تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

١) أ الدالة ع(س) غير معرفة عندما يكون المقام صفرًا:

س + ٣ = ٠

س = −٣

ب $\text{ع(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س} + ٣}$

$= \dfrac{(\text{س} - ٥)\cancel{(\text{س} + ٣)}}{\cancel{\text{س} + ٣}}$

= س − ٥

عوّض س = −٣ في ع(س) لتجد أن إحداثيات الفجوة هي (−٣، −٨)

٢) أ $= \dfrac{(٥{,}٩٩٩)^{٣} - ٢ \times (٥{,}٩٩٩)^{٢} - ٢٩ \times ٥{,}٩٩٩ + ٣٠}{(٥{,}٩٩٩)^{٢} + ٢ \times ٥{,}٩٩٩ - ٤٨} = ٣{,}٩٢٧٧$

ب $= \dfrac{(٦{,}٠٠١)^{٣} - ٢ \times (٦{,}٠٠١)^{٢} - ٢٩ \times ٦{,}٠٠١ + ٣٠}{(٦{,}٠٠١)^{٢} + ٢ \times ٦{,}٠٠١ - ٤٨} = ٣{,}٩٢٩٤$

ب $\lim\limits_{\text{س} \to ٦} \text{د(س)} = ٣{,}٩٣$

$\text{د(٦)} = \dfrac{٦^{٣} - ٢ \times ٦^{٢} - ٢٩ \times ٦ + ٣٠}{٦^{٢} + ٢ \times ٦ - ٤٨} = \dfrac{٠}{٠}$ وهي كمية غير معرفة ($\ne \lim\limits_{\text{س} \to ٦} \text{د(س)}$).

٣) أ إجابة الطالب غير صحيحة: لأنه لا يوجد خط تقارب رأسي لأن ح(س) معرّفة عند جميع قيم س.

ب استخدم جدول قيم كالجدول الآتي:

س	ح(س)
٠	١
−١	٠,٣٦٧٩
−٥	٠,٠٠٦٧٣٨
−١٠	٠,٠٠٠٠٤٥٤

$\lim\limits_{\text{س} \to -\infty} \text{هـ}^{\text{س}} = ٠$

٤) أ) ١) أنشئ جدولًا من أربع قيم على الأقل لـ س تقترب من ٠,٥ عن اليسار وعن اليمين مثل:

من جهة اليمين: س	من جهة اليمين: ع(س)	من جهة اليسار: س	من جهة اليسار: ع(س)
٠,٤	١١	٠,٦	−١٤
٠,٤٩	١٢٣,٥	٠,٥١	−١٢٦,٥
٠,٤٩٩	١٢٤٨,٥	٠,٥٠١	−١٢٥١,٥
٠,٤٩٩٩	١٢٤٩٨,٥	٠,٥٠٠١	−١٢٥٠١,٥

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠,٥^-}{\text{نهـــا}}$ ع(س) $\neq$ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠,٥^+}{\text{نهـــا}}$ ع(س)، وعليه $\underset{\text{س} \leftarrow ٠,٥}{\text{نهـــا}}$ ع(س) غير موجودة.

٢) يوجد خط التقارب الرأسي عندما تكون الدالة غير معرّفة، وذلك عندما يكون مقام ع(س) صفرًا.

١ − ٢س = ٠ يعطي س = ٠,٥

∴ معادلة خط التقارب الرأسي هي: س = ٠,٥

ب) ١) الطريقة المختصرة هي استخدام النتيجة (معاملات س^١^): $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}}$ ع(س) = ٣ ÷ (−٢) = −١,٥

$$\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \text{ع(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \frac{٣\text{س} + ١}{١ - ٢\text{س}}$$

اقسم كلًا من البسط والمقام على س.

$$= \frac{٣ + \frac{١}{\text{س}}}{\frac{١}{\text{س}} - ٢}$$

$\frac{١}{\text{س}}$ تقترب من ٠ عندما س ⟵ ∞

$$= -\frac{٣}{٢} \text{ أو } -١,٥$$

٢) النهاية عند اللانهاية تعطي معادلة الخط التقاربي الأفقي: ص = $-\frac{٣}{٢}$

٥) أ) يدل خط التقارب الرأسي عند س = $\frac{\pi}{٢}$ على أن: د(س) غير معرّفة عند س = $\frac{\pi}{٢}$

ب) دورة دالة الظل هي π، لذا توجد خطوط التقارب عند س = $\frac{\pi}{٢} - \pi = -\frac{\pi}{٢}$، عند س = $\frac{\pi}{٢} + \pi = \frac{٣\pi}{٢}$

معادلاتهما هي س = $-\frac{\pi}{٢}$، س = $\frac{٣\pi}{٢}$

ج) ١) غير صحيحة، لأن د(س) غير معرّفة عند س = $\frac{\pi}{٢}$

٢) غير صحيحة، لأن د(س) معرّفة عند جميع قيم الفترة −١ء ⩽ س ⩽ ١ء

٣) صحيحة؛ نحصل على ع(س) بإجراء تمدد على د(س) معامله ٢، ومواز لمحور السينات.

الدالة د(س) = ظاس لها ٨ خطوط تقارب رأسية (٨ نقاط عدم اتصال عند $\left(\pm\frac{٧}{٢}\pi، \pm\frac{٥}{٢}\pi، \pm\frac{٣}{٢}\pi، \pm\frac{١}{٢}\pi\right)$

بينما ع(س) = ظا $\frac{\text{س}}{٢}$ لها فقط ٤ خطوط تقارب رأسية (٤ نقاط عدم اتصال) عند ($\pm٣\pi$ و $\pm\pi$)

٦) أ ١) أنشئ جدولًا من قيم س الموجبة المتزايدة مثل:

س	ص = د(س)
٠	٥
٣	٤,٠١٨٣
٦	٤,٠٠٢٥
٩	٤,٠٠٠١
١٢	٤,٠٠٠٠

معادلة خط التقارب الأفقي هي: ص = ٤

٢) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}}$ ك د(س)

= ك × $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}}$ د(س) = ٤ك

٤ك = ١ يعطي ك = $\frac{١}{٤}$

ب أي أن $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}}$ ع(س) غير موجودة (عندما تزداد س فإن ع(س) تزداد دون حدّ أقصى).

ج ع(١) = لطـ(١ − ١) = لطـ(٠)، وهي غير موجودة (اللوغاريتمات غير معرّفة عند ٠).

د ١) باستخدام التمثيل البياني للدالة

د(س) × ع(س) = (٤ + هـ$^{-\text{س}}$) × لطـ(س − ١)

على الفترة المغلقة ٢ ≤ س ≤ ٤، يمكن أن

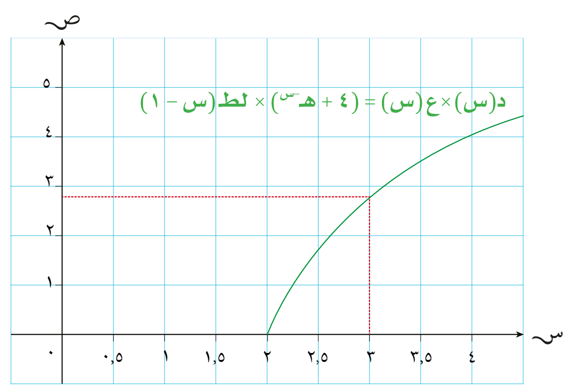
نلاحظ أن $\underset{\text{س} \to ٣^{-}}{\text{نهــا}}$ (د(س)) × ع(س))

= $\underset{\text{س} \to ٣^{+}}{\text{نهــا}}$ (د(س) × ع(س)) ≈ ٢,٨٠٧

∴ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}}$ (د(س) × ع(س)) = ٢,٨٠٧

يمكن إيجاد النهاية من خلال:

د(٣) × ع(٣) = (٤ + هـ$^{-٣}$) × لطـ(٣ − ١) = ٢,٨٠٧



طريقة بديلة:

من جهة اليمين	
س	د(س)
٣,١	٤,٠٤٥٠
٣,٠١	٤,٠٤٩٣
٣,٠٠١	٤,٠٤٩٧
٣,٠٠٠١	٤,٠٤٩٨

من جهة اليسار	
س	د(س)
٢,٩	٤,٠٥٥٠
٢,٩٩	٤,٠٥٠٣
٢,٩٩٩	٤,٠٤٩٩
٢,٩٩٩٩	٤,٠٤٩٨

من جهة اليمين	
س	ع(س)
٣,١	٠,٧٤١٩
٣,٠١	٠,٦٩٨١
٣,٠٠١	٠,٦٩٣٦
٣,٠٠٠١	٠,٦٩٣٢
٣,٠٠٠٠١	٠,٦٩٣٢
٣,٠٠٠٠٠١	٠,٦٩٣١

من جهة اليسار	
س	ع(س)
٢,٩	٠,٦٤١٩
٢,٩٩	٠,٦٨٨١
٢,٩٩٩	٠,٦٩٢٦
٢,٩٩٩٩	٠,٦٩٣١
٢,٩٩٩٩٩	٠,٦٩٣١
٢,٩٩٩٩٩٩	٠,٦٩٣١

يتضح من الجداول أعلاه أن:

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}}$ د(س) = ٤,٠٤٩٨،

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}}$ ع(س) = ٠,٦٩٣١

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}}$ (د(س) × ع(س))

= $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}}$ د(س) × $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}}$ ع(س)

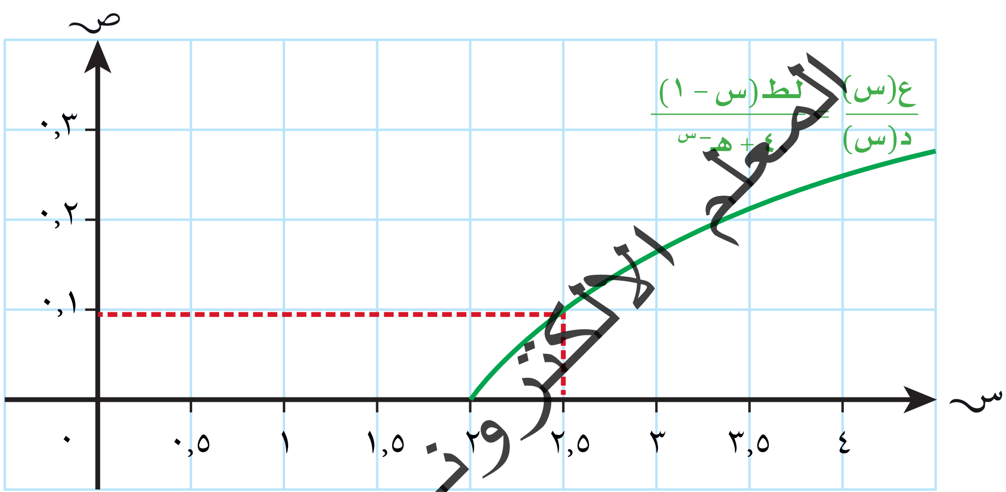
= ٤,٠٤٩٨ × ٠,٦٩٣١ = ٢,٨٠٧

٢) باستخدام التمثيل البياني للدالة: $\frac{\text{ع(س)}}{\text{د(س)}} = \frac{\text{لط(س} - ١)}{(٤ + \text{هـ}^{-\text{س}})}$ على الفترة المغلقة ٢ ⩽ س ⩽ ٤، يمكن أن

نلاحظ أن $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{٥}{٢}^-} \frac{\text{ع(س)}}{\text{د(س)}} = \lim\limits_{\text{س} \to \frac{٥}{٢}^+} \frac{\text{ع(س)}}{\text{د(س)}} \approx ٠٫٠٩٩$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to \frac{٥}{٢}} \frac{\text{ع(س)}}{\text{د(س)}} = ٠٫٠٩٩$

يمكن إيجاد النهاية من خلال = $\frac{\text{ع}\left(\frac{٥}{٢}\right)}{\text{د}\left(\frac{٥}{٢}\right)} = \frac{\text{لط}\left(\frac{٥}{٢} - ١\right)}{\left(٤ + \text{هـ}^{-\frac{٥}{٢}}\right)} = ٠٫٠٩٩$



٢) طريقة بديلة:

من جهة اليمين	
س	د(س)
٢٫٥١	٤٫٠٨١٣
٢٫٥٠١	٤٫٠٨٢٠
٢٫٥٠٠١	٤٫٠٨٢١
٢٫٥٠٠٠١	٤٫٠٨٢١

من جهة اليسار	
س	د(س)
٢٫٤٩	٤٫٠٨٢٩
٢٫٤٩٩	٤٫٠٨٢٢
٢٫٤٩٩٩	٤٫٠٨٢١
٢٫٤٩٩٩٩	٤٫٠٨٢١

من جهة اليمين	
س	ع(س)
٢٫٥١	٠٫٤١٢١
٢٫٥٠١	٠٫٤٠٦١
٢٫٥٠٠١	٠٫٤٠٥٥
٢٫٥٠٠٠١	٠٫٤٠٥٥

من جهة اليسار	
س	ع(س)
٢٫٤٩	٠٫٣٩٨٨
٢٫٤٩٩	٠٫٤٠٤٨
٢٫٤٩٩٩	٠٫٤٠٥٤
٢٫٤٩٩٩٩	٠٫٤٠٥٥

من خلال الجداول أعلاه يتضح أن:

$\lim\limits_{\text{س} \to \frac{٥}{٢}} \text{د(س)} = ٤٫٠٨٢١$، $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{٥}{٢}} \text{ع(س)} = ٠٫٤٠٥٥$

$\lim\limits_{\text{س} \to \frac{٥}{٢}} \frac{\text{ع(س)}}{\text{د(س)}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to \frac{٥}{٢}} \text{ع(س)} \div \lim\limits_{\text{س} \to \frac{٥}{٢}} \text{د(س)}$

$= ٠٫٤٠٥٥ \div ٤٫٠٨٢١ = ٠٫٠٩٩٩$

هـ بالعودة إلى المنحنى، نجد أن $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ع(س)} = ٠$ والقسمة على صفر كمية غير معرّفة، وبالتالي

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{ع(س)}}{\text{د(س)}}$ غير موجودة.