الوحدة الرابعة: حلول التمارين
التفاضل

تمارين ٤-١

١) أ ميل الوتر:

$$\text{ج ر} = \frac{٢ - ١,٤٤}{١ - ٠,٨} = ٢,٨$$

$$\text{د ر} = \frac{٢ - ١,٨٥٢٥}{١ - ٠,٩٥} = ٢,٩٥$$

$$\text{هـ ر} = \frac{٢ - ١,٩٧٠١}{١ - ٠,٩٩} = ٢,٩٩$$

الوتر	أ ر	ب ر	ج ر	د ر	هـ ر
الميل	٢	٢,٥	٢,٨	٢,٩٥	٢,٩٩

ب يقترب الميل من ٣

٢) أ ٤ ب −٢

ج $\frac{١}{٢}$ د −٣

٣) $$\text{ميل ل أ} = \frac{(\text{س} + \Delta\text{س})^{٣} - \text{س}^{٣}}{(\text{س} + \Delta\text{س}) - \text{س}}$$

$$= \frac{\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢}(\Delta\text{س}) + ٣\text{س}(\Delta\text{س})^{٢} + (\Delta\text{س})^{٣} - \text{س}^{٣}}{\text{س} + \Delta\text{س} - \text{س}}$$

$$= \frac{٣\text{س}^{٢}(\Delta\text{س}) + ٣\text{س}(\Delta\text{س})^{٢} + (\Delta\text{س})^{٣}}{\Delta\text{س}}$$

$$= ٣\text{س}^{٢} + ٣\text{س}(\Delta\text{س}) + (\Delta\text{س})^{٢}$$

$$\text{نهـا}_{\Delta\text{س} \to ٠} \left(٣\text{س}^{٢} + ٣\text{س}(\Delta\text{س}) + (\Delta\text{س})^{٢}\right) = ٣\text{س}^{٢}$$

تمارين ٤-٢

١) أ $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{س}^{٥}) = ٥ \times \text{س}^{٥-١} = ٥\text{س}^{٤}$

ب $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{س}^{٩}) = ٩ \times \text{س}^{٩-١} = ٩\text{س}^{٨}$

ج $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{س}^{-٤}) = -٤ \times \text{س}^{-٤-١} = -٤\text{س}^{-٥} = -\frac{٤}{\text{س}^{٥}}$

د $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{١}{\text{س}}\right) = \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\text{س}^{-١}\right) = -١ \times \text{س}^{-١-١} = -\text{س}^{-٢} = -\frac{١}{\text{س}^{٢}}$

هـ $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(٨) = \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(٨\text{س}^{٠}) = ٠ \times \text{س}^{-١} = ٠$

و $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}\right) = \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{س}^{\frac{٢}{٣}}) = \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٢}{٣}-١} = \frac{٢}{٣}\text{س}^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{\text{س}}}$

ز) $\frac{ء}{ءس}(س^{٣} × س^{٢}) = \frac{ء}{ءس}(س^{٥}) = ٥ × س^{٥-١} = ٥س^{٤}$

ح) $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{س^{٥}}{س^{٢}}\right) = \frac{ء}{ءس}(س^{٣}) = ٣ × س^{٣-١} = ٣س^{٢}$

٢) أ) $د'(س) = \frac{ء}{ءس}(٢س^{٤}) = ٢ × ٤س^{٤-١} = ٨س^{٣}$

ب) $د'(س) = \frac{ء}{ءس}(٣س^{٥}) = ٣ × ٥س^{٥-١} = ١٥س^{٤}$

ج) $د'(س) = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{س^{٦}}{٢}\right) = \frac{١}{٢}\frac{ء}{ءس}(س^{٦}) = \frac{١}{٢} × ٦س^{٦-١} = ٣س^{٥}$

د) $د'(س) = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{٣}{س}\right) = ٣\frac{ء}{ءس}(س^{-١}) = ٣ × (-١)س^{-١-١} = -٣س^{-٢} = \frac{٣}{س^{٢}}$

هـ) $د'(س) = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{٥}{٣س^{٢}}\right) = \frac{٥}{٣}\frac{ء}{ءس}(-٢)س^{-٢-١} = -\frac{١٠}{٣}س^{-٣} = -\frac{١٠}{٣س^{٣}}$

و) $د'(س) = \frac{ء}{ءس}(-٢) = \frac{ء}{ءس}(-٢س^{٠}) = -٢ × س^{٠-١} = ٠$

ز) $د'(س) = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{٤س}{\sqrt{س}}\right) = ٤\frac{ء}{ءس}(\sqrt{س}) = ٤\frac{ء}{ءس}(س^{\frac{١}{٢}}) = ٤ × \frac{١}{٢}س^{\frac{١}{٢}-١} = ٢س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{س}}$

ح) $د'(س) = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{٢س\sqrt{س}}{٣س^{٣}}\right) = \frac{٢}{٣}\frac{ء}{ءس}\left(\frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{س^{٣}}\right) = \frac{٢}{٣}\frac{ء}{ءس}(س^{-\frac{٣}{٢}}) = \frac{٢}{٣} × \left(-\frac{٣}{٢}\right)س^{-\frac{٣}{٢}-١} = -س^{-\frac{٥}{٢}} = -\frac{١}{\sqrt{س^{٥}}}$

٣) أ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس}(٥س^{٢} - س + ١) = ٥ × ٢س^{٢-١} - ١س^{١-١} + ٠ = ١٠س - ١$

ب) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس}(٢س^{٣} + ٨س - ٤) = ٢ × ٣س^{٢} + ٨ × ١س^{١-١} - ٠ = ٦س^{٢} + ٨$

ج) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس}(٧ - ٣س + ٥س^{٢}) = ٠ - ٣ + ٥ × ٢س^{٢-١} = ١٠س - ٣$

د) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس}((س + ٥)(س - ٤)) = \frac{ء}{ءس}(س^{٢} + س - ٢٠) = ٢س + ١$

هـ) $\frac{ء}{ءس}\left((٢س^{٢} - ٣)^{٢}\right) = \frac{ء}{ءس}(٤س^{٤} - ١٢س^{٢} + ٩)$

$= ٤ × ٤س^{٣} - ١٢ × ٢س + ٠$

$= ١٦س^{٣} - ٢٤س$

و) $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{٢س - ٥}{س^{٢}}\right) = \frac{ء}{ءس}(٢س^{-١} - ٥س^{-٢})$

$= ٢ × (-١)س^{-١-١} - ٥ × (-٢)س^{-٢-١}$

$= -٢س^{-٢} + ١٠س^{-٣}$

$= \frac{١٠}{س^{٣}} - \frac{٢}{س^{٢}}$

ز $\frac{د}{د س}\left(٧س^{٢} - \frac{٣}{س} + \frac{٢}{س^{٢}}\right)$

$= \frac{د}{د س}\left(٧س^{٢} - ٣س^{-١} + ٢س^{-٢}\right)$

$= ٧ \times ٢س^{٢-١} - ٣ \times (-١)س^{-١-١} + ٢ \times (-٢)س^{-٢-١}$

$= ١٤س + \frac{٣}{س^{٢}} - \frac{٤}{س^{٣}}$

ح $\frac{ى}{ى س}\left(٣س + \frac{٥}{س} - \frac{١}{٢\sqrt{س}}\right)$

$= \frac{ى}{ى س}\left(٣س + ٥س^{-١} - \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}}\right)$

$= ٣ + ٥ \times (-١)س^{-١-١} - \frac{١}{٢} \times \left(-\frac{١}{٢}\right) س^{-\frac{١}{٢}-١}$

$= ٣ - \frac{١٥}{س^{٢}} + \frac{١}{٤\sqrt{س^{٣}}}$

ط $\frac{ى}{ى س}\left(\frac{٤س^{٢} + ٣س - ٢}{\sqrt{س}}\right)$

$= \left(٤س^{\frac{٣}{٢}} + ٣س^{\frac{١}{٢}} - ٢س^{-\frac{١}{٢}}\right)$

$= ٤ \times \frac{٣}{٢}س^{\frac{٣}{٢}-١} + ٣ \times \frac{١}{٢}س^{\frac{١}{٢}-١} - ٢ \times \left(-\frac{١}{٢}\right)س^{-\frac{١}{٢}-١}$

$= ٦س^{\frac{١}{٢}} + \frac{٣}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{٣}{٢}}$

$= ٦\sqrt{س} + \frac{٣}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{\sqrt{س^{٣}}}$

٤) أ $\frac{ى}{ى س}\left(س^{٢} + س - ٤\right) = ٢س + ١$

عندما س = ١، $\frac{ى ص}{ى س} = ٢ \times ١ + ١ = ٣$

ب $\frac{ى}{ى س}\left(٥ - \frac{٢}{س}\right) = \frac{د}{د س}\left(٥ - ٢س^{-١}\right) = ٢س^{-١} = \frac{٢}{س^{٢}}$

عندما س = ٢، $\frac{ى ص}{ى س} = \frac{٢}{٢^{٢}} = \frac{١}{٢}$ أو ٠٫٥

ج $\frac{ى}{ى س}\left(\frac{٣س - ٢}{س^{٢}}\right) = \frac{د}{د س}\left(٣س^{-١} - ٢س^{-٢}\right) = -\frac{٣}{س^{٢}} + \frac{٤}{س^{٣}}$

عندما س = −٢، $\frac{د ص}{د س} = \frac{٣}{(-٢)^{٢}} + \frac{٤}{(-٢)^{٣}} = -\frac{٣}{٤} - \frac{٤}{٨} = -\frac{٥}{٤}$ أو −١٫٢٥

٥) أ $\text{ص} = (٢\text{س} - ٥)(\text{س} + ٣)$

$= ٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ١٥$

$\frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = ٤\text{س} + ١$

$\frac{\text{ى}^{٢}\text{ص}}{\text{ىس}^{٢}} = ٤$

ب $\text{ص} = \frac{٢\text{س} + ٣\text{س}^{٢} - ٥\text{س}^{٣}}{\text{س}}$

$= ٢ + ٣\text{س} - ٥\text{س}^{٢}$

$\frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = ٣ - ١٠\text{س}$

$\frac{\text{ى}^{٢}\text{ص}}{\text{ىس}^{٢}} = -١٠$

ج $\text{ص} = \text{س}\,(٣\text{س} + ١)(٣\text{س} - ١)$

$= ٩\text{س}^{٣} - \text{س}$

$\frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = ٢٧\text{س}^{٢} - ١$

$\frac{\text{ى}^{٢}\text{ص}}{\text{ىس}^{٢}} = ٥٤\text{س}$

٦) $\text{ص} = \text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢}$

$\frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = ٣\text{س}^{٢} - ٤\text{س}$

$\frac{\text{ى}^{٢}\text{ص}}{\text{ىس}^{٢}} = ٦\text{س} - ٤$

$٦\text{س} - ٤ < ٠$

$\text{س} < \frac{٢}{٣}$

٧) أ $\text{د(س)} = ٣\text{س}^{٥} - ٨\text{س}^{٣} + ٤$

$\text{د}'\text{(س)} = ١٥\text{س}^{٤} - ٢٤\text{س}^{٢}$

$\text{د}''\text{(س)} = ٦٠\text{س}^{٣} - ٤٨\text{س}$

ب $\text{د(س)} = ٧ - \frac{١}{\text{س}}$

$= ٧ - \text{س}^{-١}$

$\text{د}'\text{(س)} = \text{س}^{-٢}$

$\text{د}''\text{(س)} = -٢\text{س}^{-٣}$

$= -\frac{٢}{\text{س}^{٣}}$

ج $\text{د(س)} = \frac{٥}{\text{س}^{٢}} - \frac{٣}{٢\text{س}^{٥}}$

$= ٥\text{س}^{-٢} - \frac{٣}{٢}\text{س}^{-٥}$

$\text{د}'\text{(س)} = -١٠\text{س}^{-٣} + \frac{١٥}{٢}\text{س}^{-٦}$

$\text{د}''\text{(س)} = ٣٠\text{س}^{-٤} - ٤٥\text{س}^{-٧}$

$= \frac{٣٠}{\text{س}^{٤}} - \frac{٤٥}{\text{س}^{٧}}$

٨) $\text{د(س)} = ٣\text{س}^{٢} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣}$

$\text{د}'\text{(س)} = ٦\text{س} + ٢\text{س}^{٢}$

$\text{د}''\text{(س)} = ٦ + ٤\text{س}$

$٦ + ٤\text{س} > ٠$

$\text{س} > -\frac{٣}{٢}$

٩) $\text{ص} = (٢\text{س} - ٥)(\text{س} + ٤)$

فكّ الأقواس لتحصل على:

$\text{ص} = ٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٢٠$

$\frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = ٤\text{س} + ٣$

عندما $\text{س} = ٣$

$\frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = ٤(٣) + ٣$

$\frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = ١٥$

الميل $= ١٥$

١٠) $\text{س ص} = ١٢$

اكتب ص بدلالة س:

$\text{ص} = \frac{١٢}{\text{س}}$

$\text{ص} = ١٢\text{س}^{-١}$

$\frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = -١٢\text{س}^{-٢}$ أو $-\frac{١٢}{\text{س}^{٢}}$

عندما $\text{س} = ٢$، $\frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = -\frac{١٢}{٢^{٢}} = -٣$

١١) المقطع الصادي يكون عند $س = ٠$

$ص = ٥س^{٢} - ٨س + ٣$

$\frac{ءص}{ءس} = ١٠س - ٨$

عندما $س = ٠$ يكون ميل مماس المنحنى:

$\frac{ءص}{ءس} = ١٠(٠) - ٨$ أو -٨

> في التمرين ١٠، لا تخلط بين "أوجد ميل المماس عند النقطة حيث س = ٩" مع "أوجد ميل مماس المنحنى عند النقاط حيث يساوي الميل ٩"

١٢) $ص = س^{٣} - ٣س - ٨$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} - ٣$

حل المعادلة $٣س^{٢} - ٣ = ٩$ يعطي إحداثيات النقاط التي يكون الميل عندها ٩

$٣س^{٢} = ١٢$

$س^{٢} = ٤$

$س = \pm ٢$

عوّض بدل $س = ٢$ في معادلة المنحنى لتحصل على:

$ص = س^{٣} - ٣س - ٨$

$ص = ٢ - ٣(٢) - ٨$

$ص = -٦$

إذا كانت $س = -٢$،

فإنّ قيمة $ص = س^{٣} - ٣س - ٨$ تساوي:

$ص = (-٢)^{٣} - ٣(-٢) - ٨$

$ص = -١٠$

النقطتان هما $(-٢، -١٠)$، $(٢، -٦)$

١٣) يقطع المنحنى محور السينات حيث $ص = ٠$

أي $ص = \frac{٥س - ١٠}{س^{٢}}$ يصبح:

$٠ = \frac{٥س - ١٠}{س^{٢}}$

$٥س - ١٠ = ٠$

$س = ٢$

أعد كتابة $ص = \frac{٥س - ١٠}{س^{٢}}$:

$ص = \frac{٥س}{س^{٢}} - \frac{١٠}{س^{٢}}$ أو $ص = ٥س^{-١} - ١٠س^{-٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = -٥س^{-٢} + ٢٠س^{-٣}$

أو $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٥}{س^{٢}} + \frac{٢٠}{س^{٣}}$

عوّض بدل $س = ٢$ في $\frac{ءص}{ءس}$ لتحصل على:

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٥}{٢^{٢}} + \frac{٢٠}{٢^{٣}}$

$= \frac{-٥}{٤} + \frac{٢٠}{٨}$

$= \frac{٥}{٤}$

ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطعه مع محور السينات يساوي $\frac{٥}{٤}$

١٤) أ $ص = س^{٢} - ٤س - ٥$، $ص = ١ - ٣س$

حل المعادلتين آنيًا لتجد النقطتَين أ، ب.

$\therefore س^{٢} - ٤س - ٥ = ١ - ٣س$

$س^{٢} - س - ٦ = ٠$

$(س - ٣)(س + ٢) = ٠$

$س = ٣$ أو $س = -٢$

عوّض بدل $س = ٣$ في المعادلة الخطيّة لتحصل على الإحداثي الصادي للنقطة.

$ص = ١ - ٣س$

$ص = ١ - ٣(٣)$

$ص = -٨$

عوّض بدل س = −٢، في المعادلة الخطيّة لتحصل على الإحداثي الصادي للنقطة.

ص = ١ − ٣س

ص = ١ − ٣(٣)

ص = ٧

النقطتان هما أ (−٢، ٧)؛ (٣، −٨)

ب اشتق معادلة المنحنى ص = س^{٢} − ٤س − ٥ لتحصل على:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س − ٤

عندما س = ٣، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢(٣) − ٤ = ٢

عندما س = −٢، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢(−٢) − ٤ = −٨

الميل عند كلّ من النقطتَين أ، **ب** هو ٢، −٨

١٥) إذا علمت أن ص = أس^{٢} + ب س

فعوّض بدل س = ٣ و ص = −٣ لتحصل على:

−٣ = أ(٣)^{٢} + ب(٣)

−٣ = ٩أ + ٣ب

٣أ + ب = −١ .... [١]

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢أس + ب

عوّض بدل س = ٣ في $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢أس + ب لتحصل على:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢أ(٣) + ب

عندما س = ٣، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٥

فيكون ٦أ + ب = ٥

اطرح المعادلة [٢] من المعادلة [١] لتحصل على:

−٣أ = −٦

عوّض بدل أ = ٢ في المعادلة [١] لتحصل على:

٣أ + ب = −١

٣(٢) + ب = −١

ب = −٧

فيكون الحل: أ = ٢، ب = −٧

١٦) إذا علمت أن ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ٧

فعوّض بدل س = ١، ص = ٥ لتحصل على:

١^{٣} + أ(١)^{٢} + ب(١) + ٧ = ٥

أ + ب = −٣ .... [١]

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س^{٢} + ٢أ(١) + ب

عندما س = ١، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = −٥ فيكون:

−٥ = ٣(١)^{٢} + ٢أ(١) + ب

٢أ + ب = −٨ .... [٢]

اطرح المعادلة [٢] من المعادلة [١] لتحصل على:

−أ = ٥

أ = −٥

عوّض بدل أ = −٥ في المعادلة [١] لتحصل على:

−٥ + ب = −٣

ب = ٢

الحل: أ = −٥، ب = ٢

١٧) إذا علمت أن $\text{ص} = \text{أ}\,\text{س} + \dfrac{\text{ب}}{\text{س}^{\text{٢}}}$:

أعد كتابة المعادلة في صورة: $\text{ص} = \text{أ}\,\text{س} + \text{ب}\,\text{س}^{-\text{٢}}$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{أ} - \text{٢}\,\text{ب}\,\text{س}^{-\text{٣}}$ أو $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{أ} - \dfrac{\text{٢ب}}{\text{س}^{\text{٣}}}$

عوّض بدل س = ١، $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{١٦}$ لتحصل على:

$\text{١٦} = \text{أ} - \dfrac{\text{٢ب}}{\text{١}^{\text{٣}}}$

١٦ = أ − ٢ب

عوّض بدل س = −١، $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{٨}$ لتحصل على:

$-\text{٨} = \text{أ} - \dfrac{\text{٢ب}}{(-\text{١})^{\text{٣}}}$

−٨ = أ + ٢ب .... [٢]

اطرح المعادلة [٢] من المعادلة [١] لتحصل على:

٢٤ = −٤ب

ب = −٦

عوّض بدل ب = −٦ في المعادلة [١] لتحصل على:

١٦ = أ − ٢(−٦)

أ = ٤

الحل: أ = ٤، ب = −٦

١٨) إذا علمت أن $\text{ص} = \text{س}^{\text{٣}} + \text{أ}\,\text{س}^{\text{٢}} + \text{ب}\,\text{س} + \text{٣}$

فاشتق بالنسبة إلى س لتحصل على:

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣}\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢أ}\,\text{س} + \text{ب}$

عوّض بدل س = ١، و $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٠}$ لتحصل على:

$\text{٠} = \text{٣}(\text{١})^{\text{٢}} + \text{٢أ}(\text{١}) + \text{ب}$

٢أ + ب = −٣ .... [١]

عوّض بدل س = ٦، و $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٠}$ لتحصل على:

$\text{٠} = \text{٣}(\text{٦})^{\text{٢}} + \text{٢أ}(\text{٦}) + \text{ب}$

١٢أ + ب = −١٠٨ .... [٢]

اطرح المعادلة [٢] من المعادلة [١] لتحصل على:

−١٠أ = ١٠٥

أ = −١٠,٥

عوّض بدل أ = −١٠,٥ في المعادلة [١] لتحصل على:

٢(−١٠,٥) + ب = −٣

ب = ١٨

الحل: أ = −١٠,٥، ب = ١٨

١٩) إذا علمت أن $\text{ص} = \text{٢}\text{س}^{\text{٣}} - \text{٣}\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣٦}\text{س} + \text{٥}$

فأوجد مشتقة الدالة لتحصل على:

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٦}\text{س}^{\text{٢}} - \text{٦}\text{س} - \text{٣٦}$

نريد أن تكون $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} < \text{٠}$:

$\text{٦}\text{س}^{\text{٢}} - \text{٦}\text{س} - \text{٣٦} < \text{٠}$

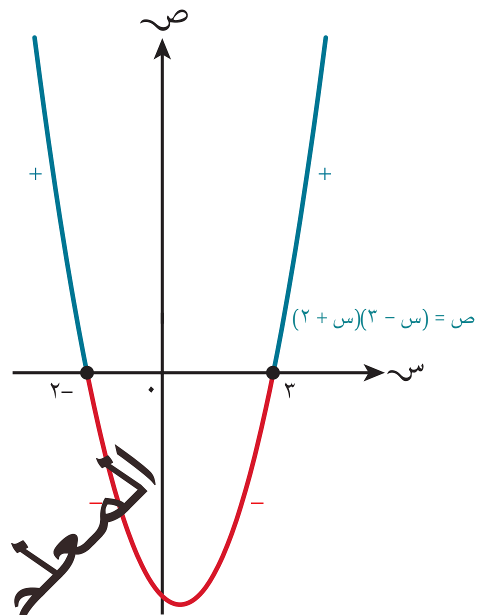
$\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{٦} < \text{٠}$

حلّل إلى العوامل الطرف الأيمن من المتباينة:

$(\text{س} - \text{٣})(\text{س} + \text{٢}) < \text{٠}$

التمثيل البياني للدالة ص = (س − ٣)(س + ٢) قطع مكافئ شكله ∪ .

يقطع محور السينات عند س = −٢، س = ٣



لتكون (س − ٣) (س + ٢) $<$ ٠ نبحث عن مجال قيم س التي يكون المنحنى عندها سالبًا "تحت محور السينات".

الحل: $-٢ < س < ٣$

٢٠) إذا علمت أن $ص = ٤س^{٣} + ٣س^{٢} - ٦س - ٩$

فاشتق الدالة لتحصل على:

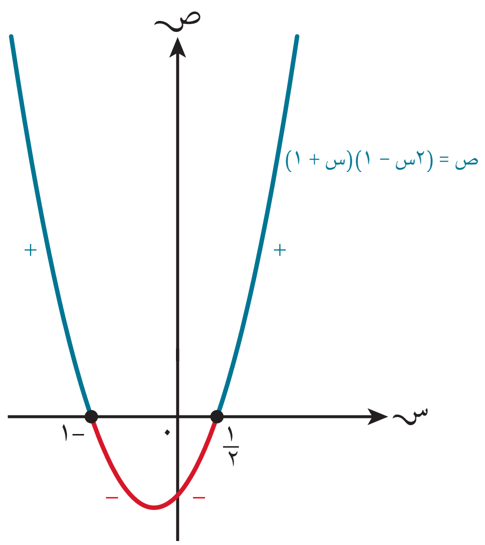
$$\frac{ءص}{ءس} = ١٢س^{٢} + ٦س - ٦$$

نبحث عندما $\frac{ءص}{ءس} \geqslant ٠$ فيكون:

$$١٢س^{٢} + ٦س - ٦ \geqslant ٠$$

أو $٢س^{٢} + س - ١ \geqslant ٠$

$$(٢س - ١)(س + ١) \geqslant ٠$$



التمثيل البياني للدالة ص = (٢س − ١) (س + ١) قطع مكافئ شكله ∪.

يقطع التمثيل البياني محور السينات عند س = −١، س = $\frac{١}{٢}$

لتكون (٢س − ١) (س + ١) نبحث عن مجال قيم س التي يكون المنحنى عندها موجبًا.

الحل: $س \leqslant -١$ و $س \geqslant \frac{١}{٢}$

٢١) إذا علمت أن $ص = ٣س^{٣} + ٦س^{٢} + ٤س - ٥$

فأوجد مشتقة الدالة لتحصل على:

$$\frac{ءص}{ءس} = ٩س^{٢} + ١٢س + ٤$$

أكمل المربّع لتحصل على:

$$\frac{ءص}{ءس} = ٩\left(س^{٢} + \frac{١٢}{٩}س\right) + ٤$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٩\left(\left(س + \frac{١٢}{١٨}\right)^{٢} - \left(\frac{١٢}{١٨}\right)^{٢}\right) + ٤$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٩\left(س + \frac{٢}{٣}\right)^{٢} - ٩\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} + ٤$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٩\left(س + \frac{٢}{٣}\right)^{٢}$$

المقدار $٩\left(س + \frac{٢}{٣}\right)^٢$ دائمًا $\geqslant ٠$ أي أنه لن يكون سالبًا لأي قيمة من قيم س.

٢٢) $ص = ٦س^٢ + ١١س - ٣٥$

$\frac{ءص}{ءس} = ١٢س + ١١$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ١٢$

٢٣) $د(س) = س^{-\frac{١}{٢}} + س^٢$

$د'(س) = -\frac{١}{٢}س^{-\frac{٣}{٢}} + ٢س$

$د''(س) = \frac{٣}{٤}س^{-\frac{٥}{٢}} + ٢$

$\frac{٣}{٤}س^{-\frac{٥}{٢}} + ٢ = ٢٦$

$س^{-\frac{٥}{٢}} = ٣٢$

$س = ٣٢^{-\frac{٢}{٥}}$

$= \frac{١}{٤}$

٢٤) أ $ص = ٥س^٢ - ٢س^٣ + ١٥ - ٦س$

$\frac{ءص}{ءس} = ١٠س - ٦س^٢ - ٦$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ١٠ - ١٢س$

عند س = ١، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = -٢$

ب $ص = س + ٤ - س^{-١}$

$\frac{ءص}{ءس} = ١ + س^{-٢}$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = -\frac{٢}{س^٣}$

عند س = ٢، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = -\frac{١}{٤}$

ج $د(س) = س^{\frac{١}{٣}} + \frac{١}{٢}س^٢$

$د'(س) = \frac{١}{٣}س^{-\frac{٢}{٣}} + س$

$د''(س) = -\frac{٢}{٩}س^{-\frac{٥}{٣}} + ١$

عند س = ٨، $د''(س) = \frac{١٤٣}{١٤٤}$

٢٥) $د'(س) = ٤س^٣ - ٢بس$

$د'(١) = ٤ \times ١^٣ - ٢ب \times ١$

$د'(١) = ٤ - ٢ب$

$٤ - ٢ب = ٧$

$ب = -\frac{٣}{٢}$

$د'(س) = ٤س^٣ + ٣س$

$د''(س) = ١٢س^٢ + ٣$

$د''(-١) = ١٥$

٢٦) $د(س) = ١٨ + س^٢ - ٢س^{-٢}$

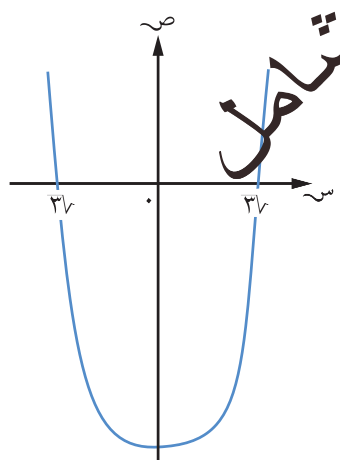
$د'(س) = ٢س + ٦س^{-٣}$

$د''(س) = ٢ - ١٨س^{-٤}$

$د''(س) \geqslant ٠$

$٢ - \frac{١٨}{س^٤} \geqslant ٠$

$س^٤ - ٩ \geqslant ٠$



نستنتج من التمثيل البياني للدالة $ص = س^٤ - ٩$ أن مجال القيم هو $-\sqrt{٣} \geqslant س \geqslant \sqrt{٣}$، ولكن

$د(س) = ١٨ + س^٢ - ٣س^{-٢}$ غير معرّفة عندما س = ٠

$\therefore$ المدى هو $-\sqrt{٣} \geqslant س > ٠$، $٠ < س \leqslant \sqrt{٣}$

تمارين ٤-٣

١) أ $\frac{ء}{ءس}\left((س+٤)^{٦}\right) = ٦(س+٤)^{٦-١} \times ١ = ٦(س+٤)^{٥}$

ب $\frac{ء}{ءس}\left((٢س+٣)^{٨}\right) = ٨(٢س+٣)^{٨-١} \times ٢ = ١٦(٢س+٣)^{٧}$

ج $\frac{ء}{ءس}\left((٣-٤س)^{٥}\right) = ٥(٣-٤س)^{٥-١} \times -٤ = -٢٠(٣-٤س)^{٤}$

د $\frac{ء}{ءس}\left((\frac{١}{٢}س+١)^{٩}\right) = ٩(\frac{١}{٢}س+١)^{٩-١} \times \frac{١}{٢} = \frac{٩}{٢}(\frac{١}{٢}س+١)^{٨}$

هـ $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{(٥س-٢)^{٨}}{٤}\right) = \frac{١}{٤}\frac{ء}{ءس}\left((٥س-٢)^{٨}\right) = \frac{١}{٤} \times ٨(٥س-٢)^{٨-١} \times ٥ = ١٠(٥س-٢)^{٧}$

و $\frac{ء}{ءس}\left(٥(٢س-١)^{٥}\right) = ٥\frac{ء}{ءس}\left((٢س-١)^{٥}\right) = ٥ \times ٥(٢س-١)^{٥-١} \times ٢ = ٥٠(٢س-١)^{٤}$

ز $\frac{ء}{ءس}\left(٢(٤-٧س)^{٤}\right) = ٢\frac{ء}{ءس}\left((٤-٧س)^{٤}\right) = ٢ \times ٤(٤-٧س)^{٤-١} \times (-٧) = -٥٦(٤-٧س)^{٣}$

ح $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{١}{٥}(٣س-١)^{٧}\right) = \frac{١}{٥}\frac{ء}{ءس}\left((٣س-١)^{٧}\right)$

$= \frac{٧}{٥}(٣س-١)^{٧-١} \times ٣$

$= \frac{٢١}{٥}(٣س-١)^{٦}$

ط $\frac{ء}{ءس}\left((س^{٢}+٣)^{٥}\right) = ٥(س^{٢}+٣)^{٥-١} \times ٢س$

$= ١٠س(س^{٢}+٣)^{٤}$

ي $\frac{ء}{ءس}\left((٢-س^{٢})^{٨}\right) = ٨ \times (٢-س^{٢})^{٨-١} \times (-٢س)$

$= -١٦س(٢-س^{٢})^{٧}$

ك $\frac{ء}{ءس}\left((س^{٢}+٤س)^{٣}\right) = ٣(س^{٢}+٤س)^{٣-١} \times (٢س+٤)$

$= ٣(٢س+٤)(س^{٢}+٤س)^{٢}\ldots$ لاحظ أن $(س^{٢}+٤س)^{٢} = س^{٢}(س+٤)^{٢}$

$= ٦س^{٢}(س+٢)(س+٤)^{٢}$

ل $\frac{ء}{ءس}\left((س^{٢}-\frac{٥}{س})^{٥}\right) = \frac{ء}{ءس}\left((س^{٢}-\frac{٥}{س})^{٥}\right)$

$= ٥ \times (س^{٢}-٥س^{-١})^{٥-١} \times \left(٢س+\frac{٥}{س^{٢}}\right)$

$= ٥\left(٢س + \frac{٥}{س^{٢}}\right)\left(س^{٢} - \frac{٥}{س}\right)^{٤}$

$= ٥\left(\frac{٢س^{٣} + ٥}{س^{٢}}\right)\left(\frac{س^{٣} - ٥}{س}\right)^{٤}$

$= \frac{٥(٢س^{٣} + ٥)(س^{٣} - ٥)^{٤}}{س^{٦}}$

٢) أ $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{١}{س + ٢}\right) = \frac{ء}{ءس}\left((س + ٢)^{-١}\right)$

$= -١(س + ٢)^{-١-١} \times ١$

$= -\frac{١}{(س + ٢)^{٢}}$

ب $= \frac{ء}{ءس}\left(\frac{٣}{س - ٥}\right) = ٣\,\frac{ء}{ءس}\left((س - ٥)^{-١}\right)$

$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{٣}{س - ٥}\right) = ٣ \times (-١)(س - ٥)^{-١-١}$

$= -\frac{٣}{(س - ٥)^{٢}}$

ج $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{٨}{٣ - ٢س}\right) = ٨\,\frac{ء}{ءس}\left((٣ - ٢س)^{-١}\right)$

$= ٨(-١)(٣ - ٢س)^{-١-١} \times (-٢)$

$= \frac{١٦}{(٣ - ٢س)^{٢}}$

أو لتكن $ص = \frac{٨}{٣ - ٢س}$

أعد كتابة الدالة في صورة $ص = ٨(٣ - ٢س)^{-١}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن $ع = ٣ - ٢س$، فتصبح $ص = ٨ع^{-١}$

$\frac{ءع}{ءس} = -٢$، $\frac{ءص}{ءس} = -٨ع^{-١}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

$= -٨ع^{-٢} \times -٢$

$= ١٦ع^{-٢}$

$= \frac{١٦}{(٣ - ٢س)^{٢}}$

د $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{١٦}{س^{٢} + ٢}\right) = ١٦\,\frac{ء}{ءس}\left((س^{٢} + ٢)^{-١}\right)$

$= ١٦ \times (-١)(س^{٢} + ٢)^{-١-١} \times ٢س$

$= -\frac{٣٢س}{(س^{٢} + ٢)^{٢}}$

هـ $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{٤}{(٣س + ١)^{٦}}\right) = \frac{ء}{ءس}\left((٣س + ١)^{-٦}\right)$

$= ٤ \times (-٦)(٣س + ١)^{-٦-١} \times ٣$

$= -\frac{٧٢}{(٣س + ١)^{٧}}$

و $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{٣}{٢(٣س + ١)^{٥}}\right) = \frac{٣}{٢}\,\frac{ء}{ءس}\left((٣س + ١)^{-٥}\right)$

$= \frac{٣}{٢} \times (-٥)(٣س + ١)^{-٥-١} \times ٣$

$= -\frac{٤٥}{٢(٣س + ١)^{٦}}$

ز $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{٨}{س^{٢} + ٢س}\right) = ٨\,\frac{ء}{ءس}\left((س^{٢} + ٢س)^{-١}\right)$

$= ٨(-١)(س^{٢} + ٢س)^{-١-١} \times (٢س + ٢)$

$= -\frac{١٦(س + ١)}{س^{٢}(س + ٢)^{٢}}$

ح $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{٧}{(٢س^{٢} - ٥س)^{٧}}\right)$

$= ٧\,\frac{ء}{ءس}\left((٢س^{٢} - ٥س)^{-٧}\right)$

$= ٧ \times (-٧)(٢س^{٢} - ٥س)^{-٧-١} \times (٤س - ٥)$

$= -\frac{٤٩(٤س - ٥)}{(٢س^{٢} - ٥س)^{٨}} \ldots$

لاحظ أن $(٢س^{٢} - ٥س)^{٨} = (٢س - ٥)^{٨}\,س^{٨}$

$= -\frac{٤٩(٤س - ٥)}{(٢س - ٥)^{٨} س^{٨}}$

يمكن تبسيط الإجابة إلى:

$= -\frac{٤٩(٤س - ٥)}{(س(٢س - ٥))^{٨}}$

$= -\frac{٤٩(٤س - ٥)}{س^{٨}(٢س - ٥)^{٨}}$

أو لتكن $ص = \frac{٧}{(٢س^{٢} - ٥س)^{٧}}$

أعد كتابة الدالة في صورة

$ص = ٧(٢س^{٢} - ٥س)^{-٧}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن $ع = ٢س^{٢} - ٥س$ فيكون $ص = ٧(ع)^{-٧}$

$\frac{ءع}{ءس} = ٤س - ٥$، $\frac{ءص}{ءس} = -٤٩ع^{-٨}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

$= -٤٩ع^{-٨}(٤س - ٥)$

$= \frac{٤٩(٤س - ٥)}{س^{٨}(٢س - ٥)^{٨}}$

٣) أ $\frac{ء}{ءس}(\sqrt{س - ٥}) = \frac{ء}{ءس}((س - ٥)^{\frac{١}{٢}})$

$= \frac{١}{٢}(س - ٥)^{\frac{١}{٢}-١} \times ١$

$= \frac{١}{٢\sqrt{س - ٥}}$

ب $\frac{ء}{ءس}(\sqrt{٢س + ٣}) = \frac{ء}{ءس}((٢س + ٣)^{\frac{١}{٢}})$

$= \frac{١}{٢}(٢س + ٣)^{\frac{١}{٢}-١} \times ٢$

$= \frac{١}{\sqrt{٢س + ٣}}$

ج $\frac{ء}{ءس}(\sqrt{٢س^{٢} - ١}) = \frac{ء}{ءس}((٢س^{٢} - ١)^{\frac{١}{٢}})$

$= \frac{١}{٢}(٢س^{٢} - ١)^{\frac{١}{٢}-١} \times ٤س$

$= \frac{٢س}{\sqrt{٢س^{٢} - ١}}$

د $\frac{ء}{ءس}(\sqrt{س^{٣} - ٥س}) = \frac{ء}{ءس}((س^{٣} - ٥س)^{\frac{١}{٢}})$

$= \frac{١}{٢}(س^{٣} - ٥س)^{\frac{١}{٢}-١} \times (٣س^{٢} - ٥)$

$= \frac{٣س^{٢} - ٥}{٢\sqrt{س^{٣} - ٥س}}$

هـ $\frac{ء}{ءس}(\sqrt[٣]{٥ - ٢س}) = \frac{ء}{ءس}((٥ - ٢س)^{\frac{١}{٣}})$

$= \frac{١}{٣}(٥ - ٢س)^{\frac{١}{٣}-١} \times (-٢)$

$= -\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{(٥ - ٢س)^{٢}}}$

أو:

لتكن $ص = \sqrt[٣]{٥ - ٢س}$

أعد كتابة الدالة في صورة $ص = (٥ - ٢س)^{\frac{١}{٣}}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن $ع = ٥ - ٢س$ فيكون $ص = ع^{\frac{١}{٣}}$

$\frac{ءع}{ءس} = -٢$، $\frac{ءص}{ءع} = \frac{١}{٣}ع^{-\frac{٢}{٣}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

$= \frac{١}{٣}ع^{-\frac{٢}{٣}} \times -٢$

$= -\frac{٢}{٣ع^{\frac{١}{٣}}}$

$= -\frac{٢}{٣(٥ - ٢س)^{\frac{٢}{٣}}}$

$= -\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{(٥ - ٢س)^{٢}}}$

و) $\frac{ء}{ء س}\left(٢\sqrt{٣س + ١}\right) = ٢ \frac{ء}{ء س}\left((٣س + ١)^{\frac{١}{٢}}\right)$

$= ٢ \times \frac{١}{٢}(٣س + ١)^{\frac{١}{٢}-١} \times ٣$

$= \frac{٣}{\sqrt{٣س + ١}}$

ز) $\frac{ء}{ء س}\left(\frac{١}{\sqrt{٢س - ٥}}\right) = \frac{ء}{ء س}\left((٢س - ٥)^{-\frac{١}{٢}}\right)$

$= -\frac{١}{٢}(٢س - ٥)^{-\frac{١}{٢}-١} \times ٢$

$= -\frac{١}{\sqrt{(٢س - ٥)^{٣}}}$

ح) $\frac{ء}{ء س}\left(\frac{٦}{\sqrt[٣]{٢ - ٣س}}\right) = ٦ \times \frac{ء}{ء س}\left((٢ - ٣س)^{-\frac{١}{٣}}\right)$

$= ٦ \times \left(-\frac{١}{٣}\right)(٢ - ٣س)^{-\frac{١}{٣}-١} \times (-٣)$

$= \frac{٦}{\sqrt[٣]{(٢ - ٣س)^{٤}}}$

أو:

لتكن $ص = \frac{٦}{\sqrt[٣]{٢ - ٣س}}$

أعد كتابة الدالة في صورة $ص = ٦\ (٢ - ٣س)^{-\frac{١}{٣}}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن $ع = ٢ - ٣س$ فيكون $ص = ٦ع^{-\frac{١}{٣}}$

$\frac{ءع}{ء س} = -٣$، $\frac{ءص}{ءع} = -\frac{١}{٣} \times ٦ع^{-\frac{٤}{٣}}$

$\frac{ءص}{ء س} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ء س}$

$= -٢ع^{-\frac{٤}{٣}} \times -٣$

$= -\frac{٦}{ع^{\frac{٤}{٣}}}$

$= \frac{٦}{\sqrt[٣]{(٢ - ٣س)^{٤}}}$

٤) أ) استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن $ع = ٢س - ٣$ فيكون $ص = ع^{٥}$

$\frac{ءع}{ء س} = ٢$، $\frac{ءص}{ءع} = ٥ع^{٤}$

$\frac{ءص}{ء س} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ء س}$

$= ٥ع^{٤} \times ٢$

$= ٥(٢س - ٣)^{٤} \times ٢$

$= ١٠(٢س - ٣)^{٤}$

عندما $س = ٢$ يكون ميل المماس للمنحنى:

$= ١٠(٢ \times ٢ - ٣)^{٤} = ١٠$

٥) $ص = \frac{٦}{(س - ١)^{٢}}$

أعد كتابة الدالة في صورة $ص = ٦(س - ١)^{-٢}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن $ع = س - ١$ فيكون $ص = ٦ع^{-٢}$

$\frac{ءع}{ء س} = ١$، $\frac{ءص}{ءع} = -١٢ع^{-٣}$

$\frac{ءص}{ء س} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ء س}$

$= -١٢ع^{-٣} \times ١$

$= -\frac{١٢}{(س - ١)^{٣}}$

الإحداثي السيني لنقاط محور الصادات هو عند

$س = ٠$، وعليه فإن الميل $= \frac{١٢}{(٠ - ١)^{٣}} = -١٢$

٦) $ص = س - \frac{٣}{س + ٢}$

يقطع التمثيل البياني المحور السيني عندما $ص = ٠$

$س - \frac{٣}{س + ٢} = ٠$

اضرب الطرفين في $(س + ٢)$ لتحصل على:

$س(س + ٢) - ٣ = ٠$

س^{٢} + ٣س − ٣ = ٠

(س + ٣)(س − ١) = ٠

المقاطع السينية هي س = −٣ و س = ١

الآن أعد كتابة ص = س − $\frac{٣}{س + ٢}$ لتحصل على:

ص = س − ٣(س + ٢)$^{-١}$

إذا كانت ل = ٣(س + ٢)$^{-١}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن ع = س + ٢ فيكون ل = ٣ع$^{-١}$

$$\frac{ءع}{ءس} = ١ \text{،} \quad \frac{ءل}{ءع} = -٣ع^{-٢}$$

$$\frac{ءل}{ءس} = \frac{ءل}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$$

$$\frac{ءل}{ءس} = -٣ع^{-٢} \times ١$$

أوجِد مشتقة ص:

$$\frac{ءص}{ءس} = ١ + ٣(س + ٢)^{-٢}$$

عوّض بدل س = −٣ في $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ + ٣(س + ٢)$^{-٢}$،

فتجد الميل عند س = −٣

$$\frac{ءص}{ءس} = ١ + ٣(س + ٢)^{-٢}$$

الميل = ٤

عوّض بدل س = ١ في $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ + ٣(س + ٢)$^{-٢}$

فتجد الميل عند س = ١

لذا ١ + ٣(١ + ٢)$^{-٢}$ = ١ + $\frac{٣}{٩}$ = $\frac{٤}{٣}$

الميل هو $\frac{٤}{٣}$

٧) ص = $\sqrt{(س^{٢} - ١٠س + ٢٦)}$

أعد كتابة الدالة في صورة

ص = (س^{٢} − ١٠س + ٢٦)$^{\frac{١}{٢}}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن ع = س^{٢} − ١٠س + ٢٦

فيكون ص = ع$^{\frac{١}{٢}}$

$$\frac{ءع}{ءس} = ٢س - ١٠ \text{،} \quad \frac{ءص}{ءع} = \frac{١}{٢}ع^{-\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢}ع^{-\frac{١}{٢}} \times (٢س - ١٠)$$

$$= \frac{١}{٢\,(س^{٢} - ١٠س + ٢٦)^{\frac{١}{٢}}} \times (٢س - ١٠)$$

$$= \frac{س - ٥}{\sqrt{(س^{٢} - ١٠س + ٢٦)}}$$

وحيث إن الميل يساوي صفرًا فإن:

$$\frac{س - ٥}{\sqrt{(س^{٢} - ١٠س + ٢٦)}} = ٠$$

وعليه فإن س − ٥ = ٠

س = ٥

عوّض بدل س = ٥ في ص = $\sqrt{(س^{٢} - ١٠س + ٢٦)}$

لتحصل على:

ص = $\sqrt{(٥)^{٢} - ١٠(٥) + ٢٦)}$

ص = ١

إحداثيات النقطة هي (٥، ١)

٨) يمر منحنى الدالة ص = $\frac{أ}{ب س - ١}$

بالنقطة حيث س = ٢، ص = ١

عوّض بالنقطة (٢، ١) في الدالة لتحصل على:

١ = $\frac{أ}{٢ب - ١}$

أ = ٢ب − ١ .... [١]

أعد كتابة ص = $\frac{أ}{ب س - ١}$ في صورة

ص = أ(ب س − ١)$^{-١}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن ع = ب س − ١ فيكون ص = أ $\text{ع}^{-١}$

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{ب}$، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = -\text{١ع}^{-٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$= -\text{أع}^{-٢} \times \text{ب}$

$= -\text{أب ع}^{-٢}$

$= -\frac{\text{أب}}{(\text{ب س} - ١)^{٢}}$

عوّض بدل س = ٢ لتجد قيمة الميل عند تلك النقطة:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{أب}}{(\text{٢ب} - ١)^{٢}}$

وعليه فإن $-\frac{\text{أب}}{(\text{٢ب} - ١)^{٢}} = -\frac{٣}{٥}$

٥أب = ٣(٢ب − ١)^{٢} .... [٢]

عوّض بدل أ من المعادلة [١] في المعادلة [٢]:

٥(٢ب − ١) ب = ٣(٢ب − ١)^{٢}

١٠ب^{٢} − ٥ب = ٣(٢ب − ١)(٢ب − ١)

١٠ب^{٢} − ٥ب = ١٢ب^{٢} − ١٢ب + ٣

٢ب^{٢} − ٧ب + ٣ = ٠

(٢ب − ١)(ب − ٣) = ٠

ب = $\frac{١}{٢}$ أو ب = ٣

عوّض بدل ب = $\frac{١}{٢}$ في المعادلة [١] لتحصل على:

أ = ٢ × $\frac{١}{٢}$ − ١ أو أ = ٠ (لكن أ ≠ ٠ لأنه عندها لا يوجد منحنى).

عوّض بدل ب = ٣ في المعادلة [١] لتحصل على:

أ = ٢ × ٣ − ١ = ٥

الحل: أ = ٥، ب = ٣

٩) ص = (٣س − ٢)^{٤}

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤ × ٣(٣س − ٢)^{٣}

= ١٢(٣س − ٢)^{٣}

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ١٢ × ٣ × ٣(٣س − ٢)^{٢}

= ١٠٨(٣س − ٢)^{٢}

عندما س = $\frac{١}{٢}$، فإن $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ١٠٨ $\left(-\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ = ٢٧ > ٠

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ > ٠ عند النقطة $\left(\frac{١}{٢}، \frac{١}{١٦}\right)$

١٠) د(س) = ٤$\sqrt{\text{س}}$، هـ(س) = ٤س^{٢} + ٥

د′(س) = $\frac{٢}{\sqrt{\text{س}}}$، هـ′(س) = ٨س

ع′(س) = $\frac{٢}{\sqrt{\text{٤س}^{٢} + ٥}}$ × ٨س = $\frac{\text{١٦س}}{\sqrt{\text{٤س}^{٢} + ٥}}$

ع′(−١) = $\frac{١٦ \times -١}{\sqrt{٤(-١)^{٢} + ٥}}$ = −$\frac{١٦}{٣}$

ميل المنحنى عند س = −١ يساوي −$\frac{١٦}{٣}$

١١) أ (هـ ∘ د)(س) = ١ − ٢ ($\sqrt{\text{٤س} - ١}$)^{٢}

= ١ − ٢(٤س − ١)

= ١ − ٨س + ٢

= ٣ − ٨س

منحنى الدالة ص = (هـ ∘ د)(س) مستقيم ميله −٨

ب د(س) = (٤س − ١)$^{\frac{١}{٢}}$

هـ(س) = ١ − ٢س^{٢}

د′(س) = $\frac{١}{٢}$ (٤س − ١)$^{-\frac{١}{٢}}$ × ٤

هـ′(س) = −٤س

((د′ ∘ هـ)(س))′ =

= $\frac{٢}{\sqrt{٤(١ - \text{٢س}^{٢}) - ١}}$ × (−٤)س =

$$-\frac{\text{٨س}}{\sqrt{\text{٣} - \text{٨س}^{\text{٢}}}}$$

$$(\text{د}' \circ \text{هـ})\left(\tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\right) = -\frac{\text{٨} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}}}{\sqrt{\text{٣} - \text{٨}\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)^{\text{٢}}}}$$

$$= -\frac{\text{٤}}{\sqrt{\text{٣} - \text{٢}}}$$

$$= -\text{٤}$$

ميل المنحنى (هـ ∘ د) عند س = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ يساوي −٤

١٢) أ $\text{د(س)} = \sqrt{\text{س}} = \text{س}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$

$$\text{هـ(س)} = \frac{\text{٢س} - \text{١}}{\text{س}} = \text{٢} - \frac{\text{١}}{\text{س}}$$

بحيث يكون ع(س) = دهـ(س) = $\sqrt{\frac{\text{٢س} - \text{١}}{\text{س}}}$

$$\text{د}'\text{(س)} = \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}}،\quad \text{هـ}'\text{(س)} = \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}$$

$$\text{ع}'\text{(س)} = \text{د}'\text{(هـ(س))} \times \text{هـ}'\text{(س)}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢} - \text{س}^{-\text{١}}}} \times \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\frac{\text{٢س} - \text{١}}{\text{س}}}} \times \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢س} - \text{١}}} \times \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢س}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}\sqrt{\text{٢س} - \text{١}}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}^{\text{٣}}(\text{٢س} - \text{١})}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢س}^{\text{٤}} - \text{س}^{\text{٣}}}}$$

ب ميل عند س = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ يساوي ع′$\left(\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\right)$

$$\text{ع}'\left(\tfrac{\text{٢}}{\text{٣}}\right) = \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢}\left(\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\right)^{\text{٤}} - \left(\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\right)^{\text{٣}}}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\frac{\text{٣٢}}{\text{٨١}} - \frac{\text{٨}}{\text{٢٧}}}}$$

$= \frac{١}{٢\sqrt{\frac{٨}{٨١}}}$

$= \frac{٩}{٢\sqrt{٨}}$

$= \frac{٩}{٤\sqrt{٢}}$

$= \frac{٩}{٨}\sqrt{٢}$

$= \frac{٩}{٨}\sqrt{٢} = ك\sqrt{٢}$

$\therefore ك = \frac{٩}{٨} = ١{,}١٢٥$

تمارين ٤-٤

١) أ $ص = س^{٢} - ٣س + ٢$

$\frac{دص}{دس} = ٢س - ٣$

عندما س = ٣، فإن الميل = $٢ \times ٣ - ٣ = ٣$

معادلة المماس عند النقطة (٣، ٢) هي $ص - ٢ = ٣(س - ٣)$

المعادلة هي $ص = ٣س - ٧$

ب $ص = (٢س - ٥)^{٤}$

$\frac{دص}{دس} = ٤(٢س - ٥)^{٣} \times ٢ = ٨(٢س - ٥)^{٣}$

عندما س = ٢، فإن الميل = $٨(٤ - ٥)^{٣} = -٨$

معادلة المماس عند النقطة (٢، ١) هي $ص - ١ = -٨(س - ٢)$

المعادلة هي $ص = ١٧ - ٨س$

ج $ص = \frac{س^{٣} - ٥}{س} = س - ٥س^{-١}$

$\frac{دص}{دس} = ٢س + \frac{٥}{س^{٢}}$

عند س = −١، فإن الميل يساوي $٢(-١) + \frac{٥}{(-١)^{٢}} = ٣$

معادلة المماس عند النقطة (−١، ٦) هي $ص - ٦ = ٣(س + ١)$

المعادلة هي $ص = ٣س + ٩$

د $ص = ٢\sqrt{س - ٥} = ٢(س - ٥)^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{دص}{دس} = ٢ \times \frac{١}{٢} + (س - ٥)^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{س - ٥}}$

عندما س = ٩، فإن الميل = $\frac{١}{\sqrt{٤}} = \frac{١}{٢}$

معادلة المماس عند النقطة (٩، ٤) هي $ص - ٤ = \frac{١}{٢}(س - ٩)$

المعادلة هي $ص = \frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢}$ أو $٢ص = س - ١$

٢) أ $٣س^{٣} + س^{٢} - ٤س + ١$

$\frac{ءص}{ءس} = ٩س^{٢} + ٢س - ٤$

عندما س = ٠، فإن $\frac{ءص}{ءس} = -٤$

ويكون ميل العمودي $\frac{١}{٤}$

معادلة العمودي المار في (٠، ١) هي

$ص - ١ = \frac{١}{٤}(س - ٠)$

المعادلة هي ٤ص = س + ٤

ب $ص = \frac{٣}{\sqrt[٣]{س + ١}} = ٣(س + ١)^{-\frac{١}{٣}}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣(-\frac{١}{٣}(س + ١)^{-\frac{٤}{٣}}) - \frac{١}{\sqrt[٣]{(س + ١)^{٤}}}$

عندما س = −٢، فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{\sqrt[٣]{-١}} = -١$

ميل العمودي ١ معادلة العمودي المار في

(−٢، −٣) هي ص + ٣ = ١ (س + ٢)

بإضافة −٣ إلى الطرفين

المعادلة هي ص = س − ١

ج $ص = (٥ - ٢س)^{٣}$

$\frac{ءع}{ءس} = ٣(٥ - ٢س)^{٣}(-٢) = -٦(٥ - ٢س)^{٢}$

عندما س = ٣، فإن $\frac{ءص}{ءس} = -٦(-١)^{٢} = -٦$

ميل العمودي $\frac{١}{٦}$

معادلة العمودي المار في (٣، −١) هي

$ص + ١ = \frac{١}{٦}(س - ٣)$

المعادلة هي ٦ص = س − ٩

د $ص = \frac{٢٠}{س^{٢} + ١} = ٢٠(س^{٢} + ١)^{-١}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢٠(-٢)(س^{٢} + ١)^{-٢} \times ٢س$

$= \frac{٤٠س}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

عندما س = ٣، فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١٢٠}{(٩ + ١)^{٢}} = -\frac{٦}{٥}$

ميل العمودي $\frac{٥}{٦}$

معادلة العمودي المار في (٣، ٢) هي

$ص - ٢ = \frac{٥}{٦}(س - ٣)$

المعادلة هي ٦ص = ٥س − ٣

٣) أ $ص = \frac{٨}{(س + ٢)^{٢}}$

أعد كتابة المعادلة في صورة $٨(س + ٢)^{-٢}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن ع = س + ٢ فيكون $ص = ٨ع^{-٢}$

$\frac{ءع}{ءس} = ١$ و $\frac{ءص}{ءس} = -١٦ع^{-٣}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

$= -١٦ع^{-٣} \times ١$

$= -\frac{١٦}{(س + ٢)^{٣}}$

عندما س = ٢ فإن $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{١٦}{(٢ + ٢)^{٣}} = -\frac{١}{٤}$

يمر المماس في $(٢، \frac{١}{٢})$ وميله

$م = -\frac{١}{٤}$ استخدم الصيغة $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٤}(س - ٢)$

٤ص − ٢ = −س + ٢

س + ٤ص = ٤

ب يمر العمودي في $(٢، \frac{١}{٢})$ وميله $-\frac{١}{-\frac{١}{٤}} = ٤$

استخدم الصيغة $ص - ص_{١} = -\frac{١}{م}(س - س_{١})$

فتكون: $ص - \frac{١}{٢} = ٤(س - ٢)$

٢ص − ١ = ٨س − ١٦

٢ص = ٨س − ١٥

ص = ٤س − ٧,٥

٤) أ ص = ٥ − ٣س − ٢س^{٢}

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٣ − ٤س

عندما س = −٢، فإن ميل المماس للمنحنى:

= −٣ − ٤(−٢) أو ٥

ميل المماس للمنحنى م = ٥

يمر العمودي في (−٢، ٣) وميله:

$-\frac{١}{\text{م}} = -\frac{١}{٥}$

استخدم الصيغة ص − ص$_{١}$ = $-\frac{١}{\text{م}}$ (س − س$_{١}$)

فتكون:

ص − ٣ = $-\frac{١}{٥}$ (س − (−٢))

ص − ٣ = $-\frac{١}{٥}$ س − $\frac{٢}{٥}$

٥ص − ١٥ = −س − ٢

س + ٥ص = ١٣

ب معادلة العمودي هي ص = $-\frac{١}{٥}$ س + $\frac{١٣}{٥}$

معادلة المنحنى هي ص = ٥ − ٣س − ٢س^{٢}، حل المعادلتين ينتج:

$-\frac{١}{٥}$ س + $\frac{١٣}{٥}$ = ٥ − ٣س − ٢س^{٢}

−س + ١٣ = ٢٥ − ١٥س − ١٠س^{٢}

١٠س^{٢} + ١٤س − ١٢ = ٠

٥س^{٢} + ٧س − ٦ = ٠

لا تقضِ وقتًا طويلًا في محاولة التحليل إلى العوامل، لذا استخدم الصيغة التربيعية.

استخدم الصيغة التربيعية:

س = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$

حيث أ = ٥، ب = ٧، جـ = −٦

س = $\frac{-٧ \pm \sqrt{٧^{٢} - ٤(٥)(-٦)}}{٢(٥)}$

س = $\frac{-٧ \pm \sqrt{١٦٩}}{١٠}$

س = ٠٫٦ أو س = −٢ (هذه القيمة معطاة)

عوّض بدل س = ٠٫٦ في المعادلة الخطيّة

ص = $-\frac{١}{٥}$ س + $\frac{١٣}{٥}$ لتحصل على:

ص = $-\frac{١}{٥}$ (٠٫٦) + $\frac{١٣}{٥}$

ص = ٢٫٤٨

فتكون إحداثيات النقطة الجديدة (٠٫٦، ٢٫٤٨)

٥) ص = س^{٣} − ٥س + ٣

اشتق المعادلة تحصل على:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} − ٥

عندما س = −١، فإن ميل مماس المنحنى:

= ٣ (−١)^{٢} − ٥ = −٢

ميل المماس م = −٢

يمر العمودي في (−١، ٧) وميله $-\frac{١}{\text{م}} = -\frac{١}{-٢} = \frac{١}{٢}$

استخدم الصيغة ص − ص$_{١}$ = $-\frac{١}{\text{م}}$ (س − س$_{١}$)

فتكون:

ص − ٧ = $\frac{١}{٢}$ (س − (−١))

ص − ٧ = $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$

٢ص − ١٤ = س + ١

٢ص = س + ١٥

يقطع العمودي محور الصادات بالنقطة **ل** حيث س = ٠

فيكون، ٢ص = ٠ + ١٥

ص = ٧٫٥

وعليه **ل**(٠، ٧٫٥)

٦) ص = ٥ − ٣س − س^{٢}

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٣ − ٢س

عندما س= −١، فإن ميل المماس للمنحنى

= −٣ − ٢(−١) = −١

استخدم الصيغة $\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_{١})$ لتجد معادلة المماس

$\text{ص} - ٧ = -١$

$\text{ص} - ٧ = -\text{س} - ١$

$\text{ص} = ٦ - \text{س}$ .... [١]

عندما س= −٤، فإن ميل المماس للمنحنى

$= -٣ - ٢(-٤) = ٥$

أوجِد معادلة المماس باستخدام الصيغة:

$\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_{١})$

$\text{ص} - ١ = ٥\,(\text{س} - (-٤))$

$\text{ص} - ١ = ٥\text{س} + ٢٠$

$\text{ص} = ٥\text{س} + ٢١$ .... [٢]

حل المعادلتَين [١]، [٢] آنيًا لتحصل على:

$\text{ص}٦ - \text{س} = ٥\text{س} + ٢١$

$٦\text{س} = -١٥$

$\text{س} = -٢{,}٥$

عوّض بدل س = −٢,٥ في المعادلة (١) لتحصل على:

$\text{ص} = ٦ - (-٢{,}٥)$

$\text{ص} = ٨{,}٥$

إحداثيات النقطة **ل** (−٢,٥، ٨,٥).

٧) أ $\text{ص} = ٤ - ٢\sqrt{\text{س}}$

أعد كتابة الدالة في صورة $\text{ص} = ٤ - ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}}$

أوجد مشتقة الدالة:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$

عندما س = ١٦، فإن ميل المماس للمنحنى:

$\text{م} = -١٦^{-\frac{١}{٢}} = -\frac{١}{٤}$

يمر العمودي بالنقطة (١٦، − ٤) وميله

$-\frac{١}{\text{م}} = -\frac{١}{-\frac{١}{٤}} = ٤$

استخدم الصيغة $\text{ص} - \text{ص}_{١} = -\frac{١}{\text{م}}\,(\text{س} - \text{س}_{١})$

فتكون:

$\text{ص} - (-٤) = ٤\,(\text{س} - ١٦)$

$\text{ص} + ٤ = ٤\text{س} - ٦٤$

$\text{ص} = ٤\text{س} - ٦٨$

ب الإحداثي الصادي لنقاط محور السينات ص = ٠

وحيث إن العمودي يقطع محور السينات:

$٤\text{س} - ٦٨ = ٠$

س = ١٧، أي أن النقطة **ن** (١٧، ٠)

٨) أ معادلة المنحنى $\text{ص} = ٢\text{س} - \frac{١٠}{\text{س}^{٢}} + ٨$

أعد كتابة المعادلة في صورة

$\text{ص} = ٢\text{س} - ١٠\text{س}^{-٢} + ٨$

أوجد مشتقة الدالة:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ + ٢٠\text{س}^{-٣}$ أو $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ + \frac{٢٠}{\text{س}^{٣}}$

ب ميل مماس المنحنى عند النقطة حيث س = −٤ هو:

$٢ + \frac{٢٠}{(-٤)^{٣}}$ أو $\frac{٢٧}{١٦}$ لذا $\text{م} = \frac{٢٧}{١٦}$

ميل العمودي للمنحنى عند النقطة $(-٤، -\frac{٥}{٨})$ هو

$-\frac{١}{\text{م}} = -\frac{١}{\frac{٢٧}{١٦}} = -\frac{١٦}{٢٧}$

استخدم الصيغة $\text{ص} - \text{ص}_{١} = -\frac{١}{\text{م}}\,(\text{س} - \text{س}_{١})$

$\text{ص} - -\frac{٥}{٨} = -\frac{١٦}{٢٧}\,(\text{س} - (-٤))$

$\text{ص} + \frac{٥}{٨} = -\frac{١٦}{٢٧}\,(\text{س} - ٤)$

يتقاطع العمودي مع محور الصادات عندما س = ٠

عوض بدل س لتحصل على:

$\text{ص} + \frac{٥}{٨} = -\frac{١٦}{٢٧}\,(٠ + ٤)$

$\text{ص} = -\frac{٦٤}{٢٧} - \frac{٥}{٨}$

$\text{ص} = -\frac{٦٤٧}{٢١٦}$

لذا، يتقاطع العمودي مع محور الصادات على المنحنى في النقطة $\left(٠، -\frac{٦٤٧}{٢١٦}\right)$

٩) $ص = \frac{٦}{\sqrt{س - ٢}}$

أعد كتابة المعادلة في صورة $ص = ٦(س - ٢)^{-\frac{١}{٢}}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد مشتقة الدالة:

افترض أن $ع = س - ٢$ فيكون $ص = ص = ٦ع^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{ءع}{ءس} = ١$ و $\frac{ءص}{ءع} = -٣ع^{-\frac{٣}{٢}}$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = -٣ع^{-\frac{٣}{٢}} \times ١$$

$$\frac{ءص}{ءس} = -\frac{٣}{(س - ٢)^{\frac{٣}{٢}}}$$

ميل المماس عند النقطة حيث $س = ٣$:

$$= -\frac{٣}{(٣ - ٢)^{\frac{٣}{٢}}}$$

$$م = -٣$$

ميل العمودي عند النقطة (٣، ٦) هو:

$-\frac{١}{م} = -\frac{١}{-٣}$ أو $\frac{١}{٣}$

أوجِد معادلة العمودي عند هذه النقطة باستخدام الصيغة: $ص - ص_١ = -\frac{١}{م}(س - س_١)$

$$ص - ٦ = \frac{١}{٣}(س - ٣)$$

$$٣ص - ١٨ = س - ٣$$

$$٣ص = س + ١٥$$

يتقاطع العمودي مع محور السينات في النقطة **ل**

حيث $ص = ٠$

فيكون $٠ = س + ١٥$

$$س = -١٥$$

إحداثيات **ل** (−١٥، ٠).

يتقاطع العمودي مع محور الصادات في النقطة **ن**

حيث $س = ٠$

فيكون $٣ص = ٠ + ١٥$

$$ص = ٥$$

إحداثيات **ن** (٠، ٥).

نقطة منتصف **ل ن** هي $\left(\frac{-١٥ + ٠}{٢}، \frac{٠ + ٥}{٢}\right)$

أو (−٧,٥، ٢,٥)

١٠) $ص = س^٥ - ٨س^٣ + ١٦س$

أوجد مشتقة المعادلة لتحصل على:

$$\frac{ءص}{ءس} = ٥س^٤ - ٢٤س^٢ + ١٦$$

عندما $س = ١$، فإن ميل المنحنى:

$= ٥(١)^٤ - ٢٤(١)^٢ + ١٦$ أو -٣

يمر العمودي بالنقطة (١، ٩)

ميل العمودي $= -\frac{١}{م} = -\frac{١}{-٣} = -\frac{١}{٣}$

أوجِد معادلة العمودي المار بالنقطة **ل** (١، ٩) باستخدام الصيغة:

$$ص - ص_١ = -\frac{١}{م}(س - س_١)$$

$$ص - ٩ = \frac{١}{٣}(س - ١)$$

$$ص - ٩ = \frac{١}{٣}س - \frac{١}{٣}$$

$ص = \frac{١}{٣}س + \frac{٢٦}{٣}$ .... [١]

عندما $س = -١$، فإن ميل المنحنى:

$= ٥ - (١)^٤ - ٢٤(١)^٢ + ١٦ = -٣$

أوجِد معادلة المماس المار بالنقطة **ن** (−١، −٩) باستخدام الصيغة:

$$ص - ص_١ = م(س - س_١)$$

$$ص - (-٩) = -٣(س - (-١))$$

$$ص + ٩ = -٣س - ٣$$

ص = −٣س − ١٢ .... [٢]

حل المعادلتَين [١]، [٢] آنيًا لتجد إحداثيات النقطة ر:

$\frac{١}{٣}$س + $\frac{٢٦}{٣}$ = −٣س − ١٢

س + ٢٦ = −٩س − ٣٦

١٠ س = −٦٢

س = −٦,٢

عوّض بدل س= −٦,٢ في المعادلة [٢] لتحصل على:

ص = −٣ × −٦,٢ − ١٢

ص = ٦,٦

إحداثيات ر (−٦,٢، ٦,٦)

١١) ص = ٢($\sqrt{\text{س}}$ − ١)^{٣} = ٢

أعد كتابة المعادلة في صورة

ص = ٢(س$^{\frac{١}{٢}}$ − ١)^{٣} + ٢

استخدم قاعدة السلسلة لتجد مشتقة الدالة:

افترض أن ع = س$^{\frac{١}{٢}}$ − ١، فيكون ص = ٢ع^{٣} + ٢

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ = ٦ع^{٢}

استخدم قاعدة السلسلة

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ × $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

= ٦ع^{٢} × $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$

= $\frac{٣(\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ١)^{٢}}{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}$

عندما س = ٤ فإن ميل المنحنى:

= $\frac{٣(٤^{\frac{١}{٢}} - ١)^{٢}}{٤^{\frac{١}{٢}}}$ أو $\frac{٣}{٢}$

فيكون، م = $\frac{٣}{٢}$

يمر العمودي بالنقطة (٤، ٤)

وميله = −$\frac{١}{\text{م}}$ أو −$\frac{١}{\frac{٣}{٢}}$ أو −$\frac{٢}{٣}$

أوجِد معادلة العمودي عند النقطة (٤، ٤) باستخدام الصيغة:

ص − ص$_{١}$ = −$\frac{١}{\text{م}}$ (س − س$_{١}$)

ص − ٤ = $\frac{٢}{٣}$ (س − ٤)

ص − ٤ = −$\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{٨}{٣}$

ص = −$\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{٢٠}{٣}$ .... [١]

عندما س = ٩ يكون ميل المنحنى:

= $\frac{٣(٩^{\frac{١}{٢}} - ١)^{٢}}{٩^{\frac{١}{٢}}}$ أو ٤

وعليه م = ٤

يمر العمودي بالنقطة (٩، ١٨) وميله = −$\frac{١}{\text{م}}$ = −$\frac{١}{٤}$

أوجِد معادلة العمودي المار بالنقطة ل (٩، ١٨) باستخدام الصيغة:

ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

ص − ١٨ = −$\frac{١}{٤}$ س + $\frac{٩}{٤}$

ص = −$\frac{١}{٤}$ س + $\frac{٨١}{٤}$ .... [٢]

حل المعادلتَين [١]، [٢] آنيًا لتجد إحداثيات النقطة ر:

−$\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{٢٠}{٣}$ = −$\frac{١}{٤}$ س + $\frac{٨١}{٤}$

−٨س + ٨٠ = −٣س + ٢٤٣

٥س = −١٦٣

س = −٣٢,٦

عوّض بدل س = −٣٢,٦ في المعادلة [٢] لتحصل على:

ص= −$\frac{١}{٤}$ × −٣٢,٦ + $\frac{٨١}{٤}$

ص = ٢٨,٤

إحداثيات ر (−٣٢,٦، ٢٨,٤)

١٢) أ) الميل = $\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$، حيث أ(٢، ١٢)، ب(٦، ٢٠)

= $\frac{٢٠ - ١٢}{٦ - ٢}$ أو ٢

معطى معادلة المنحنى ص = ٣س + $\frac{١٢}{\text{س}}$

أعد كتابة المعادلة في صورة ص = ٣س + ١٢$\text{س}^{-١}$

اشتق لتحصل على:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣ − ١٢$\text{س}^{-٢}$ أو ٣ − $\frac{١٢}{\text{س}^{٢}}$

فيكون ٣ − $\frac{١٢}{\text{س}^{٢}}$ = ٢

١ = $\frac{١٢}{\text{س}^{٢}}$

س = ±٢$\sqrt{٣}$

عوّض بدل س = ٢$\sqrt{٣}$ في المعادلة ص = ٣س + $\frac{١٢}{\text{س}}$

لتحصل على: ص = ٣ × ٢$\sqrt{٣}$ + $\frac{١٢}{٢\sqrt{٣}}$

ص = ٦$\sqrt{٣}$ + $\frac{١٢}{٢\sqrt{٣}}$ أو ٨$\sqrt{٣}$

عوّض بدل س = −٢$\sqrt{٣}$ في المعادلة

ص = ٣س + $\frac{١٢}{\text{س}}$ لتحصل على:

ص = ٣ × −٢$\sqrt{٣}$ + $\frac{١٢}{-٢\sqrt{٣}}$

ص = −٦$\sqrt{٣}$ − ٢$\sqrt{٣}$ أو −٨$\sqrt{٣}$

إحداثيات ج، د هي (٢$\sqrt{٣}$، ٨$\sqrt{٣}$)، (−٢$\sqrt{٣}$، −٨$\sqrt{٣}$)

ب) أوجِد إحداثيات نقطة منتصف ج د باستخدام

الصيغة: $\left(\frac{\text{س}_{١} - \text{س}_{٢}}{٢}، \frac{\text{ص}_{١} - \text{ص}_{٢}}{٢}\right)$

= $\left(\frac{٢\sqrt{٣} + (-٢\sqrt{٣})}{٢}، \frac{٨\sqrt{٣} + (-٨\sqrt{٣})}{٢}\right)$

نقطة المنتصف (٠، ٠)

أوجِد ميل ج د باستخدام الصيغة:

الميل = $\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

= $\frac{٨\sqrt{٣} + (-٨\sqrt{٣})}{٢\sqrt{٣} + (-٢\sqrt{٣})}$ أو ٤

ميل العمود المنصف للقطعة ج د = −$\frac{١}{٤}$ ويمر بالنقطة (٠، ٠).

فتكون معادلته ص = −$\frac{١}{٤}$س أو س + ٤ص = ٠

١٣) لتكن ص = س(س − ١)(س + ٢)

فكّ الأقواس لتحصل على:

ص = ($\text{س}^{٢}$ − س)(س + ٢)

ص = $\text{س}^{٣}$ + ٢$\text{س}^{٢}$ − $\text{س}^{٢}$ − ٢س

ص = $\text{س}^{٣}$ + $\text{س}^{٢}$ − ٢س

أوجد مشتقة الدالة لتحصل على:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣$\text{س}^{٢}$ + ٢س − ٢

عندما س= ١ فإن ميل المنحنى:

= ٣ × $١^{٢}$ + ٢ × ١ − ٢ أو ٣

وعليه م = ٣

يمر العمودي بالنقطة (١، ٠) وميله = −$\frac{١}{\text{م}}$ = −$\frac{١}{٣}$

أوجِد معادلة العمودي الذي يمر بالنقطة (١، ٠)

باستخدام الصيغة:

ص − ص$_{١}$ = −$\frac{١}{\text{م}}$(س − س$_{١}$)، حيث م ≠ ٠

ص − ٠ = −$\frac{١}{٣}$(س − ١)

ص − ٠ = −$\frac{١}{٣}$س + $\frac{١}{٣}$

ص = −$\frac{١}{٣}$س + $\frac{١}{٣}$ .... [١]

عندما س = −٢ فإن ميل المنحنى:

= ٣ $(-٢)^{٢}$ + ٢ × −٢ − ٢ أو ٦

م = ٦

العمودي يمر بالنقطة (−٢، ٠) وميله = −$\frac{١}{\text{م}}$ = −$\frac{١}{٦}$

أوجِد معادلة العمودي الذي يمر بالنقطة **ل** (−٢، ٠) باستخدام الصيغة:

$$ص - ص_{١} = -\frac{١}{٦} (س - س_{١})$$

$$ص - ٠ = -\frac{١}{٦} (س - (-٢))$$

$$ص = -\frac{١}{٦}س - \frac{١}{٣}$$ .... [٢]

حل المعادلتَين [١]، [٢] آنيًا لتجد إحداثيات النقطة **ج**:

$$س + -\frac{١}{٣}س = -\frac{١}{٦}س - \frac{١}{٣}$$

$$-٢س + ٢ = -س - ٢$$

$$س = ٤$$

عوّض بدل س = ٤ في المعادلة [١] لتحصل على:

$$ص = -\frac{١}{٣} \times ٤ + \frac{١}{٣}$$

$$ص = -١$$

إحداثيات **ج** (٤، −١)

١٤) لتكن $ص = \frac{٥}{٢ - ٣س}$

أعد كتابة المعادلة في صورة

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن ع = ٢ − ٣س فيكون $ص = ٥ع^{-١}$

$$\frac{دع}{دس} = -٣، \quad \frac{دص}{دع} = -٥ع^{-٢}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$

$$= -٥ع^{-٢} \times -٣$$

$$= \frac{١٥}{(٢ - ٣ \times -١)^{٢}}$$

عندما س= −١ فإن ميل المماس:

$$= \frac{١٥}{(٢ - ٣ \times -١)^{٢}}$$

$$= \frac{١٥}{٢٥} \text{ أو } ٠,٦$$

استخدم $ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$

معادلة المماس الذي يمر بالنقطة (−١، ١) وميله ٠,٦ هي:

$$ص - ١ = ٠,٦ (س - (-١))$$

$$ص - ١ = ٠,٦ س + ٠,٦$$

$$ص = ٠,٦ س + ١,٦$$

يتقاطع المماس مع محور السينات حيث ص = ٠

أي أن ٠ = ٠,٦ س + ١,٦

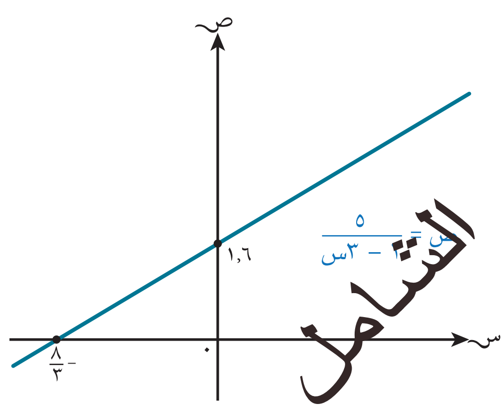
$$س = -\frac{٨}{٣}$$

ويتقاطع مع محور الصادات حيث س = ٠

أي أن ص = ٠,٦ (٠) + ١,٦

ص = ١,٦

انظر التمثيل البياني:



ظل الزاوية التي يصنعها المماس مع محور السينات:

$$= ١,٦ \div \frac{٨}{٣} \text{ أو } ٠,٦$$

$$ظا^{-١}(٠,٦) = ٣٠,٩٦^{\circ}$$

١٥) لتكن $ص = ٢س^{٢} + كس - ٣$

يقطع المنحنى محور السينات حيث ص = ٠

$$\text{أي أن } ٠ = \frac{١٢}{٢س - ٣} - ٤$$

$$\frac{١٢}{٢س - ٣} = ٤$$

$$١٢ = ٤ (٢س - ٣)$$

١٢ = ٨س − ١٢

س = ٣

ل (٣، ٠)

أعد كتابة الدالة في صورة ص = $\text{١٢}(\text{٢س} - \text{٣})^{-\text{١}} - \text{٤}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن ع = ٢س − ٣ فيكون ص = $\text{١٢ع}^{-\text{١}} - \text{٤}$

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{٢}$، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = -\text{١٢ع}^{-\text{٢}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$= -\text{١٢ع}^{-\text{٢}} \times \text{٢}$

$= -\frac{\text{٢٤}}{(\text{٢س} - \text{٣})^{\text{٢}}}$

عندما س = ٣، فإن ميل المماس:

$= -\frac{\text{٢٤}}{(\text{٢} \times \text{٣} - \text{٣})^{\text{٢}}}$

$= -\frac{\text{٢٤}}{\text{٩}}$ أو $-\frac{\text{٨}}{\text{٣}}$

استخدم الصيغة $\text{ص} - \text{ص}_{\text{١}} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{\text{١}})$، حيث

م = $-\frac{\text{٨}}{\text{٣}}$، **ل** (٣، ٠)

معادلة المماس عند النقطة **ل** هي:

ص − ٠ = $-\frac{\text{٨}}{\text{٣}}$ (س − ٣)

ص = $-\frac{\text{٨}}{\text{٣}}$ س + ٨

يقطع المماس محور الصادات حيث س = ٠

ص = $-\frac{\text{٨}}{\text{٣}}$ (٠) + ٨

ص = ٨

النقطة **و** (٠، ٨)

استخدم قانون المسافة:

ل و = $\sqrt{(\text{س}_{\text{٢}} - \text{س}_{\text{١}})^{\text{٢}} + (\text{ص}_{\text{٢}} - \text{ص}_{\text{١}})^{\text{٢}}}$

ل (٣، ٠)، **و** (٠، ٨)

ل و = $\sqrt{(\text{٠} - \text{٣})^{\text{٢}} + (\text{٨} - \text{٠})^{\text{٢}}}$

ل و = $\sqrt{\text{٧٣}}$

١٦) أ لتكن ص = $\text{٢س}^{\text{٢}}$ + ك س − ٣

أوجد مشتقة الدالة لتحصل على: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤س + ك

عندما س = ٣ فإن ميل المنحنى:

= ٤ × س + ك

= ١٢ × ك

يمر العمودي بالنقطة (٣، −٦)

وميله = $-\frac{\text{١}}{\text{م}} = -\frac{\text{١}}{\text{١٢ + ك}}$

أعد ترتيب س + ٥ص = ١٠ لتجد ميل هذا المستقيم ومقارنته مع ص = م س + ج

ص = م س + ج

٥ص = − س + ١٠

ص = $-\frac{\text{١}}{\text{٥}}$ س + ٢

الميل = $-\frac{\text{١}}{\text{٥}}$

فيكون $-\frac{\text{١}}{\text{٥}} = -\frac{\text{١}}{\text{١٢ + ك}}$

قارن بين المقامين تجد أن:

١٢ + ك = ٥

ك = −٧

ب أوجِد ميل العمودي بتعويض ك = −٧ في:

$-\frac{\text{١}}{\text{١٢ + ك}}$

فيكون $-\frac{\text{١}}{\text{١٢} + (-\text{٧})}$ أو $-\frac{\text{١}}{\text{٥}}$

لتجد معادلة العمودي المار في **ل** (٣، − ٦)

استخدم الصيغة:

$\text{ص} - \text{ص}_{\text{١}} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{\text{١}})$

ص − (−٦) = $-\frac{\text{١}}{\text{٥}}$ (س −٣)

ص + ٦ = $-\frac{١}{٥}$ س + $\frac{٣}{٥}$

ص = $-\frac{١}{٥}$ س − $\frac{٢٧}{٥}$

معادلة المنحنى ص = ٢س^{٢} + كس − ٣ وعندما ك = −٧ تصبح المعادلة ص = ٢س^{٢} − ٧س − ٣

حل المعادلتَين ص = ٢س^{٢} − ٧س − ٣،

ص = $-\frac{١}{٥}$ س − $\frac{٢٧}{٥}$ آنيًا يعطي إحداثيات نقطة تقاطع المنحى مع العمودي.

فيكون = ٢س^{٢} − ٧س − ٣ = $-\frac{١}{٥}$ س − $\frac{٢٧}{٥}$

١٠س^{٢} − ٣٥س − ١٥ = −س − ٢٧

١٠س^{٢} − ٣٤س + ١٢ = ٠

استخدم الصيغة التربيعية $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

حيث أ = ١٠، ب = −٣٤، ج = ١٢

س = $\frac{-(-٣٤) \pm \sqrt{(-٣٤)^{٢} - ٤(١٠)(١٢)}}{٢(١٠)}$

س = $\frac{٣٤ \pm \sqrt{٦٧٦}}{٢٠}$

س = ٠,٤ أو س = ٣ (وهي معطاة)

عوّض بدل س = ٠,٤ في المعادلة الخطيّة لتحصل على:

ص = $-\frac{١}{٥}$ س − $\frac{٢٧}{٥}$

ومنها نجد أن ص = $-\frac{١}{٥}$ (٠,٤) − $\frac{٢٧}{٥}$

ص = −٥,٤٨

إحداثيات النقاط التي يتقاطع فيها العمودي مع المنحنى مرة أخرى (٠,٤، −٥,٤٨)

تمارين ٤-٥

١) أ د(س) = س^{٢} − ٨س + ٢

د′(س) = ٢س − ٨

د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

٢س − ٨ > ٠

س > ٤

ب د(س) = ٢س^{٢} − ٤ س + ٧

د′(س) = ٤س − ٤

د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

٤س − ٤ > ٠

س > ١

ج د(س) = ٥ − ٧ س − ٢س^{٢}

د′(س) = −٧ − ٤س

د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

−٧ −٤س > ٠

س < −$\frac{٧}{٤}$ أو س < −١,٧٥

د د(س) = س^{٣} − ١٢س^{٢} + ٢

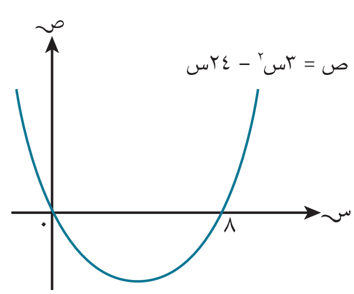
د′(س) = ٣س^{٢} − ٢٤س

د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

٣س^{٢} − ٢٤س > ٠

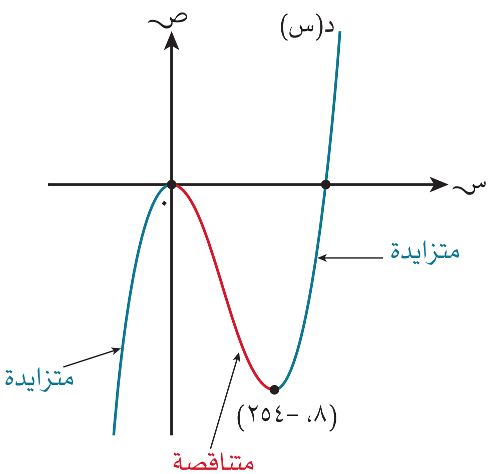
س (٣س − ٢٤) > ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = ٠، س = ٨



د(س) متزايدة على الفترة س < ٠ أو س > ٨

كما هو موضّح في التمثيل البياني للدالة د(س):



هـ د(س) = ٢س^{٣} − ١٥س^{٢} + ٢٤س + ٦

د′(س) = ٦س^{٢} − ٣٠س + ٢٤

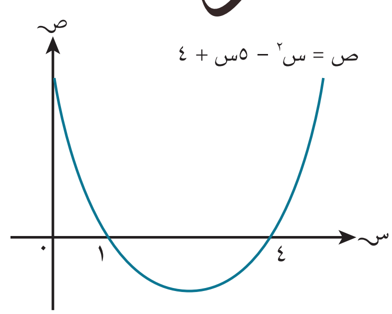
د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

٦س^{٢} − ٣٠س + ٢٤ > ٠

س^{٢} − ٥س + ٤ > ٠

(س − ١)(س − ٤) > ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = ١، س = ٤:



د(س) متزايدة على الفترة س < ١ أو س > ٤

و د(س) = ١٦ + ١٦س − س^{٢} − س^{٣}

د′(س) = ١٦ − ٢س − ٣س^{٢}

د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

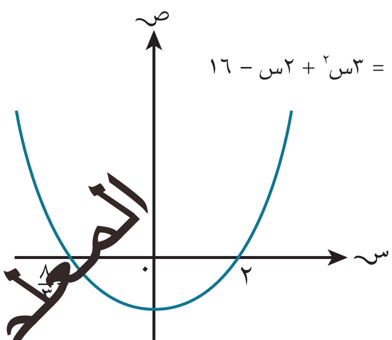
١٦ − ٢س − ٣س^{٢} > ٠

اضرب في −١ واقلب رمز المتباينة.

٣س^{٢} + ٢س − ١٦ < ٠

(٣س + ٨)(س − ٢) < ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = −$\frac{٨}{٣}$، س = ٢:



د(س) دالة متزايدة على الفترة −$\frac{٨}{٣}$ < س < ٢

٢) أ) د(س) = ٣س^{٢} − ٨س + ٢

د′(س) = ٦س − ٨

د(س) دالة متناقصة عندما د′(س) < ٠

٦س − ٨ < ٠

س < $\frac{٤}{٣}$

ب) د(س) = ١٠ + ٩س − س^{٢}

د′(س) = ٩ − ٢س

د(س) دالة متناقصة عندما د′(س) < ٠

٩ − ٢س < ٠

س > $\frac{٩}{٢}$

ج) د(س) = ٢س^{٣} − ٢١س^{٢} + ٦٠س − ٥

د′(س) = ٦س^{٢} − ٤٢س + ٦٠

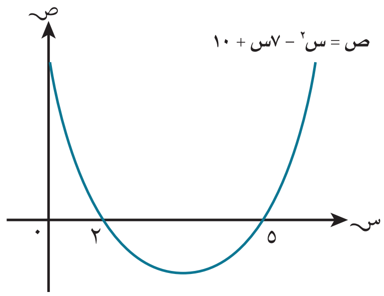
د(س) دالة متزايدة عندما د′(س) > ٠

٦س^{٢} − ٤٢س + ٦٠ < ٠

س^{٢} − ٧س + ١٠ < ٠

(س − ٢)(س − ٥) < ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = ٢، س = ٥:



د(س) دالة متناقصة على الفترة ٢ < س < ٥

د) د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س + ٥

د′(س) = ٣س^{٢} − ٦س − ٩

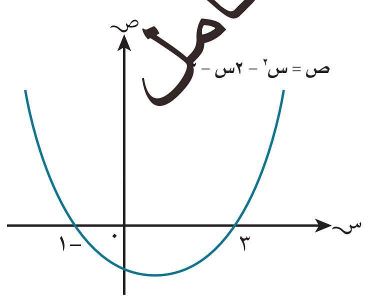
د(س) دالة متناقصة عندما د′(س) < ٠

٣س^{٢} − ٦س − ٩ < ٠

س^{٢} − ٢س − ٣ < ٠

(س + ١)(س − ٣) < ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = −١، س = ٣:



د(س) دالة متناقصة على الفترة −١ < س < ٣

هـ) د(س) = −٤٠س + ١٣س^{٢} − س^{٣}

د′(س) = −٤٠ + ٢٦س − ٣س^{٢}

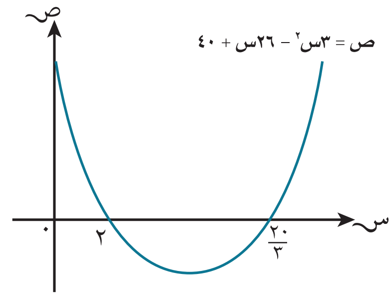
د(س) دالة متناقصة عندما د′(س) < ٠

−٤٠ + ٢٦س − ٣س^{٢} < ٠

٣س^{٢} − ٢٦س + ٤٠ > ٠

(س − ٢)(٣س − ٢٠) > ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = ٢، س = $\frac{٢٠}{٣}$:



د(س) دالة متناقصة على الفترات

س < ٢ أو س > $\frac{٢٠}{٣}$

و د(س) = ١١ + ٢٤ س − ٣س^{٢} − س^{٣}

د′(س) = ٢٤ − ٦س − ٣س^{٢}

د(س) دالة متناقصة عندما د′(س) < ٠

٢٤ − ٦س − ٣س^{٢} < ٠

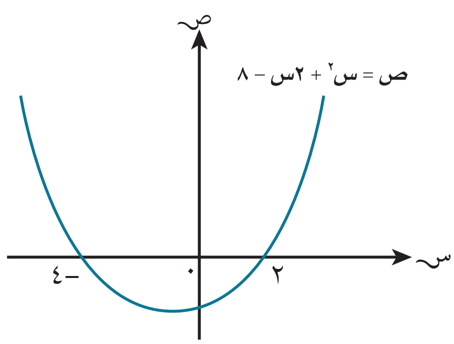
اضرب في −١ واقلب رمز المتباينة.

٣س^{٢} + ٦س − ٢٤ > ٠

س^{٢} + ٢س − ٨ > ٠

(س + ٤)(س − ٢) > ٠

توجد النقاط الحرجة عند س = −٤، س = ٢:



د(س) دالة متناقصة على الفترات

س < −٤ أو س > ٢

٣) د(س) = $\frac{١}{٦}$ (٥ − ٢س)^{٣} + ٤س

أوجِد د′(س) (استخدم قاعدة السلسلة لتشتق الحد الأول)

د′(س) = $\frac{١}{٢}$ (٥ − ٢س)^{٢} × (−٢) + ٤

= − (٥ − ٢س)^{٢} + ٤

= ٤ − (٥ − ٢س)^{٢}

لتكون الدالة متزايدة فإن د′(س) > ٠

أي أن ٤ − (٥ − ٢س)^{٢} > ٠

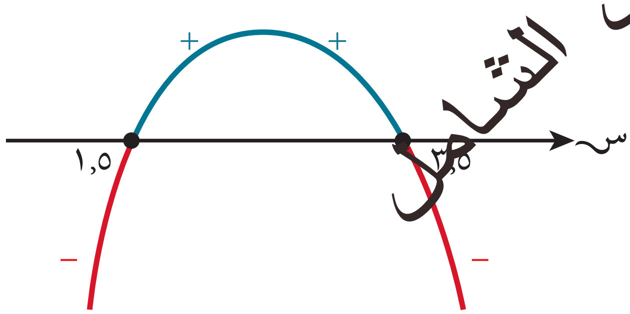
أوجِد النقاط الحرجة معتمدًا على ٤ − (٥ − ٢س)^{٢} = ٠

٥ − ٢س = ±٢

إذا كان ٥ − ٢س = ٢ فإن س = ١٫٥

إذا كان ٥ − ٢س = −٢ فإن س = ٣٫٥

توجد النقاط الحرجة عند س = ١٫٥، س = ٣٫٥



نريد أن يكون ٤ − (٥ − ٢س)^{٢} > ٠ وهو يمثل جزء التمثيل البياني حيث د′(س) > ٠ أي جزء التمثيل الذي فوق محور السينات.

وعليه يكون ١٫٥ < س < ٣٫٥

٤) $د(س) = \frac{٤}{١ - ٢س}$ ، س ≤ ١

$= ٤(١ - ٢س)^{-١}$

$د'(س) = \frac{٨}{(١ - ٢س)^{٢}}$

وحيث إن المجال هو س ≤ ١ فتكون $(١ - ٢س)^{٢}$

موجبة لجميع قيم س في المجال.

لذا د′(س) > ٠ لجميع قيم س في مجال د(س).

د دالة متزايدة.

٥) $د(س) = \frac{٥}{(س + ٢)^{٢}} - \frac{٢}{س + ٢}$ ، س ≠ ٠

$د(س) = ٥(س + ٢)^{-٢} - ٢(س + ٢)^{-١}$

$د'(س) = ١٠(س + ٢)^{-٣} \times ١ + ٢(س + ٢)^{-٢} \times ١$

$د'(س) = \frac{-١٠}{(س + ٢)^{٣}} + \frac{٢}{(س + ٢)^{٢}}$

اجمع الكسرَين لتحصل على:

$د'(س) = \frac{-١٠}{(س + ٢)^{٣}} + \frac{٢(س + ٢)}{(س + ٢)^{٣}}$

$د'(س) = \frac{٢س - ٦}{(س + ٢)^{٣}}$

حل المعادلة ٢س − ٦ = ٠ لتجد النقاط الحرجة.

س = ٣ (عندها فقط نقطة حرجة)

عوّض بدل س = ٢ في

$د'(س) = \frac{٢س - ٦}{(س + ٢)^{٣}}$ لتجد:

$د'(٢) = \frac{٢(٢) - ٦}{(٢ + ٢)^{٣}} = -\frac{١}{٣٢}$

الدالة هنا متناقصة.

عوّض بدل س = ٤ في

$د'(٤) = \frac{٢(٤) - ٦}{(٤ + ٢)^{٣}} = \frac{١}{١٠٨}$

الدالة هنا متزايدة.

∴ الدالة متناقصة في الفترة ٠ < س < ٣

ومتزايدة في الفترة س > ٣

٦) $د(س) = (٢س + ٥)^{٢} - ٣$، س ≥ ٠

$د'(س) = ٢(٢س + ٥) \times ٢$

$د'(س) = ٨س + ٢٠$

∴ د(س) دالة متزايدة لأن ٨س + ٢٠ ≥ ٠ لكل س ≥ ٠

٧) لتكن $د(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س}$

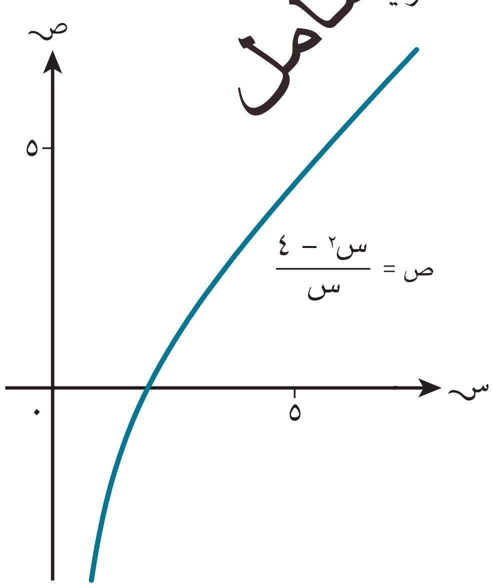
أعد كتابة الدالة في صورة $د(س) = س - ٤س^{-١}$

$د'(س) = ١ + ٤س^{-٢}$

أو $د'(س) = ١ + \frac{٤}{س^{٢}}$

لأي قيم س في مجال الدالة تكون $س^{٢}$ دائمًا موجبة.

وهكذا تكون د′(س) دائمًا موجبة، وبالتالي فإن د(س) دالة متزايدة.



يبيّن التمثيل أن د(س) دالة متزايدة على مجالها.

٨) $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}^{٤}} - \text{س}^{٢}$، حيث $\text{س} > ٠$

$\text{د}(\text{س}) = ٢\text{س}^{-٤} - \text{س}^{٢}$

$\text{د}'(\text{س}) = -٨\text{س}^{-٥} - ٢\text{س}$

$\text{د}'(\text{س}) = \frac{-٨}{\text{س}^{٥}} - \frac{٢\text{س}^{٦}}{\text{س}^{٥}}$

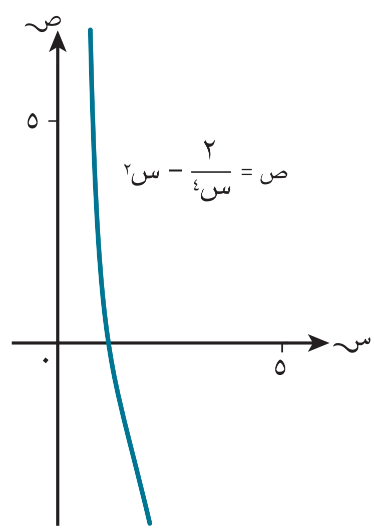
$\text{د}'(\text{س}) = \frac{-٨ - ٢\text{س}^{٦}}{\text{س}^{٥}}$

$\text{د}'(\text{س}) = -\frac{(٨ + ٢\text{س}^{٦})}{\text{س}^{٥}}$

عندما يكون $\text{س} > ٠$ أي س موجبة فإن

$\text{د}'(\text{س}) = -\frac{\text{موجب}}{\text{موجب}}$ أي أنها سالبة

$\therefore$ الدالة متناقصة لقيم $\text{س} > ٠$



٩) $\text{ح}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣} - ٨١\text{س}^{٢} + ٨٤٠\text{س}$

$\text{ح}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣} - ٨١\text{س}^{٢} + ٨٤٠\text{س}$ حيث تكون

$\text{ح}(\text{س})$ متناقصة فإننا نحتاج إلى أن نحل $\text{ح}'(\text{س}) < ٠$

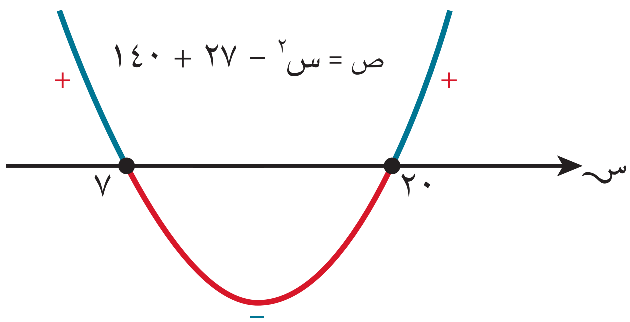
$\text{ح}'(\text{س}) = ٦\text{س}^{٢} - ١٦٢\text{س} + ٨٤٠ < ٠$

$\text{ح}'(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٢٧\text{س} + ١٤٠ < ٠$

$(\text{س} - ٢٠)(\text{س} - ٧) < ٠$

توجد نقاط حرجة لقيم س التي تمثل حلًا للمعادلة

$\text{س}^{٢} - ٢٧\text{س} + ١٤٠ = ٠$



مجال تناقص دالة الربح هو $٧ < \text{س} < ٢٠$

الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٧، ٢٠

تمارين ٤-٦

١) أ $ص = س^{٢} - ٤س + ٨$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س - ٤$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

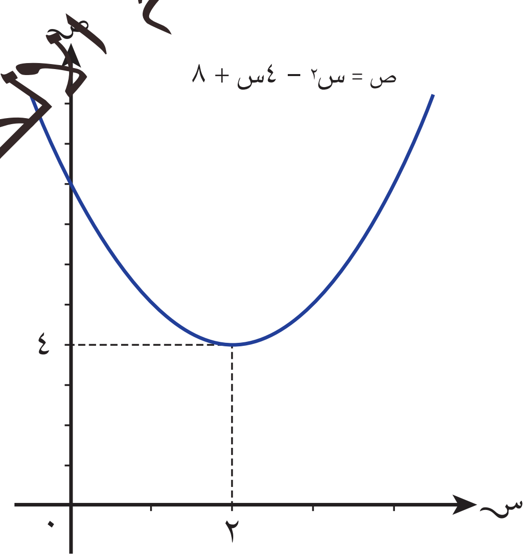
$٢س - ٤ = ٠$ ومنها $س = ٢$

النقطة الحرجة (٢، ٤).

قيمة $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ تخبرنا عن نوع النقطة الحرجة.

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٢ > ٠$

لذا توجد نقطة صغرى عند (٢، ٤).



ب $ص = (٣ + س)(٢ - س) = ٦ - س - س^{٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = -١ - ٢س$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$-١ - ٢س = ٠$ أي عند $س = -٠,٥$

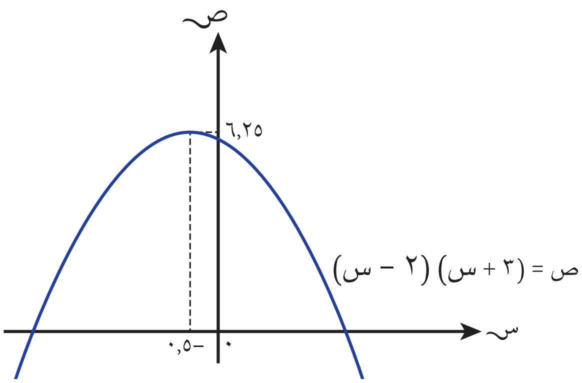
عندما $س = -٠,٥$ فإن

توجد نقطة حرجة عند (−٠,٥، ٦,٢٥).

قيمة $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ تخبرنا عن نوع النقطة الحرجة.

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = -٢ < ٠$

النقطة الحرجة هي نقطة عظمى عند (−٠,٥، ٦,٢٥).



ج $ص = س^{٣} - ١٢س + ٦$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} - ١٢$

توجد النقطة الحرجة عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$٣س^{٢} - ١٢ = ٠$ أي عند $س = -٢$، $س = ٢$

عندما $س = -٢$ فإن $ص = (-٢)^{٣} - ١٢(-٢) + ٦ = ٢٢$

عندما $س = ٢$ فإن $ص = (٢)^{٣} - ١٢(٢) + ٦ = -١٠$

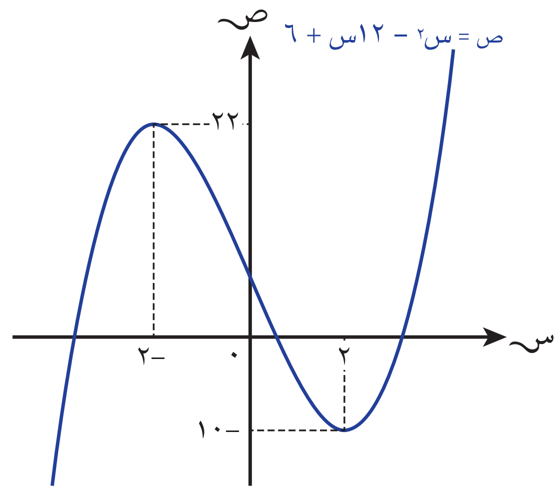
توجد نقاط حرجة عند (−٢، ٢٢)، (٢، −١٠).

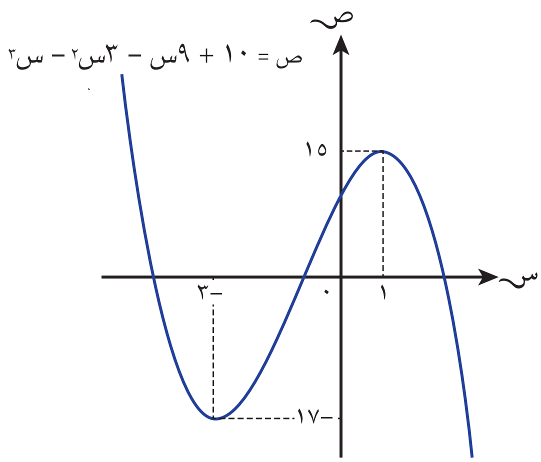
تدلنا قيمة $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ عن نوع النقاط الحرجة.

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٦س \begin{cases} < ٠ & \text{عندما } س = -٢ \\ > ٠ & \text{عندما } س = ٢ \end{cases}$

توجد نقطة عظمى عند (−٢، ٢٢).

توجد نقطة صغرى عند (٢، −١٠).





د ص = ١٠ + ٩س − ٣س^{٢} − س^{٣}

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٩ − ٦س − ٣س^{٢}

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

٩ − ٦س − ٣س^{٢} = ٠

يكمل الحل ويوجد قيم س

س^{٢} + ٢س − ٣ = ٠

(س + ٣)(س − ١) = ٠

إما س = −٣ أو س = ١

عندما س = ١، فإن

ص = ١٠ + ٩(١)^{٢} − ٣(١)^{٢} − (١)^{٣} = ١٥

عندما س = −٣، فإن

ص = ١٠ + ٩(−٣)^{٢} − ٣(−٣)^{٢} − (−٣)^{٣} = −١٧

توجد نقاط حرجة عند (−٣، −١٧)، (١، ١٥).

تخبرنا قيمة $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ عن نوع النقاط الحرجة

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = −٦ − ٦س $\begin{cases} > ٠ \text{ عندما س = −٣} \\ < ٠ \text{ عندما س = ١} \end{cases}$

توجد نقطة صغرى عند (−٣، − ١٧).

وتوجد نقطة عظمى عند (١، ١٥).

هـ ص = س^{٤} + ٤س − ١

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٤س^{٣} + ٤

توجد النقطة الحرجة عندما $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

٤س^{٣} + ٤ = ٠

٤س^{٣} = −٤

س^{٣} = −١

س = −١

عندما س = −١

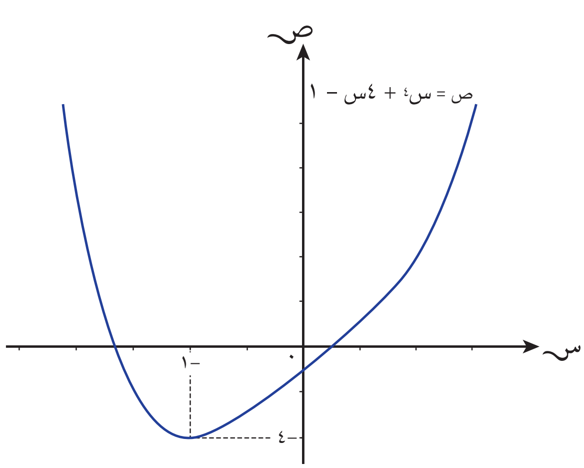
فإن ص = (−١)^{٤} + ٤(−١) − ١ = −٤

توجد نقطة حرجة عند النقطة (−١، −٤).

تخبرنا قيمة $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ عن نوع النقطة الحرجة.

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ١٢س^{٢} > ٠ عندما س = −١

توجد نقطة صغرى عند (−١، −٤).



و $ص = (٢س - ٣)^{٣} - ٦س$

$\frac{دص}{دس} = ٣(٢س - ٣)^{٢} \times ٢ - ٦$

$\frac{دص}{دس} = ٦(٢س - ٣)^{٢} - ٦$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{دص}{دس} = ٠$

$٦(٢س - ٣)^{٢} - ٦ = ٠$

$٦(٢س - ٣)^{٢} = ٦$

$(٢س - ٣)^{٢} = ١$

$٢س - ٣ = \pm\sqrt{١}$

$س = \frac{\pm\sqrt{١} + ٣}{٢} = ١$ أو ٢

عندما س = ١ فإن

$ص = (٢ \times ١ - ٣)^{٣} - ٦ \times ١ = -٧$

عندما س = ٢ فإن

$ص = (٢ \times ٢ - ٣)^{٣} - ٦ \times ٢ = -١١$

توجد النقاط الحرجة عند (١، −٧) و(٢، −١١).

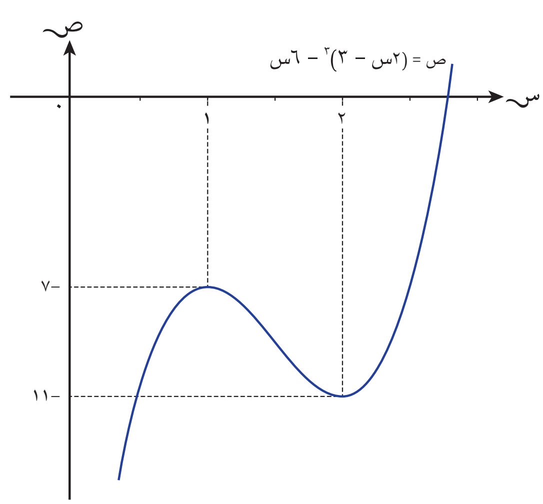
تخبرنا قيمة $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ عن نوع النقاط الحرجة.

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٦ \times ٢(٢س - ٣) \times ٢$

$= ٤٨س - ٧٢ \begin{cases} < ٠ & \text{عندما س = ١} \\ > ٠ & \text{عندما س = ٢} \end{cases}$

توجد نقطة عظمى عند (١، −٧).

توجد نقطة صغرى عند (٢، −١١).



٢) **أ** $ص = \sqrt{س} + \frac{٩}{\sqrt{س}} = س^{\frac{١}{٢}} + ٩س^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} - \frac{٩}{٢}س^{-\frac{٣}{٢}}$

$\frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{٩}{٢}س^{-\frac{٣}{٢}}$

ارفع الطرفين للقوة −٢

$٤س = \frac{٤}{٨١}س^{٣}$

$س^{٣} - ٨١ = ٠$

$س(س^{٢} - ٨١س) = ٠$

$س = -٩، س = ٠، س = ٩$

الحل الوحيد المقبول هو س = ٩ (لأن الدالة غير معرّفة عند س = −٩، س = ٠).

عندما س = ٩ فإن $ص = \sqrt{٩} + \frac{٩}{\sqrt{٩}} = ٦$

توجد نقطة حرجة عند (٩، ٦)

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} - \frac{٩}{٢}س^{-\frac{٣}{٢}}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = -\frac{١}{٤}س^{-\frac{٣}{٢}} + \frac{٢٧}{٤}س^{-\frac{٥}{٢}}$

عندما س = ٩ فإن

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = -\frac{١}{٤} \times ٩^{-\frac{٣}{٢}} + \frac{٢٧}{٤} \times ٩^{-\frac{٥}{٢}} = \frac{١}{٥٤} > ٠$

توجد نقطة صغرى عند (٩، ٦)

ب $ص = ٤س^{٢} + \frac{٨}{س} = ٤س^{٢} + ٨س^{-١}$

$\frac{دص}{دس} = ٨س - \frac{٨}{س^{٢}}$

$٨س - \frac{٨}{س^{٢}} = ٠$

$٨س = \frac{٨}{س^{٢}}$

$٨س^{٣} = ٨$

$س^{٣} = ١$

$س = ١$

عندما $س = ١$ فإن $ص = ٤(١)^٢ + \frac{٨}{١} = ١٢$

توجد نقطة حرجة عند $(١، ١٢)$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٨ + \frac{١٦}{س^٣}$

عندما $س = ١$ فإن

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٨ + \frac{١٦}{س^٣} = ٢٤ > ٠$

توجد نقطة صغرى عند $(١، ١٢)$.

ج) $ص = \frac{(س - ٣)^٢}{س} = \frac{س^٢ - ٦س + ٩}{س}$

$= س - ٦ + ٩س^{-١}$

$\frac{ءص}{ءس} = ١ - \frac{٩}{س^٢}$

$١ - \frac{٩}{س^٢} = ٠$

$س^٢ = ٩$

$س = ±٣$

عندما $س = -٣$ فإن $ص = \frac{(-٣ - ٣)^٢}{-٣} = -١٢$

عندما $س = ٣$ فإن $ص = \frac{(٣ - ٣)^٢}{-٣} = ٠$

توجد نقاط حرجة عند $(-٣، -١٢)$، $(٣، ٠)$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{١٨}{س^٣} \begin{cases} < ٠ & \text{عندما } س = -٣ \\ > ٠ & \text{عندما } س = ٣ \end{cases}$

توجد نقطة عظمى عند $(-٣، -١٢)$.

توجد نقطة صغرى عند $(٣، ٠)$.

د) $ص = س^٣ + \frac{٤٨}{س} + ٤$

$ص = س^٣ + ٤٨ س^{-١} + ٤$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢ - \frac{٤٨}{س^٢}$

$٣س^٢ - \frac{٤٨}{س^٢} = ٠$

$٣س^٢ = \frac{٤٨}{س^٢}$

$٣س^٤ = ٤٨$

$س^٤ = ١٦$

$س = ±٢$

عندما $س = -٢$ فإن $ص = (-٢)^٣ + \frac{٤٨}{-٢} + ٤ = -٢٨$

عندما $س = ٢$ فإن $ص = ٢^٣ + \frac{٤٨}{٢} + ٤ = ٣٦$

توجد النقاط الحرجة عند $(-٢، -٢٨)$، $(٢، ٣٦)$.

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٦س + \frac{٩٦}{س^٣} \begin{cases} < ٠ & \text{عندما } س = -٢ \\ > ٠ & \text{عندما } س = ٢ \end{cases}$

توجد نقطة عظمى $(-٢، -٢٨)$.

توجد نقطة صغرى عند $(٢، ٣٦)$.

هـ) $ص = ٤\sqrt{س} - س$

$ص = ٤س^{\frac{١}{٢}} - س$

$\frac{ءص}{ءس} = ٤ \times \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} - ١ = \frac{٢}{\sqrt{س}} - ١$

$\frac{٢}{\sqrt{س}} - ١ = ٠$

$١ = \frac{٢}{\sqrt{س}}$

$\sqrt{س} = ٢$

$س = ٤$

عندما $س = ٤$، فإن $ص = ٤\sqrt{٤} - ٤ = ٨ - ٤ = ٤$

توجد نقطة حرجة عند $(٤، ٤)$.

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = -\frac{١}{س^{\frac{٣}{٢}}}$

عندما $س = ٤$ فإن $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = -\frac{١}{٨} < ٠$

توجد نقطة عظمى عند $(٤ ، ٤)$.

و) $ص = ٢س^٢ + \frac{٨}{س^٢}$

$ص = ٢س^٢ + ٨س^{-٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢ - ١٦س^{-٣} = ٢ - \frac{١٦}{س^{٣}}$

$٢ - \frac{١٦}{س^{٣}} = ٠$

$٢ = \frac{١٦}{س^{٣}}$

$٢س^{٣} = ١٦$

$س^{٣} = ٨$

$س = ٢$

عندما $س = ٢$ فإن $ص = ٢ \times ٢ + \frac{٨}{٢^{٢}} = ٦$

توجد نقطة حرجة عند (٢، ٦)

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = -١٦(-٣)س^{-٤} = \frac{٤٨}{س^{٤}}$

عندما $س = ٢$ فإن $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{٤٨}{٢^{٤}} = ٣ > ٠$

توجد نقطة صغرى عند (٢، ٦).

٣) لتكن الدالة $ص = \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢}}$

أعد كتابة الدالة في صورة $ص = ١ - ٩س^{-٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = ١٨س^{-٣} = \frac{١٨}{س^{٣}}$

توجد نقطة حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\frac{١٨}{س^{٣}} = ٠$

لا يوجد حل لهذه المعادلة.

لذا لا توجد نقاط حرجة.

٤) أ لتكن الدالة $ص = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ٣٦س + ك$

$\frac{ءص}{ءس} = ٦س^{٢} - ٦س - ٣٦$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$٦س^{٢} - ٦س - ٣٦ = ٠$

$س^{٢} - س - ٦ = ٠$

$(س - ٣)(س + ٢) = ٠$

إما $س = -٢$ أو $س = ٣$

ب إذا كان $س = -٢$ فإن

$ص = ٢(-٢)^{٣} - ٣(-٢)^{٢} - ٣٦(-٢) + ك = ك + ٤٤$

توجد نقطة حرجة عند (−٢، ك + ٤٤).

إذا كان $س = ٣$ فإن

$ص = ٢(٣)^{٣} - ٣(٣)^{٢} - ٣٦(٣) + ك = ك - ٨١$

توجد نقطة حرجة عند (٣، ك − ٨١)

إذا وقعت النقاط الحرجة على محور السينات

فإن: $ك + ٤٤ = ٠$ ومنها $ك = -٤٤$

$ك - ٨١ = ٠$ ومنها $ك = ٨١$

قيمتا ك هما −٤٤، ١٨

٥) أ $ص = س^{٣} + أس^{٢} - ٩س + ٢$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} + ٢أس - ٩$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$٣س^{٢} + ٢أس - ٩ = ٠$

عوّض بدل $س = -٣$ في المعادلة لتحصل على:

$٣(-٣)^{٢} + ٢أ(-٣) - ٩ = ٠$

$٢٧ - ٦أ - ٩ = ٠$

$-٦أ = -١٨$

$أ = ٣$

ب $ص = س^{٣} + ٣س^{٢} - ٩س + ٢$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} + ٦س - ٩$

$\frac{ءص}{ءس} < ٠$

$٣س^{٢} + ٦س - ٩ < ٠$

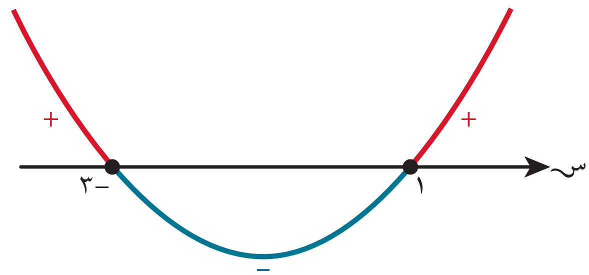
$س^{٢} + ٢س - ٣ < ٠$

$(س + ٣)(س - ١) < ٠$

نجد النقاط الحرجة عندما نجد قيم س التي

تحقق المعادلة $(س + ٣)(س - ١) = ٠$ وهي:

س = ١، س = −٣ وهما ممثلتان على الشكل الآتي:



نريد س^{٢} + ٢س − ٣ < ٠ وهو جزء التمثيل البياني حيث $\frac{ءص}{ءس}$ < ٠ أي الجزء الواقع أسفل محور السينات.

وعليه يكون −٣ < س < ١

٦) لتكن الدالة ص = ٢س^{٣} + أس^{٢} + بس − ٣٠

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س^{٢} + ٢أس + ب

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

٦س^{٢} + ٢أس + ب = ٠

عوّض بدل س = ٣ في المعادلة لتحصل على:

٦(٣)^{٢} + ٢أ(٣) + ب = ٠

٥٤ + ٦أ + ب = ٠

٦أ + ب = −٥٤ .... [١]

عندما يمر منحنى ص = ٢س^{٣} + أس^{٢} + بس − ٣٠ في (٤، ٢) فعوّض بدل س = ٤، ص = ٢ في المعادلة لتحصل على:

٢ = ٢(٤)^{٣} + أ(٤)^{٢} + ب(٤) − ٣٠

٢ = ١٢٨ + ١٦أ + ٤ب − ٣٠

١٦أ + ٤ب = −٩٦

٤أ + ب = −٢٤ .... [٢]

حل المعادلتَين [١]، [٢] لتحصل على:

٢أ = −٣٠

أ = −١٥

عوّض بدل أ = −١٥ في المعادلة [٢] لتجد أن:

٤(−١٥) + ب = −٢٤

ب = ٣٦

ص = ٢س^{٣} − ١٥س^{٢} + ٣٦س − ٣٠

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س^{٢} − ٣٠س + ٣٦

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

٦س^{٢} − ٣٠س + ٣٦ = ٠

س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠

(س − ٣)(س − ٢) = ٠

س = ٣ (معطاة في السؤال)، أو س = ٢

إذا كان س = ٢ فإن

ص = ٢(٢)^{٣} − ١٥(٢)^{٢} + ٣٦(٢) − ٣٠ = −٢

لذا توجد نقطة حرجة أخرى عند (٢، −٢).

توجد طريقتان لتحديد نوع النقطة الحرجة:

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

أوجِد المشتقة الثانية $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ١٢س − ٣٠

عندما س = ٢ فإن $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ١٢(٢) − ٣٠ = −٦

وعليه فإن $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ < ٠

∴ (٢، −٢) نقطة عظمى.

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

أوجِد الميل على جانبَي النقطة (٢، −٢).

عوّض بدل س = ١ في $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٦س}^{٢} - \text{٣٠س} + ٣٦ = ٠$

لتحصل على $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦(١)^{٢} - ٣٠(١) + ٣٦ = ١٢$

وهي كمية موجبة.

التعويض بدل س = ٣ لا يساعد بسبب وجود نقطة حرجة عند س = ٣

عوّض بدل س = ٢,٥ في

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٦س}^{٢} - \text{٣٠س} + ٣٦ = ٠$

لتحصل على:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦(٢,٥)^{٢} - ٣٠(٢,٥) + ٣٦ = -\frac{٣}{٢}$ وهي كمية سالبة.

وحيث إن إشارة الميل تتغير من موجبة إلى سالبة كلما تحركت قيم س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة، فإن (٢، −٢) نقطة عظمى.

٧) لتكن الدالة $\text{ص} = \text{٢س}^{٣} + \text{أس}^{٢} + \text{ب س} - ٣٠$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٦س}^{٢} + \text{٢أس} + \text{ب}$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\text{٦س}^{٢} + \text{٢أس} + \text{ب} = ٠$

قارن المعادلة مع $\text{أس}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ} = ٠$ واستخدم الصيغة التربيعية لتجد أن:

$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - \text{٤أجـ}}}{\text{٢أ}}$، حيث أ = ٦، ب = ٢أ، ج = ب

$\text{س} = \frac{-\text{٢أ} \pm \sqrt{(\text{٢أ})^{٢} - ٤(٦)(\text{ب})}}{٢(٦)}$

لا توجد حلول حقيقية إذا كان $(\text{٢أ})^{٢} - ٤(٦)(\text{ب}) < ٠$

وعليه $\text{٤أ}^{٢} - \text{٢٤ب} < ٠$

$\text{أ}^{٢} - \text{٦ب} < ٠$

$\text{أ}^{٢} < \text{٦ب}$

٨) لتكن الدالة $\text{ص} = ١ + \text{٢س} + \frac{\text{ك}^{٢}}{\text{٢س} - ٣}$

أعد كتابة الدالة في صورة

$\text{ص} = ١ + \text{٢س} + \text{ك}^{٢}(\text{٢س} - ٣)^{-١}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢ + \text{ك}^{٢} \times -١(\text{٢س} - ٣)^{-٢} \times ٢$

$= ٢ - \text{٢ك}^{٢}(\text{٢س} - ٣)^{-٢}$

$= ٢ - \frac{\text{٢ك}^{٢}}{(\text{٢س} - ٣)^{٢}}$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$٢ - \frac{\text{٢ك}^{٢}}{(\text{٢س} - ٣)^{٢}} = ٠$

$٢ = \frac{\text{٢ك}^{٢}}{(\text{٢س} - ٣)^{٢}}$

$١ = \frac{\text{ك}^{٢}}{(\text{٢س} - ٣)^{٢}}$

$(\text{٢س} - ٣)^{٢} = \text{ك}^{٢}$

$\text{٢س} - ٣ = \pm\text{ك}$

$\text{س} = \frac{\text{ك} + ٣}{٢}$ أو $\text{س} = \frac{-\text{ك} + ٣}{٢}$

اقرأ التعليمات بانتباه. يطلب هذا التمرين قيم س فقط وليس قيم ص.

لتقرّر نوع النقاط الحرجة، أوجِد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$:

وحيث إن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢ - \text{٢ك}^{٢}\ (\text{٢س} - ٣)^{-٢}$

$$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = -٢ \times -٢ك^{٢} (٢س - ٣)^{-٣} \times ٢$$

$$= ٨ك^{٢} (٢س - ٣)^{-٣}$$

$$= \frac{٨ك^{٢}}{(٢س - ٣)^{٣}}$$

عوّض بدل س = $\frac{ك + ٣}{٢}$

$$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{٨ك^{٢}}{(٢ \times \frac{ك + ٣}{٢} - ٣)^{٣}}$$

$$= \frac{٨ك^{٢}}{ك^{٣}}$$

$= \frac{٨}{ك}$ وهي قيمة موجبة لأن ك موجبة

وعليه فإنه توجد عند س = $\frac{ك + ٣}{٢}$ نقطة صغرى.

عوّض بدل س = $\frac{-ك + ٣}{٢}$

$$= \frac{٨ك^{٢}}{-ك^{٣}}$$

$= -\frac{٨}{ك}$ وهي قيمة سالبة لأن ك موجبة.

وعليه توجد نقطة عظمى عند $\frac{-ك + ٣}{٢}$

> اختبار المشتقة الأولى يحتاج إلى عمل أكثر بكثير من الطريقة أعلاه ويقود أحياناً إلى الخطأ.

٩) لتكن الدالة ص = $س^{٤} - ٤س^{٣} + ٤س^{٢} + ١$

$$\frac{دص}{دس} = ٤س^{٣} - ١٢س^{٢} + ٨س$$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{دص}{دس} = ٠$

$$٤س^{٣} - ١٢س^{٢} + ٨س = ٠$$

"لا تقسم المعادلة على س لأنك ستفقد أحد الحلول"

$$٤س (س^{٢} - ٣س + ٢) = ٠$$

$$٤س (س - ١)(س - ٢) = ٠$$

فيكون س = ٠، أو س= ١، أو س = ٢

إذا كان س = ٠

فإن ص = $٠^{٤} - ٤(٠)^{٣} + ٤(٠)^{٢} + ١ = ١$

إذا كان س = ١

فإن ص = $١^{٤} - ٤(١)^{٣} + ٤(١)^{٢} + ١ = ٢$

إذا كان س = ٢

فإن ص = $٢^{٤} - ٤(٢)^{٣} + ٤(٢)^{٢} + ١ = ١$

النقاط الحرجة هي (٠، ١)، (١، ٢)، (٢، ١).

> لتحدد نوع النقاط الحرجة هذه، وهي متقاربة، فمن الحكمة استخدام المشتقة الثانية.

الآن أوجِد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$

$$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ١٢س^{٢} - ٢٤س + ٨$$

بتعويض قيم س في المشتقة الثانية:

س = ٠ فإن $١٢(٠)^{٢} - ٢٤(٠) + ٨ = ٨$ وهي موجبة

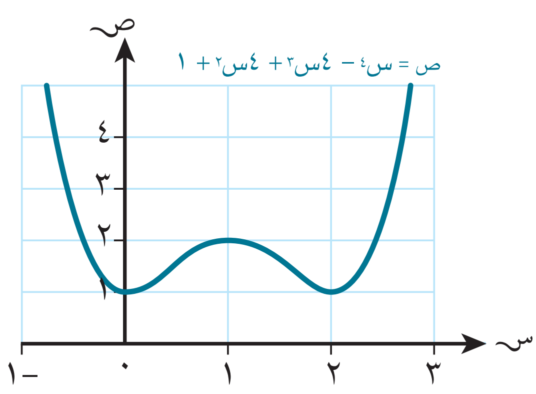
فيكون (٠، ١) قيمة صغرى.

س = ١ فإن $١٢(١)^{٢} - ٢٤(١) + ٨ = -٤$ وهي سالبة

فيكون (١، ٢) قيمة عظمى.

س = ٢ فإن $١٢(٢)^{٢} - ٢٤(٢) + ٨ = ٨$ وهي موجبة

فتكون (٢، ١) قيمة صغرى.



١٠) أ لتكن الدالة ص = س^{٣} + أس^{٢} + ب

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} + ٢أس

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

٣س^{٢} + ٢أس = ٠

عوّض عن س = ٤ في ٣س^{٢} + ٢أس = ٠ لتحصل على: ٣(٤)^{٢} + ٢أ × ٤ = ٠

٨أ = −٤٨

أ = −٦

عوّض بدل س = ٤، ص = −٢٧، أ = −٦ في ص = س^{٣} + أس^{٢} + ب لتحصل على: ب = ٥

ب معادلة المنحنى هي ص = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٥

فيكون، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} − ١٢س

توجد طريقتان لتحديد نوع النقاط الحرجة:

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٦س − ١٢

عندما س= ٤ فإن $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٦ × ٤ − ١٢ = ١٢

فهي موجبة، وعليه فإن (٤، −٢٧) نقطة صغرى.

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

الآن ادرس الميل على جانبَي النقطة (٤، −٢٧).

عوّض بدل قيمة واحدة من كل جانب من س = ٤

عوّض بدل س = ٣ في $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} − ١٢س

لتحصل على: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣(٣)^{٢} − ١٢(٣) أو −٩ وهي سالبة.

عوّض بدل س = ٥ في $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} − ١٢س

لتحصل على : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$: ٣(٥)^{٢} − ١٢(٥) أو ١٥ وهي موجبة.

وحيث تتغيّر إشارة الميل من سالب إلى موجب عندما تتحرك س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة فتكون (٤، −٢٧) نقطة صغرى.

ج بما أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} − ١٢س، فإنه توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠، ٣س^{٢} − ١٢س = ٠

لا "تقسم" المعادلة على س، فبإجراء القسمة تفقد أحد الحلول س = ٠

٣س (س − ٤) = ٠

س = ٤ معطى في السؤال، أو س = ٠

إذا كان س = ٠ فأوجِد الإحداثي الصادي بالتعويض في معادلة المنحنى.

أي أن ص = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٥

ويكون ص = ٠^{٣} − ٦(٠)^{٢} + ٥ = ٥

فتكون (٠، ٥) النقطة الحرجة الأخرى.

توجد طريقتان لتحديد نوع النقطة الحرجة:

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

لتحدد نوع النقطة عوض بدل س = ٠ في $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$

فيكون $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٦ × ٠ − ١٢ = −١٢ وهي سالبة.

النقطة (٠، ٥) نقطة عظمى.

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

ادرس ميل المنحنى على جانبَي النقطة (٠، ٥).

عوّض البدل بقيمة واحدة من كل جانب من س = ٠

عوّض بدل س = −١ في $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} − ١٢س

لتحصل على: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣(−١)^{٢} − ١٢(−١) = ١٥

وهي موجبة.

عوّض بدل س = ١ في $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} - ١٢س$ لتحصل على:

$\frac{ءص}{ءس} = ٣(١)^{٢} - ١٢(١) = -٩$ وهي سالبة.

وحيث تتغيّر إشارة الميل من موجب إلى سالب مع تحرك قيمة س على المنحنى من اليسار إلى اليمين، فتكون (٠، ٥) نقطة عظمى.

د تحتاج إلى أن تجد نقطة على المنحنى حيث تكون $\frac{ءص}{ءس}$ قيمة صغرى.

أي أن $٣س^{٢} - ١٢س$ قيمة صغرى.

أكمل المربع لـ $٣س^{٢} - ١٢س$

$٣(س^{٢} - ٤س)$

$= ٣((س - ٢)^{٢} - ٢^{٢})$

$= ٣((س - ٢)^{٢} - ٤)$

$= ٣(س - ٢)^{٢} - ١٢$

أقل قيمة للعبارة $٣(س - ٢)^{٢} - ١٢$ هي -١٢ عندما س = ٢ لأن $٣(س - ٢)^{٢} \geq ٠$

عوّض بدل س = ٢ في معادلة المنحنى لتحصل على الإحداثي الصادي للنقطة:

أي أن $ص = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٥$ تصبح

$ص = ٢^{٣} - ٦(٢)^{٢} + ٥ = -١١$

أصغر قيمة للميل هي -١٢ عند النقطة (٢، −١١)

١١) أ $ص = أس + \frac{ب}{س^{٢}}$

عوّض بدل س = ٢، ص = ١٢ لتحصل على:

$١٢ = ٢أ + \frac{ب}{٢^{٢}}$

$٤٨ = ٨أ + ب$ .... [١]

أعد كتابة $ص = أس + \frac{ب}{س^{٢}}$ في صورة $ص = أس + بس^{-٢}$، ثم أوجد المشتقة لتحصل على: $\frac{ءص}{ءس} = أ - ٢بس^{-٣}$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$أ - \frac{٢ب}{س^{٣}} = ٠$

وبما أن النقطة الحرجة عند س = ٢

$أ - \frac{٢ب}{٢^{٣}} = ٠$

$أ = \frac{٢ب}{٨}$، ب = ٤أ .... [٢]

استخدم المعادلة [٢] وعوّض بدل ب في المعادلة [١] لتحصل على: $٤٨ = ٨أ + ٤أ$

أ = ٤

عوّض بدل أ = ٤ في المعادلة [٢] لتحصل على

ب = ١٦

ب معادلة المنحنى $ص = ٤س + \frac{١٦}{س^{٢}}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٤ - \frac{٣٢}{س^{٣}} = ٤ - ٣٢س^{-٣}$

توجد طريقتان لتحديد نوع النقطة الحرجة عند س = ٢

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

أوجِد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٩٦س^{-٤} = \frac{٩٦}{س^{٤}}$

عوّض بدل س = ٢ في $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{٩٦}{س^{٤}}$ لتحصل على:

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{٩٦}{٢^{٤}} = ٦$ وهي قيمة موجبة لذا توجد قيمة صغرى عند س = ٢

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

ادرس ميل المنحنى على جانبَي النقطة س = ٢

عوّض بدل س = ١ في $\frac{ءص}{ءس} = ٤ - \frac{٣٢}{س^{٣}}$

لتحصل على:

$\frac{دص}{دس} = ٤ - \frac{٣٢}{١^{٣}} = -٢٨$ وهي قيمة سالبة.

عوّض بدل $س = ٣$ في $\frac{دص}{دس} = ٤ - \frac{٣٢}{س^{٣}}$

لتحصل على: $\frac{دص}{دس} = ٤ - \frac{٣٢}{٣^{٣}} = \frac{٧٦}{٢٧}$ وهي قيمة موجبة.

حيث إن إشارة ميل المنحنى تتغيّر من سالب إلى موجب عندما تتحرك النقطة س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة، توجد عند $س = ٢$ نقطة صغرى.

ج $ص = ٤س + ١٦س^{-٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٤ - ٣٢س^{-٣}$

$= ٤ - \frac{٣٢}{س^{٣}}$

تكون الدالة متزايدة عندما $\frac{دص}{دس} > ٠$

$٤ - \frac{٣٢}{س^{٣}} > ٠$

$٤ > \frac{٣٢}{س^{٣}}$

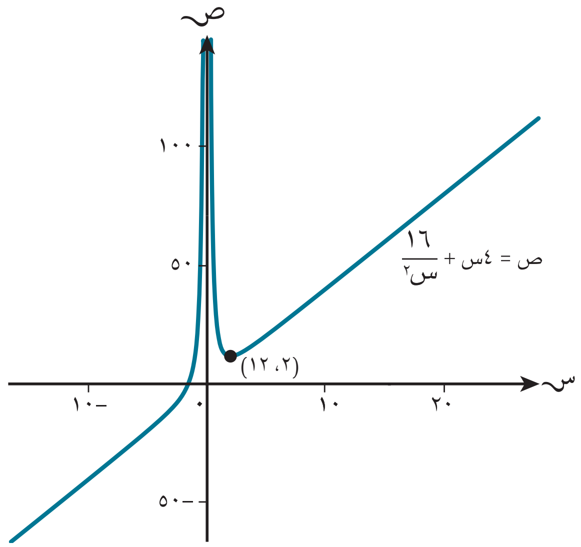
$س^{٣} > ٨$

$س > ٢$

للمنحنى قيمة صغرى عند $س = ٢$ وخط تقارب رأسي (حيث تكون الدالة غير معرّفة) عند $س = ٠$، ∴ هذه هي القيم الحرجة للدالة.

ونلاحظ من المنحنى أدناه أن $٤ - \frac{٣٢}{س^{٣}} > ٠$ عندما $س < ٠$

الدالة متزايدة عند $س < ٠$ أو $س > ٢$ كما هو موضّح في المنحنى أدناه:



١٢) أ لتكن الدالة $ص = س^{٢} + \frac{أ}{س} + ب$

عوّض بدل س= ٣، ص = ٥ لتحصل على:

$٥ = ٣^{٢} + \frac{أ}{٣} + ب$

$١٥ = ٢٧ + أ + ٣ب$

$أ + ٣ب = -١٢$ .... [١]

أعد كتابة $ص = س^{٢} + \frac{أ}{س} + ب$ في صورة

$ص = س^{٢} + أس^{-١} + ب$

فإن $\frac{دص}{دس} = ٢س - أس^{-٢} = ٢س - \frac{أ}{س^{٢}}$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{دص}{دس} = ٠$

وعليه يكون $٢س - \frac{أ}{س^{٢}} = ٠$

عندما $س = ٣$ فإن $٢(٣) - \frac{أ}{(٣)^{٢}} = ٠$

$٦ - \frac{أ}{٩} = ٠$

$أ = ٥٤$

عوّض بدل أ = ٥٤ في المعادلة [١] لتحصل على:

$أ + ٣ب = -١٢$ ويكون $٥٤ + ٣ب = -١٢$

$ب = -٢٢$

تصبح معادلة المنحنى $ص = س^{٢} + \frac{٥٤}{س} - ٢٢$

ب توجد طريقتان لتحديد نوع النقطة الحرجة عند (٣، ٥):

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

أوجِد $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س - أس^{-٢} = ٢س - ٥٤س^{-٢}$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢ + ١٠٨س^{-٣} = ٢ + \frac{١٠٨}{س^٣}$

عوّض بدل س = ٣ لتحصل على:

$٢ + \frac{١٠٨}{٣^٣} = ٦$ وهي قيمة موجبة.

فتكون (٣، ٥) نقطة صغرى.

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

ادرس ميل المنحنى على جانبَي النقطة (٣، ٥).

عوّض بدل س = ٢ في $\frac{ءص}{ءس} = ٢س - \frac{٥٤}{س^٢}$ لتحصل على:

$\frac{ءص}{ءس} = ٢(٢) - \frac{٥٤}{٢^٢} = -\frac{١٩}{٢}$ وهي قيمة سالبة.

عوّض بدل س = ٤ في $\frac{ءص}{ءس} = ٢س - \frac{٥٤}{س^٢}$ لتحصل على:

$\frac{ءص}{ءس} = ٢(٤) - \frac{٥٤}{٤^٢} = \frac{٣٧}{٨}$ وهي قيمة موجبة.

وحيث إن إشارة ميل المنحنى تتغيّر من سالبة إلى موجبة عندما تتحرك قيمة س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة، فتكون (٣، ٥) نقطة صغرى.

ج $ص = س^٢ + ٥٤س^{-١} - ٢٢$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س - \frac{٥٤}{س^٢}$

تكون الدالة متناقصة عندما $\frac{ءص}{ءس} < ٠$

$٢س - \frac{٥٤}{س^٢} < ٠$

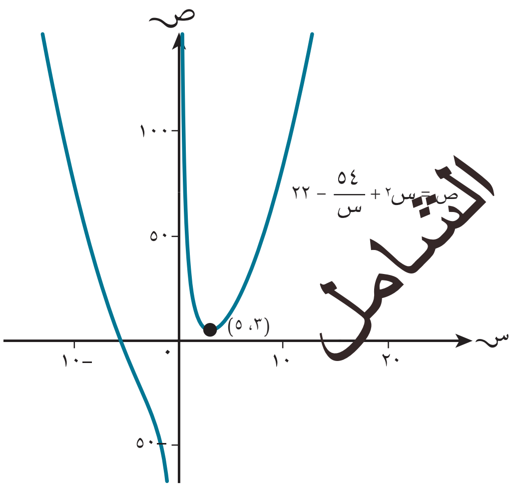
$\frac{٢س^٣ - ٥٤}{س^٢} < ٠$

$س^٣ < ٢٧$

$س < ٣$

للمنحنى قيمة صغرى عند س = ٣ وخط تقارب رأسي (حيث تكون الدالة غير معرّفة) عند س = ٠، ∴ هذه هي القيم الحرجة للدالة.

ونلاحظ من المنحنى أدناه أن $٢س - \frac{٥٤}{س^٢} < ٠$ عندما $س < ٠$ أو $٠ < س < ٣$:



١٣) أ لتكن الدالة $ص = ٢س^٣ + أس^٢ + ب س + ٧$

عوّض بدل س = ٢، ص = −١٣ في الدالة لتحصل على:

$-١٣ = ٢ × ٢^٣ + أ × ٢^٢ + ب × ٢ + ٧$

$-١٣ = ٢٣ + ٤أ + ٢ب$

$٤أ + ٢ب = -٣٦$ .... [١]

بما أن $ص = ٢س^٣ + أس^٢ + ب س + ٧$

فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^{٢} + ٢أس + ب

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

فيكون ٦س^{٢} + ٢أس + ب = ٠

عوّض بدل س = ٢ لتحصل على:

٦ × ٢^{٢} + ٢أ × ٢ + ب = ٠ .... [٢]

٤أ + ب = −٢٤ .... [٢]

اطرح المعادلة [٢] من المعادلة [١] لتحصل على: ب = −١٢

عوّض بدل ب في المعادلة [٢] لتحصل على:

٤أ + (−١٢) = −٢٤ .... [٢]

أ = −٣

ب حل المعادلة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠ لتحصل على جميع النقاط الحرجة.

من الجزئية السابقة: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^{٢} + ٢أس + ب

حيث أ = −٣، ب = −١٢. فيكون

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^{٢} − ٦س − ١٢

فيكون ٦س^{٢} − ٦س − ١٢ = ٠ أو س^{٢} − س − ٢ = ٠

(س − ٢)(س + ١) = ٠

س = ٢ (معطاة في السؤال)، أو س = −١

عوّض بدل س = −١ في معادلة المنحنى لتحصل على الإحداثي الصادي.

ص = ٢س^{٣} + أس^{٢} + ب س + ٧

ص = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − ١٢ س + ٧

ص = ٢(−١)^{٣} − ٣(−١)^{٢} − ١٢ (−١) + ٧

ص = ١٤

فتكون النقطة الحرجة الأخرى هي (−١، ١٤).

ج توجد طريقتان لتحديد نوع النقطة الحرجة:

الطريقة ١: اختبار المشتقة الثانية

أوجِد $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^{٢} − ٦س − ١٢

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ١٢س − ٦

عوّض بدل س = ٢ لتجد أن ١٢ × ٢ − ٦ = ١٨ وهي قيمة موجبة، فتكون (٢، −١٣) نقطة صغرى.

عوّض بدل س = −١ لتجد أن ١٢ × ٢ − ٦ = −١٨ وهي قيمة سالبة، فتكون (−١، ١٤) نقطة عظمى.

الطريقة ٢: اختبار المشتقة الأولى

الآن ادرس ميل المنحنى على جانبَي النقطة (٢، −١٣):

عوّض بدل س = ١ في $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^{٢} − ٦س − ١٢

لتحصل على: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦(١)^{٢} − ٦(١) − ١٢ = −١٢

وهي قيمة سالبة.

عوّض بدل س = ٣ في $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^{٢} − ٦س − ١٢

لتحصل على: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦(٣)^{٢} − ٦(٣) − ١٢ = ٢٤

وهي قيمة موجبة.

وحيث إنه تتغير إشارة ميل المنحنى من سالبة إلى موجبة عندما تتحرك قيم س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة، فإن (٢، −١٣) هي نقطة صغرى.

الآن ادرس ميل المنحنى على جانبَي النقطة (−١، ١٤):

عوّض بدل س = −٢ في

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^{٢} − ٦س − ١٢ لتحصل على:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦(-٢)^{٢} - ٦(-٢) - ١٢ = ٢٤$ وهي قيمة موجبة.

عوّض بدل س = ٠ في $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ١٢$

لتحصل على:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦(٠)^{٢} - ٦(٠) - ١٢ = -١٢$ وهي قيمة سالبة.

وحيث إن إشارة ميل المنحنى تتغير من موجبة إلى سالبة عندما تتحرك قيم س على المنحنى من اليسار إلى اليمين مرورًا بالنقطة الحرجة، فإن (−١، ١٤) هي نقطة عظمى.

د) تحتاج أن تجد أين تكون

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ١٢$ نقطة صغرى.

أكمل المربع لتحصل على:

$= ٦\left(\text{س}^{٢} - \text{س}\right) - ١٢$

$= ٦\left(\left(\text{س} - \frac{١}{٢}\right)^{٢} - \frac{١}{٤}\right) - ١٢$

$= ٦\left(\text{س} - \frac{١}{٢}\right)^{٢} - ١٣{,}٥$

أقل قيمة للعبارة $٦\left(\text{س} - \frac{١}{٢}\right)^{٢} - ١٣{,}٥$ هي $-١٣{,}٥$

ويكون ذلك عندما س = $\frac{١}{٢}$ لأن $٦\left(\text{س} - \frac{١}{٢}\right)^{٢} \geqslant ٠$

عوّض بدل س = $\frac{١}{٢}$ في معادلة المنحنى لتحصل على الإحداثي الصادي

$\text{ص} = ٢\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٧$

$\text{ص} = ٢\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} - ٣\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} - ١٢\left(\frac{١}{٢}\right) + ٧$

$\text{ص} = \frac{١}{٢}$

النقطة على المنحنى التي يكون عندها أصغر قيمة للميل هي $\left(\frac{١}{٢}، \frac{١}{٢}\right)$ ومقدارها $-١٣{,}٥$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الرابعة

١) لتكن $\text{ص} = \frac{٣\text{س}^{٥} - ٧}{٤\text{س}}$

أعد كتابة الدالة في صورة $\text{ص} = \frac{٣}{٤}\text{س}^{٤} - \frac{٧}{٤}\text{س}^{-١}$

أوجد مشتقة الدالة لتحصل على:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^{٣} + \frac{٧}{٤}\text{س}^{-٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^{٣} + \frac{٧}{٤\text{س}^{٢}}$

٢) $\text{ص} = \frac{٨}{٤\text{س} - ٥}$

أعد كتابة الدالة في صورة $\text{ص} = ٨(٤\text{س} - ٥)^{-١}$

استخدم قاعدة السلسلة:

افترض أن ع = ٤س − ٥ فيكون $\text{ص} = ٨\text{ع}^{-١}$

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٤$، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = -٨\text{ع}^{-٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$= -٨\text{ع}^{-٢} \times ٤$

$= -٣٢\text{ع}^{-٢}$

$= -\frac{٣٢}{(٤\text{س} - ٥)^{٢}}$ يمكن حلّها ذهنيًا

ميل المماس عند س = ٢ هو:

$-\frac{٣٢}{(٨ - ٥)^{٢}} = -٣\frac{٥}{٩}$

٣) $\text{ص} = ٣\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + \text{س} - ٧$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٩\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ١$

$= (٣\text{س} - ١)^{٢}$

وهذه القيمة دائمًا موجبة.

٤) $ص = (٣ - ٥س)^{٣} - ٢س$

يمكن إيجاد مشتقة دالة مثل $ص = (٣ - ٥س)^{٣} - ٢س$ بدون استخدام قاعدة السلسلة، كالآتي:

$$\frac{د}{دس}(٣ - ٥س)^{٣} = ٣(٣ - ٥س)^{٢} \times (-٥)$$

$$= -١٥(٣ - ٥س)^{٢}،\quad \frac{د}{دس}(٢س) = ٢$$

$$\therefore \frac{د}{دس}((٣ - ٥س)^{٣} - ٢س)$$

$$= -١٥(٣ - ٥س)^{٢} - ٢$$

كما يمكن استخدام قاعدة السلسلة لتجد مشتقة الحدّ الأول:

افترض أن $ع = ٣ - ٥س$ فتكون $ص = ع^{٣}$

$$\frac{دع}{دس} = -٥،\quad \frac{دص}{دع} = ٣ع^{٢}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$

$$= ٣ع^{٢} \times -٥$$

$$= ٣(٣ - ٥س)^{٢} \times -٥$$

$$= -١٥(٣ - ٥س)^{٢}$$

الآن أوجِد مشتقة الدالة كاملة:

$$\frac{دص}{دس} = -١٥(٣ - ٥س)^{٢} - ٢$$

أوجِد مشتقة $\frac{دص}{دس}$ (استخدم قاعدة السلسلة في الحدّ الأوّل)

$$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = -٣٠(٣ - ٥س) \times -٥$$

$$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ١٥٠(٣ - ٥س)$$

٥) لتكن الدالة $ص = \frac{١٥}{س^{٢} - ٢س}$

أعد كتابة الدالة في صورة $ص = ١٥(س^{٢} - ٢س)^{-١}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن $ع = س^{٢} - ٢س$ فيكون $ص = ١٥ع^{-١}$

$$\frac{دع}{دس} = ٢س - ٢،\quad \frac{دص}{دع} = -١٥ع^{-٢}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$

$$= -١٥ع^{-٢} \times (٢س - ٢)$$

$$= -١٥(س^{٢} - ٢س)^{-٢} \times (٢س - ٢)$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{-١٥(٢س - ٢)}{(س^{٢} - ٢س)^{٢}}$$

عندما $س = ٥$ فإن:

$$\frac{دص}{دس} = -\frac{١٥(٢ \times ٥ - ٢)}{(٥^{٢} - ٢ \times ٥)^{٢}}$$

$$= -\frac{١٢٠}{٢٢٥}$$

$$= -\frac{٨}{١٥}$$

٦) أ) الدالة $ص = ٥\sqrt{س}$

أعد كتابة الدالة في صورة $ص = ٥س^{\frac{١}{٢}}$

أوجِد مشتقة الدالة:

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٥}{٢س^{\frac{١}{٢}}}$$

عندما $س = ٤$ يكون ميل المماس للمنحنى

$$= \frac{٥}{٢(٤)^{\frac{١}{٢}}}$$

$$م = \frac{٥}{٤}$$

يمر العمودي بالنقطة (٤، ١٠) وميله:

$$-\frac{١}{م} = -\frac{١}{\frac{٥}{٤}} = -\frac{٤}{٥}$$

لتجد معادلة العمودي استخدم الصيغة:

$$ص - ص_{١} = -\frac{١}{م}(س - س_{١})$$

$$ص - ١٠ = -\frac{٤}{٥}(س - ٤)$$

$$ص - ١٠ = -\frac{٤}{٥}س + \frac{١٦}{٥}$$

$ص = -\frac{٤}{٥}س + \frac{٦٦}{٥}$

$٤س + ٥ص = ٦٦$

ب يتقاطع العمودي الذي معادلته $٤س + ٥ص = ٦٦$ مع محور السينات حيث $ص = ٠$

فيكون $٤س + ٥(٠) = ٦٦$

$٤س = ٦٦$

$س = ١٦,٥$

إحداثيات **ن** $(١٦,٥ ، ٠)$

٧) **أ** الدالة $ص = ٥س + \frac{١٢}{س^{٢}}$

أعد كتابة الدالة في صورة $ص = ٥س + ١٢س^{-٢}$

أوجِد المشتقة:

$$\frac{ءص}{ءس} = ٥ - ٢٤س^{-٣}$$

$$= ٥ - \frac{٢٤}{س^{٣}}$$

ب عند $س = ٢$ يكون ميل المنحنى:

$$م = ٥ - \frac{٢٤}{٢^{٣}}$$

$$م = ٢$$

يمر العمودي بالنقطة $(٢ ، ١٣)$ وميله $= -\frac{١}{م} = -\frac{١}{٢}$

أوجِد معادلة العمودي الذي يمر في $(٢ ، ١٣)$

باستخدام الصيغة:

$$ص - ص_{١} = -\frac{١}{م}(س - س_{١})$$

$$ص - ١٣ = -\frac{١}{٢}(س - ٢)$$

$$ص - ١٣ = -\frac{١}{٢}س + ١$$

$$ص = -\frac{١}{٢}س + ١٤$$

$$٢ص + س = ٢٨$$

يتقاطع العمودي مع محور السينات حيث $ص = ٠$

فيكون

$$٢(٠) + س = ٢٨$$

$$س = ٢٨$$

$\therefore$ يتقاطع العمودي مع محور السينات في $(٢٨ ، ٠)$

٨) لتكن $ص = \frac{١٢}{\sqrt{س}}$

أعد كتابة الدالة في صورة

$$ص = ١٢س^{-\frac{١}{٢}}$$

أوجِد المشتقة لتحصل على:

$$\frac{ءص}{ءس} = -٦س^{-\frac{٣}{٢}}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = -\frac{٦}{س^{\frac{٣}{٢}}}$$

عندما $س = ٩$ فإن ميل المنحنى $= -\frac{٦}{٩^{\frac{٣}{٢}}}$

$$م = -\frac{٢}{٩}$$

يمر العمودي بالنقطة $(٩ ، ٤)$ وميله

$$= -\frac{١}{م} = -\frac{١}{-\frac{٢}{٩}} = \frac{٩}{٢}$$

أوجِد معادلة العمودي الذي يمر بالنقطة $(٩ ، ٤)$

باستخدام الصيغة:

$$ص - ص_{١} = -\frac{١}{م}(س - س_{١})$$

$$ص - ٤ = \frac{٩}{٢}(س - ٩)$$

$$ص - ٤ = \frac{٩}{٢}س - \frac{٨١}{٢}$$

$$ص = \frac{٩}{٢}س - \frac{٧٣}{٢}$$

$$٢ص = ٩س - ٧٣$$

يتقاطع العمودي مع محور السينات حيث $ص = ٠$

فيكون:

$$٢(٠) = ٩س - ٧٣$$

$$س = \frac{٧٣}{٩}$$

وإحداثيات **ل** $(\frac{٧٣}{٩} ، ٠)$

يتقاطع العمودي مع محور الصادات حيث $س = ٠$

فيكون:

$٢ص = ٩(٠) - ٧٣$

$ص = -٣٦,٥$

وإحداثيات **و** $(٠، -٣٦,٥)$

٩) الدالة $ص = س(س - ٣)(س - ٥)$

فكّ الأقواس:

$ص = (س^{٢} - ٣س)(س - ٥)$

$ص = س^{٣} - ٥س^{٢} - ٣س^{٢} + ١٥س$

$ص = س^{٣} - ٨س^{٢} + ١٥س$

أوجد مشتقة الدالة لتحصل على:

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} - ١٦س + ١٥$

عند $س = ٣$ يكون ميل المماس:

$= ٣ \times ٣^{٢} - ١٦ \times ٣ + ١٥$

$= -٦$

استخدم الصيغة $ص - ص_{١} = م\,(س - س_{١})$، $م = -٦$،

أ$(٣، ٠)$ معادلة المماس:

$ص - ٠ = -٦(س - ٣)$

$ص = -\,٦س + ١٨$ .... [١]

عند $س = ٥$ يكون ميل المماس:

$= ٣ \times ٥^{٢} - ١٦ \times ٥ + ١٥$

$= ١٠$

استخدم الصيغة $ص - ص_{١} = م\,(س - س_{١})$، $م = ١٠$،

ب$(٥، ٠)$ معادلة المماس:

$ص - ٠ = ١٠(س - ٥)$

$ص = ١٠س - ٥٠$ .... [٢]

حل المعادلتَين [١]، [٢] لتحصل على:

$-٦س + ١٨ = ١٠س - ٥٠$

$١٦س = ٦٨$

$س = ٤,٢٥$

عوّض بدل $س = ٤,٢٥$ في المعادلة [١] لتحصل على:

$ص = -٦(٤,٢٥) + ١٨$

$ص = -٧,٥$

فتكون **ج**$(٤,٢٥، -٧,٥)$

١٠) أ لتكن الدالة $ص = \frac{٢}{(س - ٣)^{٢}}$

أعد كتابة الدالة في صورة $ص = ٢(س - ٣)^{-٢}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

افترض أن $ع = س - ٣$ فيكون $ص = ٢ع^{-٢}$

$\frac{دع}{دس} = ١$، $\frac{دص}{دع} = -٤ع^{-٣}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$= -٤ع^{-٣} \times ١$

$= -٤ع^{-٣}$

$= -\frac{٤}{(س - ٣)^{٣}}$

عندما $س = ٤$، $\frac{دص}{دس} = -\frac{٤}{(٤ - ٣)^{٣}} = -٤$

يمر المماس بالنقطة $(٤، ٢)$ وميله $= -٤$

استخدم الصيغة $ص - ص_{١} = م\,(س - س_{١})$

$ص - ٢ = -٤\,(س - ٤)$

$ص - ٢ = -٤س + ١٦$

$ص = -٤س + ١٨$

ب يمر العمودي بالنقطة $(٤، ٢)$

وميله $= -\frac{١}{م} = -\frac{١}{-٤} = \frac{١}{٤}$

استخدم الصيغة $ص - ص_{١} = -\frac{١}{م}\,(س - س_{١})$

$ص - ٢ = \frac{١}{٤}(س - ٤)$

$ص - ٢ = \frac{١}{٤}س - ١$

$ص = \frac{١}{٤}س + ١$

١١) أ لتكن الدالة $ص = ٣ - \frac{١٠}{س}$

أعد كتابة الدالة في صورة $ص = ٣ - ١٠س^{-١}$

اشتق الدالة لتحصل على:

$\frac{دص}{دس} = ١٠س^{-٢}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١٠}{س^{٢}}$

عند النقطة حيث س = ٥ يكون ميل المماس = $\frac{١٠}{٥^{٢}}$

$م = \frac{٢}{٥}$

يمر العمودي بالنقطة (٥، ١) وميله

$= -\frac{١}{م} = -\frac{١}{\frac{٢}{٥}} = -\frac{٥}{٢}$

استخدم الصيغة $ص - ص_{١} = -\frac{١}{م}(س - س_{١})$، **ل**(٥، ١).

معادلة العمودي على المنحنى هي:

$ص - ١ = -\frac{٥}{٢}(س - ٥)$

$٢ص - ٢ = -٥س + ٢٥$

$٥س + ٢ص = ٢٧$

ب أوجِد إحداثيات **ن** عند حل المعادلتَين:

$٥س + ٢ص = ٢٧$ .... [١]

$ص = ٣ - \frac{١٠}{س}$ .... [٢]

استخدم المعادلة [٢] وعوّض بدل ص في المعادلة [١]:

$٥س + ٢(٣ - \frac{١٠}{س}) = ٢٧$

$٥س + ٦ - \frac{٢٠}{س} = ٢٧$

$٥س^{٢} + ٦س - ٢٠ = ٢٧س$

$٥س^{٢} - ٢١س - ٢٠ = ٠$

$(٥س + ٤)(س - ٥) = ٠$

إما س − ٥ = ٠، س = ٥ (النقطة **ل**)

أو ٥س + ٤ = ٠، س = −٠,٨

عوّض بدل س = −٠,٨ في المعادلة [٢] لتحصل على:

$ص = ٣ - \frac{١٠}{-٠,٨}$

ص = ١٥,٥

فتكون **ن** (−٠,٨، ١٥,٥)

١٢) أ (١، −١)، **ب** (٤، ١١).

ميل **أب** = $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$

$= \frac{١١ - (-١)}{٤ - ١}$

$= ٤$

الدالة $ص = ٣س - \frac{٤}{س}$

أعد كتابة الدالة في صورة $ص = ٣س - ٤س^{-١}$

أوجد مشتقة الدالة لتحصل على:

$\frac{دص}{دس} = ٣ + ٤س^{-٢}$

$= ٣ + \frac{٤}{س^{٢}}$

ميل المماس عند **ج**، **د** يساوي ٤ فيكون:

$= ٣ + \frac{٤}{س^{٢}} = ٤$

$٣س^{٢} + ٤ = ٤س^{٢}$

$س^{٢} = ٤$

$س = ±٢$

عوّض بدل س = ٢ في $ص = ٣س - \frac{٤}{س}$ لتحصل على:

$ص = ٣(٢) - \frac{٤}{٢}$

ص = ٤

عوّض بدل س = − ٢ في $٣س - \frac{٤}{س}$ لتحصل على:

$ص = ٣(-٢) - \frac{٤}{-٢}$

$ص = -٤$

إحداثيات النقطتَين ج، ء هي (٢، ٤)، (-٢، -٤).

أوجِد نقطة منتصف $\overline{جء}$ باستخدام الصيغة:

$$\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{٢ + (-٢)}{٢}، \frac{٤ + (-٤)}{٢}\right)$$

نقطة المنتصف (٠، ٠).

$$\text{ميل جء} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{-٤ - ٤}{-٢ - ٢} = ٢$$

ميل أي مستقيم عمودي على ج ء يساوي $-\frac{١}{٢}$

∴ ميل العمود المنصف هو $-\frac{١}{٢}$ ويمر في (٠، ٠)

أوجِد معادلة العمود المنصف باستخدام:

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$ص - ٠ = -\frac{١}{٢} (س - ٠)$

$ص = -\frac{١}{٢}س$

١٣) لتكن الدالة $ص = ٢ - \frac{١٨}{٢س + ٣}$

يمر المنحنى بالنقطة أ على محور السينات حيث

$ص = ٠$

أي أن $٢ - \frac{١٨}{٢س + ٣} = ٠$

$\frac{١٨}{٢س + ٣} = ٢$

$٤س + ٦ = ١٨$

$س = ٣$

فتكون النقطة أ(٣، ٠)

يمر المنحنى بالنقطة ب على محور الصادات حيث

$س = ٠$

أي أن $ص = ٢ - \frac{١٨}{٢(٠) + ٣}$

$ص = ٢ - \frac{١٨}{٣}$

$ص = -٤$

فيكون ب (٠، -٤)

أعد كتابة الدالة $ص = ٢ - \frac{١٨}{٢س + ٣}$ في صورة:

$ص = ٢ - ١٨(٢س + ٣)^{-١}$

أوجد مشتقة الدالة لتحصل على:

$$\frac{ءص}{ءس} = ١٨ (٢س + ٣)^{-٢} \times ٢$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣٦}{(٢س + ٣)^٢}$$

ميل المماس عند النقطة، س = ٣ هو:

$$\frac{٣٦}{(٢ \times ٣ + ٣)^٢}$$

$$م = \frac{٣٦}{٨١} = \frac{٤}{٩}$$

يمر العمودي بالنقطة (٣،٠)

وميله $= -\frac{١}{م} = -\frac{١}{\frac{٤}{٩}} = -\frac{٩}{٤}$

استخدم الصيغة $ص - ص_١ = -\frac{١}{م} (س - س_١)$،

$-\frac{١}{م} = -\frac{٩}{٤}$

أ(٣، ٠)

لتجد معادلة العمودي على المنحنى:

$ص - ٠ = -\frac{٩}{٤} (س - ٣)$

$٤ص = -٩س + ٢٧$

$٤ص + ٩س = ٢٧$

١٤) أ لتكن الدالة ص = ٣ + ٤س − س^{٢}

أوجد مشتقة الدالة لتحصل على:

$\frac{دص}{دس}$ = ٤ − ٢س

عند س = ٣ يكون ميل المماس:

= ٤ − ٢ × ٣

م = −٢

يمر العمودي بالنقطة (٣، ٦) وميله

$-\frac{١}{م} = -\frac{١}{-٢} = \frac{١}{٢}$

استخدم الصيغة ص − ص$_{١}$ = $-\frac{١}{م}$ (س − س$_{١}$)،

$-\frac{١}{م} = \frac{١}{٢}$، **ل** (٣، ٦) لتجد معادلة العمودي على المنحنى:

ص − ٦ = $\frac{١}{٢}$(س − ٣)

٢ص − ١٢ = س − ٣

٢ص = س + ٩

ب يقطع هذا العمودي محور السينات في النقطة أ حيث ص = ٠ فيكون، ٢ (٠) = س + ٩

س = −٩

وتكون أ (−٩، ٠)

يقطع هذا العمودي محور الصادات في النقطة **ب** حيث س = ٠

فيكون، ٢ص = ٠ + ٩

ص = ٤,٥

وتكون **ب** (٠، ٤,٥)

أوجِد نقطة منتصف $\overline{أب}$ باستخدام:

$\left(\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}، \frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢}\right)$

= $\left(\frac{-٩ + ٠}{٢}، \frac{٠ + ٤,٥}{٢}\right)$

نقطة المنتصف ($\frac{-٩}{٢}$، $\frac{٩}{٤}$).

ج لإيجاد تقاطع العمودي مع المنحنى، حل المعادلتَين الآنيتَين:

ص = ٣ + ٤س − س^{٢} .... [١]

٢ص = س + ٩ .... [٢]

الطريقة ١

اضرب المعادلة [١] في ٢ لتحصل على:

٢ص = ٦ + ٨س− ٢س^{٢}

ويكون، ٦ + ٨س − ٢س^{٢} = س + ٩

أو ٢س^{٢} − ٧س + ٣ = ٠

(٢س − ١) (س − ٣) = ٠

فيكون إما: س − ٣ = ٠ أي أن س = ٣ (معلومة من السؤال) أو ٢س − ١ = ٠

س = $\frac{١}{٢}$

عوّض بدل س = $\frac{١}{٢}$ في المعادلة [٢] لتحصل على:

٢ص = $\frac{١}{٢}$ + ٩

٢ص = ٩,٥

ص = ٤,٧٥

فيتقاطع العمودي مع المنحنى ثانية في ($\frac{١}{٢}$، ٤$\frac{٣}{٤}$)

ملاحظة:

طريقة بديلة لحل المعادلتَين الآنيتَين عرضت أدناه. سوف تلاحظ أن الطريقة الأولى (التعويض عن ص من المعادلة [١] في المعادلة [٢]) أسهل من الطريقة الثانية، ومن المرجح أن تقل فيها الأخطاء.

الطريقة ٢

اكتب س بدلالة ص في المعادلة [٢] وعوّض بدل س في المعادلة [١]:

س = ٢ص − ٩

ص = ٣ + ٤ (٢ص − ٩) − (٢ص − ٩)^{٢}

انتبة للإشارات !

$ص = ٣ + ٨ص - ٣٦ - ((٢ص - ٩)(٢ص - ٩))$

$ص = ٣ + ٨ص - ٣٦ - (٤ص^{٢} - ١٨ص - ١٨ص + ٨١)$

$ص = ٣ + ٨ص - ٣٦ - ٤ص^{٢} + ٣٦ص - ٨١$

$٤ص^{٢} - ٤٣ص + ١١٤ = ٠$

إذا لاحظت من النظرة الأولى أن المعادلة التربيعية يصعب تحليلها إلى العوامل، فلا تضيّع الوقت، واستخدم الصيغة التربيعية.
يمكن معرفة ذلك أيضًا من خلال إيجاد المميز، وبالتالي يمكن تحليل المعادلة.

قارن المعادلة مع $أص^{٢} + ب ص + جـ = ٠$

فيكون $أ = ٤$، $ب = -٤٣$، $جـ = ١١٤$

$ص = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

$ص = \frac{-(-٤٣) \pm \sqrt{(-٤٣)^{٢} - ٤(٤)(١١٤)}}{٢(٤)}$

$ص = \frac{٤٣ \pm \sqrt{٢٥}}{٨}$

$ص = \frac{٤٣ + ٥}{٨} = ٦$ (معلومة في السؤال).

$ص = \frac{٤٣ - ٥}{٨}$، $ص = ٤\frac{٣}{٤}$

الآن عوّض بدل $ص = ٤\frac{٣}{٤}$ في المعادلة [٢]
لتحصل على:

$٢\left(٤\frac{٣}{٤}\right) = س + ٩$

$س = ٠٫٥$

يتقاطع العمودي مع المنحنى ثانية عند النقطة $\left(\frac{١}{٢}، ٤\frac{٣}{٤}\right)$

١٥) أ المعادلة $ص = (٦س + ٢)^{\frac{١}{٣}}$

أوجِد المشتقة باستخدام قاعدة السلسلة:

افترض أن $ع = ٦س + ٢$، فيكون $ص = ع^{\frac{١}{٣}}$

$\frac{دع}{دس} = ٦$ و $\frac{دص}{دع} = \frac{١}{٣}ع^{-\frac{٢}{٣}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$= \frac{١}{٣}ع^{-\frac{٢}{٣}} \times ٦$

$= ٢(٦س + ٢)^{-\frac{٢}{٣}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{(٦س + ٢)^{-\frac{٢}{٣}}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{\sqrt[٣]{(٦س + ٢)^{٢}}}$

عند النقطة أ حيث $س = ١$ يكون:

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{\sqrt[٣]{(٦ \times ١ + ٢)^{٢}}}$

$= \frac{٢}{٤}$

$م = \frac{١}{٢}$

استخدم $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$، $م = \frac{١}{٢}$، أ $(١، ٢)$
لتجد معادلة المماس.

$ص - ٢ = \frac{١}{٢}(س - ١)$

$٢ص - ٤ = س - ١$

$٢ص = س + ٣$

يمر العمودي بالنقطة $(١، ٢)$

وميله $= -\frac{١}{م} = -\frac{١}{\frac{١}{٢}} = -٢$

استخدم الصيغة $ص - ص_{١} = -\frac{١}{م}(س - س_{١})$،

$م = -٢$، $(١، ٢)$ لتجد معادلة العمودي.

$ص - ٢ = -٢(س - ١)$

$ص - ٢ = -٢س + ٢$

$ص + ٢س = ٤$

ب استخدم صيغة الميل $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$ لتجد معادلة المستقيم ب ج.

ب$(٠، \frac{٣}{٢})$، ج $(٢، ٠)$

فيكون ميل ب ج $= \frac{٠ - \frac{٣}{٢}}{٢ - ٠} = -\frac{٣}{٤}$

استخدم ص − ص١ = م (س − س١)، م $= -\frac{٣}{٤}$،

ج (٢، ٠) لتجد معادلة المستقيم ب ج.

$ص = -\frac{٣}{٤}(س - ٢)$ .... [١]

أوجِد معادلة المستقيم و أ.

استخدم $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$، و(٠، ٠)، أ (١، ٢)

ميل و أ $= \frac{٢ - ٠}{١ - ٠} = ٢$

استخدم ص − ص١ = م (س − س١)، م = ٢، و(٠، ٠).

ص − ٠ = ٢ (س − ٠)

معادلة و أ هي ص = ٢س .... [٢]

لتجد هـ نقطة تقاطع المستقيمَين و أ، ب ج حل

المعادلتَين [١]، [٢] آنيًا.

أي: $ص = -\frac{٣}{٤}(س - ٢)$، ص = ٢س

$-\frac{٣}{٤}(س - ٢) = ٢س$

−٣ (س − ٢) = ٨س

−٣س + ٦ = ٨س

١١س = ٦

$س = \frac{٦}{١١}$

عوّض بدل $س = \frac{٦}{١١}$

في المعادلة [٢] لتحصل على:

$ص = ٢ \times \frac{٦}{١١} = \frac{١٢}{١١}$

فتكون النقطة هـ $\left(\frac{٦}{١١}، \frac{١٢}{١١}\right)$

أوجِد نقطة منتصف و أ حيث أ(١، ٢)، و(٠، ٠)

باستخدام

$\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

$= \left(\frac{١ + ٠}{٢}، \frac{٢ + ٠}{٢}\right)$

فتكون نقطة المنتصف $\left(\frac{١}{٢}، ١\right)$.

وعلية فإن هـ ليست هي نقطة منتصف $\overline{\text{و أ}}$.

١٦) لتكن الدالة $ص = ٢٧س - \frac{٤}{(س + ٢)^٢}$

أعد كتابة الدالة في صورة

$ص = ٢٧س - ٤ (س + ٢)^{-٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٢٧ - (-٢) \times ٤ (س + ٢)^{-٣} \times ١$

$\frac{دص}{دس} = ٢٧ + ٨(س + ٢)^{-٣}$

$\frac{دص}{دس} = ٢٧ + \frac{٨}{(س + ٢)^٣}$

توجد نقاط حرجة عندما $\frac{دص}{دس} = ٠$

$٢٧ + \frac{٨}{(س + ٢)^٣} = ٠$

$-٢٧ = \frac{٨}{(س + ٢)^٣}$

$(س + ٢)^٣ = -\frac{٨}{٢٧}$

$س + ٢ = -\frac{٢}{٣}$

$س = -\frac{٨}{٣}$

∴ توجد نقطة حرجة عند $س = -\frac{٨}{٣}$

لتحدد نوع النقطة الحرجة إما أن تجد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ أو

تجد الميل إلى جانبَي $س = -\frac{٨}{٣}$

الطريقة ١

أوجِد $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{د س}^٢}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢٧ + ٨(\text{س} + ٢)^{-٣}$$

$$\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{د س}^٢} = -٣ \times ٨(\text{س} + ٢)^{-٤} \times ١$$

$$= \frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{د س}^٢} = -\frac{٢٤}{(\text{س} + ٢)^٤}$$

عوّض بدل س= $-\frac{٨}{٣}$ في دالة المشتقة الثانية لتحصل

على:

$$\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{د س}^٢} = -\frac{٢٤}{\left(\left(-\frac{٨}{٣}\right) + ٢\right)^٤} = -\frac{٢٤٣}{٢}$$

هذه قيمة سالبة فتكون النقطة الحرجة نقطة عظمى.

> اقرأ السؤال جيدًا. ليس مطلوبًا في هذا السؤال أن تجد الإحداثي الصادي.

الطريقة ٢

أوجِد الميل إلى جانبَي النقطة الحرجة.

أوجِد الميل عند النقطة س = -٣

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢٧ + \frac{٨}{(-٣ + ٢)^٣} = ١٩$$

اختر نقطة إلى الجانب الآخر من $-\frac{٨}{٣}$ مثل $-\frac{٧}{٣}$

(**ملاحظة**: عندما س = -٢ فإن

ص = $٢٧ \times -٢ - \frac{٤}{(-٢ + ٢)^٢}$، ومنه فإن س = -٢ خط تقاربي).

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢٧ + \frac{٨}{\left(-\frac{٧}{٣} + ٢\right)^٣} = -١٨٩$$

وحيث إن الميل يتغير من موجب إلى سالب فتكون النقطة الحرجة نقطة عظمى.

١٧) أ لتكن الدالة ص = $\frac{٨}{\text{س}} + ٢\text{س}$

أعد كتابة الدالة في صورة ص = $٨\text{س}^{-١} + ٢\text{س}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -٨\text{س}^{-٢} + ٢$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\frac{٨}{\text{س}^٢} + ٢$$

$$\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{د س}^٢} = ١٦\text{س}^{-٣}$$

$$\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{د س}^٢} = \frac{١٦}{\text{س}^٣}$$

ب عند النقطة الحرجة يكون $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٠$

$$-\frac{٨}{\text{س}^٢} + ٢ = ٠$$

$$-\frac{٨}{\text{س}^٢} = -٢$$

$$-٢\text{س}^٢ = -٨$$

$$\text{س}^٢ = ٤$$

$$\text{س} = \pm ٢$$

توجد نقاط حرجة عند س = ± ٢

لتحدد نوع النقاط الحرجة.

عوّض بدل قيم الإحداثيات السينية (س = ± ٢)

في $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{د س}^٢}$

إذا كان س = ٢ فإن $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{د س}^٢} = \frac{١٦}{\text{س}^٣}$ وقيمتها:

$\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{د س}^٢} = \frac{١٦}{٢^٣} = ٢$ وهي قيمة موجبة، وعليه تكون

س = ٢ نقطة صغرى.

عوّض بدل س = ٢ في ص = $\frac{٨}{\text{س}} + ٢\text{س}$ لتجد

الإحداثي الصادي.

$$\text{ص} = \frac{٨}{٢} + ٢ \times ٢ = ٨$$

إذا كان س = -٢ فإن $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{د س}^٢} = \frac{١٦}{\text{س}^٣}$ وقيمتها:

$\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{د س}^٢} = \frac{١٦}{(-٢)^٣} = -٢$ وهي قيمة سالبة، وعليه

تكون س = ٢ نقطة عظمى.

عوّض بدل $س = -٢$ في $ص = \frac{٨}{س} + ٢س$ لتجد الإحداثي الصادي.

$$ص = \frac{٨}{-٢} + ٢(-٢) = -٨$$

الحل: النقطة (٢، ٨) نقطة صغرى لأن

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} > ٠$ عندما $س = ٢$

النقطة (−٢، −٨) نقطة عظمى لأن $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} < ٠$

عندما $س = -٢$

١٨) أ لتكن الدالة $ص = س^{٣} + س^{٢} - ٥س + ٧$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} + ٢س - ٥$$

إذا كانت $\frac{ءص}{ءس} < ٣$ فإن:

$$٣س^{٢} + ٢س - ٥ < ٣$$

$$٣س^{٢} + ٢س - ٨ < ٠$$

$$(٣س - ٤)(س + ٢) < ٠$$

تمثيل الدالة $ص = (٣س - ٤)(س + ٢)$ دالة تربيعية شكلها $\cup$

حل المعادلات الآتية لتجد المقاطع من محور السينات:

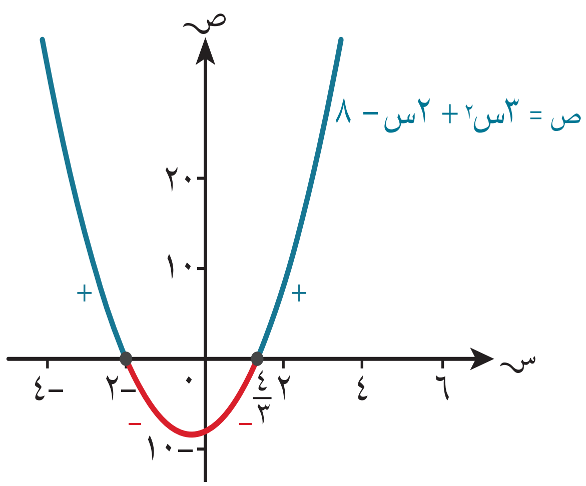
$$٣س - ٤ = ٠$$

$$٣س = ٤$$

$$س = \frac{٤}{٣}$$

و $س + ٢ = ٠$

$$س = -٢$$



نريد أن نحل المتباينة $٣س^{٢} + ٢س - ٨ < ٠$، أي عندما يكون المنحنى أسفل المحور السيني.

الحل: $-٢ < س < \frac{٤}{٣}$

ب حل المعادلة $\frac{ءص}{ءس} = ٠$ لتجد النقاط الحرجة على المنحنى.

وحيث إن $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} + ٢س - ٥$

$$٣س^{٢} + ٢س - ٥ = ٠$$

$$(٣س + ٥)(س - ١) = ٠$$

إما: $٣س + ٥ = ٠$

$$٣س = -٥$$

$$س = -\frac{٥}{٣}$$

أو: $س - ١ = ٠$

$$س = ١$$

إذا كانت $س = -\frac{٥}{٣}$، فعوّض بدل $س = -\frac{٥}{٣}$ في $ص = س^{٣} + س^{٢} - ٥س + ٧$ لتحصل على:

$$ص = \left(-\frac{٥}{٣}\right)^{٣} + \left(-\frac{٥}{٣}\right)^{٢} - ٥\left(-\frac{٥}{٣}\right) + ٧$$

$$ص = \frac{٣٦٤}{٢٧}$$

لذا $\left(-\frac{٥}{٣}، \frac{٣٦٤}{٢٧}\right)$ نقطة حرجة.

إذا كانت س = ١، فعوّض بدل س = ١ في ص = س^{٣} + س^{٢} − ٥س + ٧ لتحصل على:

ص = (١)^{٣} + (١)^{٢} − ٥(١) + ٧

ص = ٤

لذا (١، ٤) نقطة حرجة.

أوجِد $\frac{ى^{٢}ص}{ى س^{٢}}$ حيث إنك تحدّد نوع النقطة الحرجة عندما س = $-\frac{٥}{٣}$

وحيث إن $\frac{ى ص}{ى س}$ = ٣س^{٢} + ٢س − ٥

يكون $\frac{ى^{٢}ص}{ى س^{٢}}$ = ٦س + ٢

لذا عندما س = $-\frac{٥}{٣}$

فإن $\frac{ى^{٢}ص}{ى س^{٢}}$ = ٦ $\left(-\frac{٥}{٣}\right)$ + ٢ = −٨

وهذه قيمة سالبة فتكون $\left(-\frac{٥}{٣}، \frac{٣٦٤}{٢٧}\right)$ نقطة عظمى.

عوّض بدل س = ١ في $\frac{ى^{٢}ص}{ى س^{٢}}$ = ٦س + ٢ لتحصل على: $\frac{ى^{٢}ص}{ى س^{٢}}$ = ٦(١) + ٢ = ٨

وهذه قيمة موجبة فتكون (١، ٤) نقطة صغرى.

١٩) أ لتكن الدالة ص = س^{٣} + ع س^{٢}

$\frac{ى ص}{ى س}$ = ٣س^{٢} + ٢ع س

توجد النقاط الحرجة عندما $\frac{ى ص}{ى س}$ = ٠

فيكون ٣س^{٢} + ٢ع س = ٠

س (٣س + ٢ع) = ٠

إما س = ٠

أو ٣س + ٢ع = ٠ ومنها س = $-\frac{٢}{٣}$ع.

إذا كانت س = ٠، فعوّض بدل س = ٠ في

ص = س^{٣} + ع س^{٢} لتحصل على:

ص = ٠^{٣} + ع × ٠^{٢}

ومنها ص = ٠

لذا تكون نقطة الأصل (٠، ٠) نقطة حرجة

إذا كانت $س = -\frac{٢}{٣}ع$، فعوّض بدل $س = -\frac{٢}{٣}ع$ في $ص = س^{٣} + ع س^{٢}$ لتحصل على:

$$ص = \left(-\frac{٢}{٣}ع\right)^{٣} + ع \times \left(-\frac{٢}{٣}ع\right)^{٢}$$

$$ص = -\frac{٨}{٢٧}ع^{٣} + \frac{٤}{٩}ع^{٣}$$

$$ص = -\frac{٤}{٢٧}ع^{٣}$$

فتكون $\left(-\frac{٢ع}{٣}، \frac{٤ع^{٣}}{٢٧}\right)$ نقطة حرجة.

ب لتجد نوع كل نقطة حرجة اتبع ما يأتي:

$$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} + ٢عس$$

$$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٦س + ٢ع$$

عوّض بدل $س = ٠$ في $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٦س + ٢ع$ لتحصل على: $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٦(٠) + ٢ع = ٢ع$

بما أن ع موجبة، فإن ٢ع موجبة أيضًا، فتكون (٠، ٠) نقطة صغرى.

عوّض بدل $س = -\frac{٢}{٣}ع$ في $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٦س + ٢ع$ لتحصل على: $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٦\left(-\frac{٢}{٣}ع\right) + ٢ع = -٢ع$

بما أن ع موجبة فإن −٢ع سالبة، فتكون $\left(-\frac{٢ع}{٣}، \frac{٤ع^{٣}}{٢٧}\right)$ نقطة عظمى.

ج لتكن الدالة $ص = س^{٣} + عس^{٢} + عس$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} + ٢عس + ع$$

إذا لم توجد نقاط حرجة فلا توجد جذور حقيقية لـ $٣س^{٢} + ٢عس + ع = ٠$

قارن المعاملات مع $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$، $أ = ٣$، $ب = ٢ع$، $جـ = ع$.

استخدم الصيغة التربيعية $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ فيكون: $ب^{٢} - ٤أجـ < ٠$ لأنه لا توجد جذور.

بالتعويض في المميز نجد أن: $(٢ع)^{٢} - ٤ \times ٣ \times ع < ٠$

أي أن $٤ع^{٢} - ١٢ع < ٠$

ومنها $٤ع(ع - ٣) < ٠$

حل المعادلة ٤ع (ع −٣) =٠ يعطي المقاطع من المحور السيني.