]، [٢] لتحصل على:

٢أ = −٣٠

أ = −١٥

عوّض بدل أ = −١٥ في المعادلة [٢] لتجد أن:

٤(−١٥) + ب = −٢٤

ب = ٣٦

ص = ٢س^٣ − ١٥س^٢ + ٣٦س − ٣٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^٢ − ٣٠س + ٣٦

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

٦س^٢ − ٣٠س + ٣٦ = ٠

س^٢ − ٥س + ٦ = ٠

(س − ٣)(س − ٢) = ٠

س = ٣ (معطاة في السؤال)، أو س = ٢

إذا كان س = ٢ فإن

ص = ٢(٢)^٣ − ١٥(٢)^٢ + ٣٦(٢) − ٣٠ = −٢

لذا توجد نقطة حرجة أخرى عند (٢، −٢).

توجد طريقتان لتحديد نوع النقطة الحرجة:

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

أوجِد المشتقة الثانية $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}$

$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}$ = ١٢س − ٣٠

عندما س = ٢ فإن $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}$ = ١٢(٢) − ٣٠ = −٦

وعليه فإن $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}$ < ٠

∴ (٢، −٢) نقطة عظمى.

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

أوجِد الميل على جانبَي النقطة (٢، −٢).

عوّض بدل س = ١ في $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^{٢} − ٣٠س + ٣٦ = ٠

لتحصل على $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦(١)^{٢} − ٣٠(١) + ٣٦ = ١٢

وهي كمية موجبة.

> التعويض بدل س = ٣ لا يساعد بسبب وجود نقطة حرجة عند س = ٣

عوّض بدل س = ٢,٥ في

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^{٢} − ٣٠س + ٣٦ = ٠

لتحصل على:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦(٢,٥)^{٢} − ٣٠(٢,٥) + ٣٦ = −$\frac{٣}{٢}$ وهي كمية سالبة.

وحيث إن إشارة الميل تتغير من موجبة إلى سالبة كلما تحركت قيم س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة، فإن (٢، −٢) نقطة عظمى.

٧) لتكن الدالة ص = ٢س^{٣} + أس^{٢} + ب س − ٣٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^{٢} + ٢أس + ب

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

٦س^{٢} + ٢أس + ب = ٠

قارن المعادلة مع أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ واستخدم الصيغة التربيعية لتجد أن:

س = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$، حيث أ = ٦، ب = ٢أ، ج = ب

س = $\frac{-٢\text{أ} \pm \sqrt{(٢\text{أ})^{٢} - ٤(٦)(\text{ب})}}{٢(٦)}$

لا توجد حلول حقيقية إذا كان (٢أ)^{٢} − ٤(٦)(ب) < ٠

وعليه ٤أ^{٢} − ٢٤ب < ٠

أ^{٢} − ٦ب < ٠

أ^{٢} < ٦ب

٨) لتكن الدالة ص = ١ + ٢س + $\frac{\text{ك}^{٢}}{٢\text{س} - ٣}$

أعد كتابة الدالة في صورة

ص = ١ + ٢س + ك^{٢}(٢س − ٣)$^{-١}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ + ك^{٢} × −١(٢س − ٣)$^{-٢}$ × ٢

= ٢ − ٢ك^{٢}(٢س − ٣)$^{-٢}$

= ٢ − $\frac{٢\text{ك}^{٢}}{(٢\text{س} - ٣)^{٢}}$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

٢ − $\frac{٢\text{ك}^{٢}}{(٢\text{س} - ٣)^{٢}}$ = ٠

٢ = $\frac{٢\text{ك}^{٢}}{(٢\text{س} - ٣)^{٢}}$

١ = $\frac{\text{ك}^{٢}}{(٢\text{س} - ٣)^{٢}}$

(٢س − ٣)^{٢} = ك^{٢}

٢س − ٣ = ±ك

س = $\frac{\text{ك} + ٣}{٢}$ أو س = $\frac{-\text{ك} + ٣}{٢}$

> اقرأ التعليمات بانتباه. يطلب هذا التمرين قيم س فقط وليس قيم ص.

لتقرّر نوع النقاط الحرجة، أوجِد: $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$

وحيث إن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ − ٢ك^{٢} (٢س − ٣)$^{-٢}$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = -٢ \times -\text{٢ك}^{٢}\ (\text{٢س} - ٣)^{-٣} \times ٢$

$= \text{٨ك}^{٢}\ (\text{٢س} - ٣)^{-٣}$

$= \frac{\text{٨ك}^{٢}}{(\text{٢س} - ٣)^{٣}}$

عوّض بدل $\text{س} = \frac{\text{ك} + ٣}{٢}$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = \frac{\text{٨ك}^{٢}}{(٢ \times \frac{\text{ك} + ٣}{٢} - ٣)^{٣}}$

$= \frac{\text{٨ك}^{٢}}{\text{ك}^{٣}}$

$= \frac{٨}{\text{ك}}$ وهي قيمة موجبة لأن ك موجبة

وعليه فإنه توجد عند $\text{س} = \frac{\text{ك} + ٣}{٢}$ نقطة صغرى.

عوّض بدل $\text{س} = \frac{-\text{ك} + ٣}{٢}$

$= \frac{\text{٨ك}^{٢}}{-\text{ك}^{٣}}$

$= -\frac{٨}{\text{ك}}$ وهي قيمة سالبة لأن ك موجبة.

وعليه توجد نقطة عظمى عند $\frac{-\text{ك} + ٣}{٢}$

اختبار المشتقة الأولى يحتاج إلى عمل أكثر بكثير من الطريقة أعلاه ويقود أحياناً إلى الخطأ.

٩) لتكن الدالة $\text{ص} = \text{س}^{٤} - \text{٤س}^{٣} + \text{٤س}^{٢} + ١$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٤س}^{٣} - \text{١٢س}^{٢} + \text{٨س}$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$

$\text{٤س}^{٣} - \text{١٢س}^{٢} + \text{٨س} = ٠$

"لا تقسم المعادلة على س لأنك ستفقد أحد الحلول"

$\text{٤س}(\text{س}^{٢} - \text{٣س} + ٢) = ٠$

$\text{٤س}(\text{س} - ١)(\text{س} - ٢) = ٠$

فيكون س = ٠، أو س= ١، أو س = ٢

إذا كان س = ٠

فإن $\text{ص} = ٠^{٤} - ٤(٠)^{٣} + ٤(٠)^{٢} + ١ = ١$

إذا كان س = ١

فإن $\text{ص} = ١^{٤} - ٤(١)^{٣} + ٤(١)^{٢} + ١ = ٢$

إذا كان س = ٢

فإن $\text{ص} = ٢^{٤} - ٤(٢)^{٣} + ٤(٢)^{٢} + ١ = ١$

النقاط الحرجة هي (٠، ١)، (١، ٢)، (٢، ١).

لتحدد نوع النقاط الحرجة هذه، وهي متقاربة، فمن الحكمة استخدام المشتقة الثانية.

الآن أوجِد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = \text{١٢س}^{٢} - \text{٢٤س} + ٨$

بتعويض قيم س في المشتقة الثانية:

س = ٠ فإن $١٢(٠)^{٢} - ٢٤(٠) + ٨ = ٨$ وهي موجبة

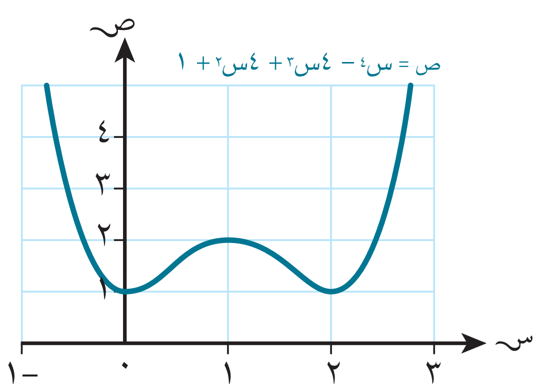
فيكون (٠، ١) قيمة صغرى.

س = ١ فإن $١٢(١)^{٢} - ٢٤(١) + ٨ = -٤$ وهي سالبة

فيكون (١، ٢) قيمة عظمى.

س = ٢ فإن $١٢(٢)^{٢} - ٢٤(٢) + ٨ = ٨$ وهي موجبة

فتكون (٢، ١) قيمة صغرى.



١٠) أ لتكن الدالة ص = س^{٣} + أس^{٢} + ب

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} + ٢أس

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

٣س^{٢} + ٢أس = ٠

عوّض عن س = ٤ في ٣س^{٢} + ٢أس = ٠ لتحصل على: ٣(٤)^{٢} + ٢أ × ٤ = ٠

٨أ = −٤٨

أ = −٦

عوّض بدل س = ٤، ص = −٢٧، أ = −٦ في ص = س^{٣} + أس^{٢} + ب لتحصل على: ب = ٥

ب معادلة المنحنى هي ص = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٥

فيكون، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} − ١٢س

توجد طريقتان لتحديد نوع النقاط الحرجة:

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٦س − ١٢

عندما س= ٤ فإن $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٦ × ٤ − ١٢ = ١٢

فهي موجبة، وعليه فإن (٤، −٢٧) نقطة صغرى.

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

الآن ادرس الميل على جانبَي النقطة (٤، −٢٧).

عوّض بدل قيمة واحدة من كل جانب من س = ٤

عوّض بدل س = ٣ في $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} − ١٢س

لتحصل على: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣(٣)^{٢} − ١٢(٣) أو −٩ وهي سالبة.

عوّض بدل س = ٥ في $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} − ١٢س

لتحصل على $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$: ٣(٥)^{٢} − ١٢(٥) أو ١٥ وهي موجبة.

وحيث تتغيّر إشارة الميل من سالب إلى موجب عندما تتحرك س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة فتكون (٤، −٢٧) نقطة صغرى.

ج بما أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} − ١٢س، فإنه توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠، ٣س^{٢} − ١٢س = ٠

لا "تقسم" المعادلة على س، فبإجراء القسمة تفقد أحد الحلول س = ٠

٣س (س − ٤) = ٠

س = ٤ معطى في السؤال، أو س = ٠

إذا كان س = ٠ فأوجِد الإحداثي الصادي بالتعويض في معادلة المنحنى.

أي أن ص = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٥

ويكون ص = ٠^{٣} − ٦(٠)^{٢} + ٥ = ٥

فتكون (٠، ٥) النقطة الحرجة الأخرى.

توجد طريقتان لتحديد نوع النقطة الحرجة:

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

لتحدد نوع النقطة عوض بدل س = ٠ في $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$

فيكون $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٦ × ٠ − ١٢ = −١٢ وهي سالبة.

النقطة (٠، ٥) نقطة عظمى.

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

ادرس ميل المنحنى على جانبَي النقطة (٠، ٥).

عوّض البدل بقيمة واحدة من كل جانب من س = ٠

عوّض بدل س = −١ في $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} − ١٢س

لتحصل على: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣(−١)^{٢} − ١٢(−١) = ١٥

وهي موجبة.

عوّض بدل س = ١ في $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣س}^{٢} - \text{١٢س}$

لتحصل على:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣(١)}^{٢} - \text{١٢(١)} = -\text{٩}$ وهي سالبة.

وحيث تتغيّر إشارة الميل من موجب إلى سالب مع تحرك قيمة س على المنحنى من اليسار إلى اليمين، فتكون (٠، ٥) نقطة عظمى.

د تحتاج إلى أن تجد نقطة على المنحنى حيث تكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ قيمة صغرى.

أي أن $\text{٣س}^{٢} - \text{١٢س}$ قيمة صغرى.

أكمل المربع لـ $\text{٣س}^{٢} - \text{١٢س}$

$\text{٣}(\text{س}^{٢} - \text{٤س})$

$= \text{٣}((\text{س} - \text{٢})^{٢} - \text{٢}^{٢})$

$= \text{٣}((\text{س} - \text{٢})^{٢} - \text{٤})$

$= \text{٣}(\text{س} - \text{٢})^{٢} - \text{١٢}$

أقل قيمة للعبارة $\text{٣}(\text{س} - \text{٢})^{٢} - \text{١٢}$ هي $-\text{١٢}$

عندما س = ٢ لأن $\text{٣}(\text{س} - \text{٢})^{٢} \geqslant \text{٠}$

عوّض بدل س = ٢ في معادلة المنحنى لتحصل على الإحداثي الصادي للنقطة:

أي أن $\text{ص} = \text{س}^{٣} - \text{٦س}^{٢} + \text{٥}$ تصبح

$\text{ص} = \text{٢}^{٣} - \text{٦(٢)}^{٢} + \text{٥} = -\text{١١}$

أصغر قيمة للميل هي −١٢ عند النقطة (٢، −١١)

١١) أ $\text{ص} = \text{أس} + \frac{\text{ب}}{\text{س}^{٢}}$

عوّض بدل س = ٢، ص = ١٢ لتحصل على:

$\text{١٢} = \text{٢أ} + \frac{\text{ب}}{\text{٢}^{٢}}$

$\text{٤٨} = \text{٨أ} + \text{ب}$ .... [١]

أعد كتابة $\text{ص} = \text{أس} + \frac{\text{ب}}{\text{س}^{٢}}$ في صورة

$\text{ص} = \text{أس} + \text{بس}^{-٢}$، ثم أوجد المشتقة لتحصل على: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{أ} - \text{٢بس}^{-٣}$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٠}$

$\text{أ} - \frac{\text{٢ب}}{\text{س}^{٣}} = \text{٠}$

وبما أن النقطة الحرجة عند س = ٢

$\text{أ} - \frac{\text{٢ب}}{\text{٢}^{٣}} = \text{٠}$

$\text{أ} = \frac{\text{٢ب}}{\text{٨}}$، ب = ٤أ .... [٢]

استخدم المعادلة [٢] وعوّض بدل ب في المعادلة [١] لتحصل على: ٤٨ = ٨أ + ٤أ

أ = ٤

عوّض بدل أ = ٤ في المعادلة [٢] لتحصل على

ب = ١٦

ب معادلة المنحنى $\text{ص} = \text{٤س} + \frac{\text{١٦}}{\text{س}^{٢}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤} - \frac{\text{٣٢}}{\text{س}^{٣}} = \text{٤} - \text{٣٢س}^{-٣}$

توجد طريقتان لتحديد نوع النقطة الحرجة عند س = ٢

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

أوجِد $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \text{٩٦س}^{-٤} = \frac{\text{٩٦}}{\text{س}^{٤}}$

عوّض بدل س = ٢ في $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{\text{٩٦}}{\text{س}^{٤}}$ لتحصل على:

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{\text{٩٦}}{\text{٢}^{٤}} = \text{٦}$ وهي قيمة موجبة لذا توجد قيمة صغرى عند س = ٢

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

ادرس ميل المنحنى على جانبَي النقطة س = ٢

عوّض بدل س = ١ في $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤} - \frac{\text{٣٢}}{\text{س}^{٣}}$

لتحصل على:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤ - \frac{٣٢}{١^{٣}} = -٢٨$ وهي قيمة سالبة.

عوّض بدل س = ٣ في $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤ - \frac{٣٢}{\text{س}^{٣}}$

لتحصل على: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤ - \frac{٣٢}{٣^{٣}} = \frac{٧٦}{٢٧}$ وهي قيمة موجبة.

حيث إن إشارة ميل المنحنى تتغيّر من سالب إلى موجب عندما تتحرك النقطة س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة، توجد عند س = ٢ نقطة صغرى.

ج) $\text{ص} = ٤\text{س} + ١٦\text{س}^{-٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤ - ٣٢\text{س}^{-٣}$

$= ٤ - \frac{٣٢}{\text{س}^{٣}}$

تكون الدالة متزايدة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} > ٠$

$٤ - \frac{٣٢}{\text{س}^{٣}} > ٠$

$٤ > \frac{٣٢}{\text{س}^{٣}}$

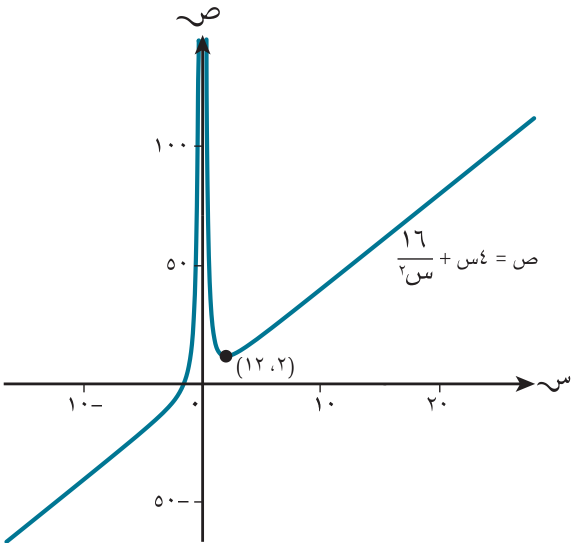
$\text{س}^{٣} > ٨$

$\text{س} > ٢$

للمنحنى قيمة صغرى عند س = ٢ وخط تقارب رأسي (حيث تكون الدالة غير معرّفة) عند س = ٠، ∴ هذه هي القيم الحرجة للدالة.

ونلاحظ من المنحنى أدناه أن $٤ - \frac{٣٢}{\text{س}^{٣}} > ٠$ عندما س < ٠

الدالة متزايدة عند س < ٠ أو س > ٢ كما هو موضّح في المنحنى أدناه:



١٢ أ) لتكن الدالة $\text{ص} = \text{س}^{٢} + \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \text{ب}$

عوّض بدل س= ٣، ص = ٥ لتحصل على:

$٥ = ٣^{٢} + \frac{\text{أ}}{٣} + \text{ب}$

$١٥ = ٢٧ + \text{أ} + ٣\text{ب}$

أ + ٣ب = -١٢ .... [١]

أعد كتابة $\text{ص} = \text{س}^{٢} + \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \text{ب}$ في صورة

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + \text{أس}^{-١} + \text{ب}$

فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} - \text{أس}^{-٢} = ٢\text{س} - \frac{\text{أ}}{\text{س}^{٢}}$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

وعليه يكون $٢\text{س} - \frac{\text{أ}}{\text{س}^{٢}} = ٠$

عندما س = ٣ فإن $٢(٣) - \frac{\text{أ}}{(٣)^{٢}} = ٠$

$٦ - \frac{\text{أ}}{٩} = ٠$

أ = ٥٤

عوّض بدل أ = ٥٤ في المعادلة [١] لتحصل على:

أ + ٣ب = -١٢ ويكون ٥٤ + ٣ب = -١٢

ب = -٢٢

تصبح معادلة المنحنى $\text{ص} = \text{س}^{٢} + \frac{٥٤}{\text{س}} - ٢٢$

ب توجد طريقتان لتحديد نوع النقطة الحرجة عند (٣، ٥):

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

أوجِد $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س - أس^{-٢} = ٢س - ٥٤س^{-٢}$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢ + ١٠٨س^{-٣} = ٢ + \frac{١٠٨}{س^٣}$

عوّض بدل س = ٣ لتحصل على:

$٢ + \frac{١٠٨}{٣^٣} = ٦$ وهي قيمة موجبة.

فتكون (٣، ٥) نقطة صغرى.

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

ادرس ميل المنحنى على جانبَي النقطة (٣، ٥).

عوّض بدل س = ٢ في $\frac{ءص}{ءس} = ٢س - \frac{٥٤}{س^٢}$ لتحصل على:

$\frac{ءص}{ءس} = ٢(٢) - \frac{٥٤}{٢^٢} = -\frac{١٩}{٢}$ وهي قيمة سالبة.

عوّض بدل س = ٤ في $\frac{ءص}{ءس} = ٢س - \frac{٥٤}{س^٢}$ لتحصل على:

$\frac{ءص}{ءس} = ٢(٤) - \frac{٥٤}{٤^٢} = \frac{٣٧}{٨}$ وهي قيمة موجبة.

وحيث إن إشارة ميل المنحنى تتغيّر من سالبة إلى موجبة عندما تتحرك قيمة س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة، فتكون (٣، ٥) نقطة صغرى.

ج $ص = س^٢ + ٥٤س^{-١} - ٢٢$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س - \frac{٥٤}{س^٢}$

تكون الدالة متناقصة عندما $\frac{ءص}{ءس} < ٠$

$٢س - \frac{٥٤}{س^٢} < ٠$

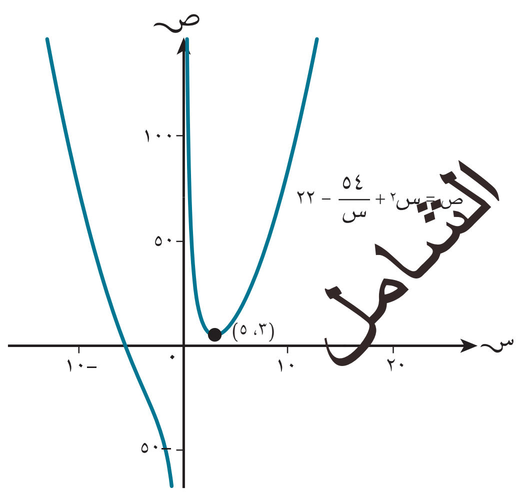
$\frac{٢س^٣ - ٥٤}{س^٢} < ٠$

$س^٣ < ٢٧$

$س < ٣$

للمنحنى قيمة صغرى عند س = ٣ وخط تقارب رأسي (حيث تكون الدالة غير معرّفة) عند س = ٠، ∴ هذه هي القيم الحرجة للدالة.

ونلاحظ من المنحنى أدناه أن $٢س - \frac{٥٤}{س^٢} < ٠$ عندما س < ٠ أو ٠ < س < ٣:



١٣ أ لتكن الدالة $ص = ٢س^٣ + أس^٢ + ب س + ٧$

عوّض بدل س = ٢، ص = −١٣ في الدالة لتحصل على:

$-١٣ = ٢ \times ٢^٣ + أ \times ٢^٢ + ب \times ٢ + ٧$

$-١٣ = ٢٣ + ٤أ + ٢ب$

$٤أ + ٢ب = -٣٦$ .... [١]

بما أن $ص = ٢س^٣ + أس^٢ + ب س + ٧$

فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س^{٢} + ٢أس + ب

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

فيكون ٦س^{٢} + ٢أس + ب = ٠

عوّض بدل س = ٢ لتحصل على:

٦ × ٢^{٢} + ٢أ × ٢ + ب = ٠ .... [٢]

٤أ + ب = −٢٤ .... [٢]

اطرح المعادلة [٢] من المعادلة [١] لتحصل على: ب = −١٢

عوّض بدل ب في المعادلة [٢] لتحصل على:

٤أ + (−١٢) = −٢٤ .... [٢]

أ = −٣

ب حل المعادلة $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ لتحصل على جميع النقاط الحرجة.

من الجزئية السابقة: $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س^{٢} + ٢أس + ب

حيث أ = −٣، ب = −١٢. فيكون

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س^{٢} − ٦س − ١٢

فيكون ٦س^{٢} − ٦س − ١٢ = ٠ أو س^{٢} − س − ٢ = ٠

(س − ٢)(س + ١) = ٠

س = ٢ (معطاة في السؤال)، أو س = −١

عوّض بدل س = −١ في معادلة المنحنى لتحصل على الإحداثي الصادي.

ص = ٢س^{٣} + أس^{٢} + ب س + ٧

ص = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − ١٢ س + ٧

ص = ٢(−١)^{٣} − ٣(−١)^{٢} − ١٢ (−١) + ٧

ص = ١٤

فتكون النقطة الحرجة الأخرى هي (−١، ١٤).

ج توجد طريقتان لتحديد نوع النقطة الحرجة:

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

أوجِد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س^{٢} − ٦س − ١٢

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ١٢س − ٦

عوّض بدل س = ٢ لتجد أن ١٢ × ٢ − ٦ = ١٨ وهي قيمة موجبة، فتكون (٢، −١٣) نقطة صغرى.

عوّض بدل س = −١ لتجد أن ١٢ × ٢ − ٦ = −١٨ وهي قيمة سالبة، فتكون (−١، ١٤) نقطة عظمى.

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

الآن ادرس ميل المنحنى على جانبَي النقطة (٢، −١٣):

عوّض بدل س = ١ في $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س^{٢} − ٦س − ١٢

لتحصل على: $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦(١)^{٢} − ٦(١) − ١٢ = −١٢

وهي قيمة سالبة.

عوّض بدل س = ٣ في $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س^{٢} − ٦س − ١٢

لتحصل على: $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦(٣)^{٢} − ٦(٣) − ١٢ = ٢٤

وهي قيمة موجبة.

وحيث إنه تتغير إشارة ميل المنحنى من سالبة إلى موجبة عندما تتحرك قيم س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة، فإن (٢، −١٣) هي نقطة صغرى.

الآن ادرس ميل المنحنى على جانبَي النقطة (−١، ١٤):

عوّض بدل س = −٢ في

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س^{٢} − ٦س − ١٢ لتحصل على: