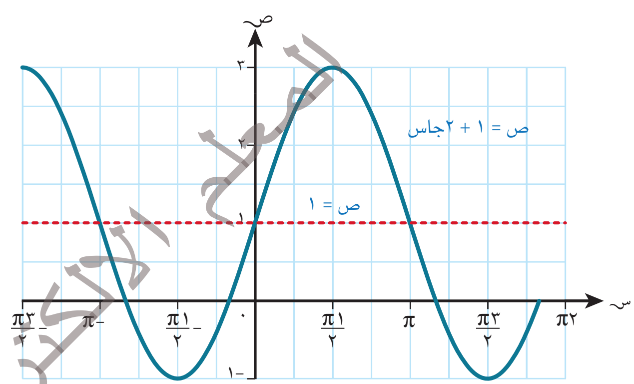
## تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية

**١)** تمّ تحويل التمثيل البياني للدالة ص = جاس الذي دورته ٢ π ، وسعته ١ إلى التمثيل البياني للدالة ص = أ + ب جاس بالتحويلات الهندسية الآتية:

- تمدد رأسي معامله ب أُتبع بـ
- انسحاب بالمتجه $\binom{\cdot}{أ}$

انظر إلى الشكل:




إن رسم مستقيم أفقي من منتصف المسافة بين نقطة القيمة العظمى ونقطة القيمة الصغرى يساعد على حل التمرين أي عندما ص = ١.

السعة هي ٢ وعليه يكون معامل التمدد الرأسي ٢، أي أن ب = ٢

سُحب التمثيل البياني ١ وحدة إلى الأعلى، فيكون أ = ١

**٢)** جا$^{-١}$(س − ١) = ظا$^{-١}$ (٣)

ظا$^{-١}$ (٣) = ١,٢٤٩

جا$^{-١}$(س − ١) = ١,٢٤٩

جا ١,٢٤٩ = س − ١

س − ١ = ٠,٩٤٨٦

س = ١,٩٤٨٦

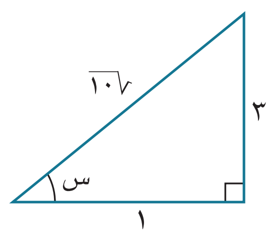
الحل: ١,٩٥ ء

**طريقة بديلة:**

استخدم ظا س = ٣ (بافتراض أن الطرف الأيسر: ظا$^{-١}$ (٣ ء) = س ثم بأخذ ظا للطرفين)، ومن ثم ارسم مثلثًا قائم الزاوية واحسب طول الوتر باستخدام نظرية فيثاغورث:

طول الوتر = $\sqrt{٣^٢ + ١^٢}$

= $\sqrt{١٠}$




افترض أن ظا$^{-١}$ س = ص وبما أن

جا$^{-١}$(س − ١) = ظا$^{-١}$ (٣)

∴ جا$^{-١}$(س − ١) = ص

بأخذ جا للطرفين يكون:

جاص = س − ١

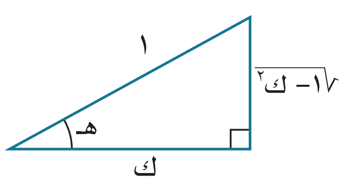
من الشكل، جاص = $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$

ويكون $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ = س − ١

س = ١ + $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$

ويكون الحل الآخر هو س = ١ + $\left(\frac{٣}{\sqrt{١٠}}\right)$ء

**٣)** ارسم مثلثًا قائم الزاوية فيه زاوية هـ، واحسب طول الضلع الثالث باستخدام نظرية فيثاغورث.



(الضلع الثالث)$^{٢}$ = ١$^{٢}$ − ك$^{٢}$

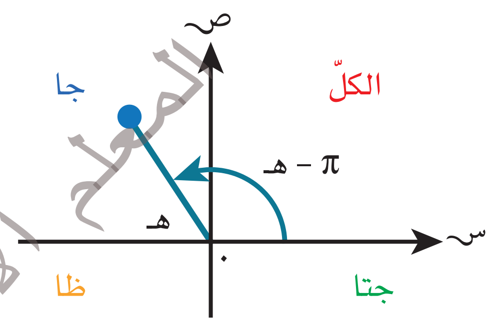
الضلع الثالث = $\sqrt{\text{١ − ك}^{٢}}$

أ جاهـ = $\dfrac{\sqrt{\text{١ − ك}^{٢}}}{\text{١}}$ = $\sqrt{\text{١ − ك}^{٢}}$

ب ظاهـ = $\dfrac{\sqrt{\text{١ − ك}^{٢}}}{\text{ك}}$

ج π − هـ تقع في الربع الثاني،

فيكون جتا(π − هـ) سالبًا




جتاهـ(π − هـ) = −جتاهـ = −ك

**٤)** إذا علمت أن جتا$^{-١}$(٨س$^{٤}$ + ١٤س$^{٢}$ − ١٦) = π

جتاπ = ٨س$^{٤}$ + ١٤س$^{٢}$ − ١٦

−١ = ٨س$^{٤}$ + ١٤س$^{٢}$ − ١٦

٨س$^{٤}$ + ١٤س − ١٥ = ٠

نفرض أن س$^{٢}$ = ص

٨ص$^{٢}$ + ١٤ص − ١٥ = ٠

استخدم الصيغة التربيعية لحل المعادلة

٨ص$^{٢}$ + ١٤ص − ١٥ = ٠ فيكون: أ = ٨، ب = ١٤، جـ = −١٥

ص = $\dfrac{\text{−١٤} \pm \sqrt{\text{١٤}^{٢} \text{ − ٤(٨)(−١٥)}}}{\text{٢(٨)}}$

ص = $\dfrac{\text{−١٤} \pm \sqrt{\text{٦٧٦}}}{\text{١٦}}$

ص = $\dfrac{\text{−١٤ + ٢٦}}{\text{١٦}}$ أو ص = $\dfrac{\text{−١٤ − ٢٦}}{\text{١٦}}$

ص = $\dfrac{\text{٣}}{\text{٤}}$ أو ص = −$\dfrac{\text{٥}}{\text{٢}}$

وحيث ص = س$^{٢}$

**إما:**

س$^{٢}$ = $\dfrac{\text{٣}}{\text{٤}}$

∴ س = ± $\sqrt{\dfrac{\text{٣}}{\text{٤}}}$ = ± $\dfrac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$

أو: س$^{٢}$ = −$\dfrac{\text{٥}}{\text{٢}}$ لا توجد حلول حقيقية.

الحلول هي س = ± $\dfrac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$

**٥)** جا ٢ س = ٥جتا ٢ س حيث ٠° ⩽ س ⩽ ١٨٠°

بالقسمة على جتا ٢س لأنه في الفترة المعطاة لا يمكن أن تكون جتا ٢س مساوية للصفر.

$\dfrac{\text{جا ٢ س}}{\text{جتا٢ س}}$ = ٥

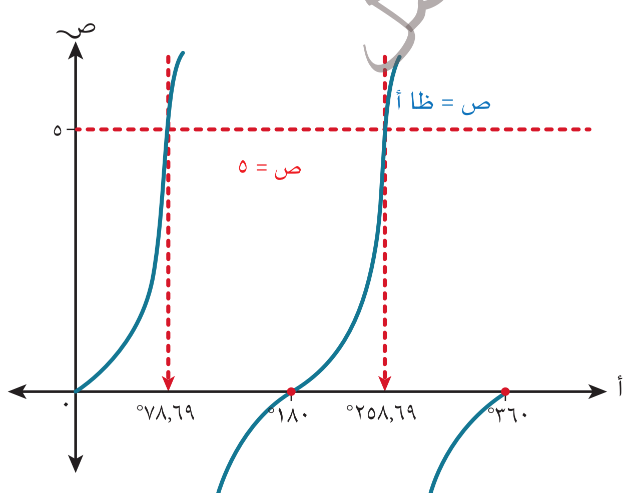
استخدم ظا س = $\dfrac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ لتحصل على:

ظا ٢ س = ٥

افترض أن أ = ٢س فيكون ظا أ = ٥

أ = ٧٨,٦٩٠°

استخدم تماثل المنحنى:




أ = ١٨٠° + ٧٨,٦٩°

أ = ٢٥٨,٦٩°

وعليه إذا كان ٢س = ٧٨,٦٩° فإن س = ٣٩,٣٤°

وإذا كان ٢س = ٢٥٨,٦٩° فإن س = ١٢٩,٣٤°

الحلول هي: ٣٩,٣° أو ١٢٩,٣°

**٦)** $\frac{\text{١٣ جتاهـ}}{\text{٢ + جتاهـ}}$ + جتاهـ = ٢ في الفترة ٠° ⩽ س ⩽ ١٨٠°

اضرب طرَفَي المعادلة في ٢ + جتاهـ لتحصل على:

١٣ جا$^{٢}$هـ + جتاهـ (٢ + جتاهـ) = ٢ (٢ + جتاهـ)

بسّط المعادلة:

١٣ جا$^{٢}$هـ + ٢جتاهـ + جتا$^{٢}$هـ = ٤ + ٢جتاهـ

١٣ جا$^{٢}$هـ + جتا$^{٢}$هـ − ٤ = ٠

استخدم المتطابقة

جا$^{٢}$هـ + جتا$^{٢}$هـ = ١ ومنها جا$^{٢}$هـ = ١ − جتا$^{٢}$هـ

عوّض بدل جا$^{٢}$هـ لتحصل على:

١٣ (١ − جتا$^{٢}$هـ) + جتا$^{٢}$هـ − ٤ = ٠

١٣ − ١٣ جتا$^{٢}$هـ + جتا$^{٢}$هـ − ٤ = ٠

١٢ جتا$^{٢}$هـ = ٩

جتا$^{٢}$هـ = $\frac{٩}{١٢}$

جتاهـ = ± $\sqrt{\frac{٩}{١٢}}$ = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

إذا كان جتاهـ = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن هـ = ٣٠°

إذا كان جتاهـ = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن هـ = ١٥٠°

الحلّان هما: ٣٠°، ١٥٠°

**٧)** ٢ جتا$^{٢}$س = ٥ جاس − ١ حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

استخدم المتطابقة جا$^{٢}$س + جتا$^{٢}$س = ١ ومنها

جتا$^{٢}$س = ١ − جا$^{٢}$س

اضرب في ٢ لتحصل على:

٢ جتا$^{٢}$س = ٢ − ٢جا$^{٢}$س

عوّض بدل ٢جتا$^{٢}$س لتحصل على:

٢ − ٢جا$^{٢}$س = ٥جاس − ١

أعد ترتيب المعادلة لتحصل على:

٢جا$^{٢}$س + ٥جاس − ٣ = ٠

(٢جاس − ١)(جاس + ٣) = ٠

**إما:**

٢جاس − ١ = ٠

٢جاس = ١

جاس = $\frac{١}{٢}$، موجبة، ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

∴ الزاوية تقع في الربع الأول أو الثاني.

وعليه س = ٣٠° (في الربع الأوّل)

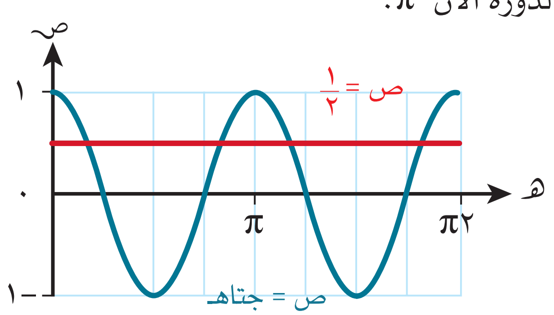
فيكون س = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠° (في الربع الثاني)

**أو:**

جاس = −٣ (لا يوجد حلّ لأن −١ ⩽ جاس ⩽ ١)

الحلول هي: ٣٠° أو ١٥٠° (في الربع الثاني)

**٨)** أ ص = جتاهـ، دورة الدالة ٢π، تحوّلت إلى الدالة ص = جتا$^{٢}$هـ بتمدد أفقي معاملة $\frac{١}{٢}$، أصبحت الدورة الآن π.




ب التمثيل البياني للدالة ص = جتا٢هـ، و المستقيم ص = $\frac{١}{٢}$ يتقاطعان في ٤ نقاط في الفترة

٠ ⩽ هـ ⩽ ٢π. (إحداثيات هذه النقاط تحقق المعادلة جتا٢هـ = $\frac{١}{٢}$) لتحصل على صيغة المعادلة في التمرين اضرب طرفَي المعادلة في ٢ لتحصل على: ٢جتا ٢هـ − ١ = ٠

توجد ٤ جذور للمعادلة (نقاط تقاطع المنحنى مع ص = $\frac{١}{٢}$).

ج) طول الفترة ١٠π ⩽ هـ ⩽ ٢٠π وطول الدورة الواحدة ٢π، ∴ عدد الدورات في الفترة المحددة = $\frac{١٠π}{٢π}$ = ٥ دورات

عدد الجذور = عدد الجذور الدورة الواحدة × عدد الدورات

= ٥ × ٤

= ٢٠ جذرًا

**٩)** أ) ٢ظا²هـ × جا²هـ = ١

استخدم ظاهـ = $\frac{جاهـ}{جتاهـ}$ وعوّض لتحصل على:

٢ $\frac{جا^٢هـ}{جتا^٢هـ}$ × جا²هـ = ١

بسّط المعادلة لتجد أن:

$\frac{٢جا^٤هـ}{جتا^٢هـ}$ = ١

٢جا⁴هـ = جتا²هـ

استخدم المتطابقة جا²هـ + جتا²هـ = ١

ومنها جتا²هـ = ١ − جا²هـ

عوّض بدل جتا²هـ لتحصل على:

٢ جا⁴هـ = ١ − جا²هـ

٢ جا⁴هـ + جا²هـ − ١ = ٠

ب) ٢جا⁴هـ + جا²هـ − ١ = ٠ في الفترة ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°

افترض أن ص = جا²هـ فتصبح المعادلة:

٢ص² + ص − ١ = ٠

حلّل إلى العوامل لتحصل على:

(٢ص − ١) (ص + ١) = ٠

**إما:** ٢ص − ١ = ٠

ص = $\frac{١}{٢}$

**أو:** ص = −١

عندما ص = $\frac{١}{٢}$ فإن جا²هـ = $\frac{١}{٢}$

جاهـ = ± $\sqrt{\frac{١}{٢}}$ = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

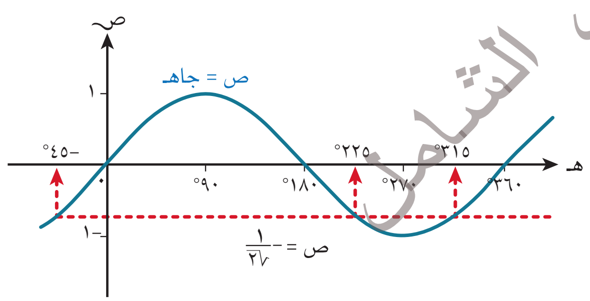
إذا كان جاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ فإن هـ = ٤٥°

وحيث إن جيب الزاوية موجب في الربعَين الأول والثاني فإن الحل الآخر هو:

هـ = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

إذا كان جاهـ = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ فإن هـ = −٤٥°

استخدم تماثل المنحنى لتجد أن:




الحلّ الأول في الفترة ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠° هو

هـ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

والحلّ الثاني هو هـ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥°

الحلول هي: ٤٥°، ١٣٥°، ٢٢٥°، ٣١٥°

**١٠)** أ) ٤ جا²س + ٨ جتاس − ٧ = ٠

في الفترة ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

استخدم المتطابقة جا$^{٢}$س + جتا$^{٢}$س = ١ ومنها

تجد أن جا$^{٢}$س = ١ − جتا$^{٢}$س ومنها اضرب

طرفي المعادلة في ٤ لتحصل على:

٤جا$^{٢}$س = ٤ − ٤جتا$^{٢}$س

ثم عوّض بدل ٤جا$^{٢}$س لتحصل على:

٤ − ٤جتا$^{٢}$س + ٨ جتاس − ٧ = ٠

٤جتا$^{٢}$س − ٨ جتاس + ٣ = ٠

حلِّ إلى العوامل:

(٢جتاس − ١)(٢جتاس − ٣) = ٠

**إما**: ٢جتاس −١ = ٠

جتاس = $\frac{١}{٢}$

س = ٦٠°

جيب تمام الزاوية موجب في الربعَين الأول والرابع.

في الربع الأول: س = ٦٠°

في الربع الرابع

س = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

**أو**: ٢جتاس − ٣ = ٠

جتاس = ١,٥ لا يوجد حل (١ ≥ جتاس ≥ −١)

الحلول هي: ٦٠° أو ٣٠٠°

**ب** ٤ جا$^{٢}$س $\left(\frac{١}{٢}\right.$ هـ$\left.\right)$ + ٨ جتا $\left(\frac{١}{٢}\right.$ هـ$\left.\right)$ − ٧ = ٠

قارن هذه المعادلة مع

٤ جا$^{٢}$س + ٨ جتاس − ٧ = ٠ فهي تكافئ:

٤ جا$^{٢}$$\left(\frac{١}{٢}\right.$ هـ$\left.\right)$ − ٨ جتا $\left(\frac{١}{٢}\right.$ هـ$\left.\right)$ + ٣ = ٠

∴ س = $\left(\frac{١}{٢}\right.$ هـ$\left.\right)$

حلِّ المعادلة إلى العوامل لتحصل على:

(٢ جتا $\left(\frac{١}{٢}\right.$ هـ$\left.\right)$ − ١)(٢جتا $\left(\frac{١}{٢}\right.$ هـ$\left.\right)$ − ٣) = ٠

**إما**: ٢ جتا $\left(\frac{١}{٢}\right.$ هـ$\left.\right)$ − ١ = ٠

جتا $\left(\frac{١}{٢}\right.$ هـ$\left.\right)$ = $\frac{١}{٢}$ (جتا موجبة في الربعين الأول والرابع)

إذا كانت $\frac{١}{٢}$ هـ في الربع الأول،

∴ $\frac{١}{٢}$ هـ = ٦٠°

∴ هـ = ١٢٠°

وإذا كانت $\frac{١}{٢}$ هـ في الربع الرابع،

∴ $\frac{١}{٢}$ هـ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ هـ = ٦٠٠° وهي خارج المجال.

**أو**: ٢ جتا $\left(\frac{١}{٢}\right.$ هـ$\left.\right)$ − ٣ = ٠

جتا $\left(\frac{١}{٢}\right.$ هـ$\left.\right)$ = ١,٥ لا يوجد حل.

١٢٣

**(١١)** أ خذ الطرف الأيمن:

استخدم ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ لتحصل على:

$$= \frac{\text{جاس} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}{\text{١ − جتاس}}$$

$$= \frac{\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتاس}}}{\text{١ − جتاس}}$$

استخدم المتطابقة جا$^{٢}$س + جتا$^{٢}$س = ١

ومنها جا$^{٢}$س = ١ − جتا$^{٢}$س

عوّض بدل جا$^{٢}$س في البسط لتحصل على:

$$= \frac{\text{١ − جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جتاس (١ − جتاس)}}$$

حلِّل البسط كفرق بين مربعَين:

$$= \frac{(١ + \text{جتاس})(١ - \text{جتاس})}{\text{جتا س}(١ - \text{جتاس})}$$

اقسم البسط والمقام على (١ − جتاس) لتحصل على:

$$= \frac{١ + \text{جتا س}}{\text{جتا س}}$$

اكتب الكسر في صورة كسرَين عاديَّين:

$$= \frac{١}{\text{جتا س}} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}}$$

$$= \frac{١}{\text{جتا س}} + ١ = ١ + \frac{١}{\text{جتا س}} =$$ الطرف الأيسر،

وهو المطلوب إثباته

**ب** $\frac{\text{جا س} \times \text{ظاس}}{١ - \text{جتاس}} + ٢ = ٠$ في الفترة $٠^\circ \leqslant$ هـ $\leqslant ٣٦٠^\circ$

باستخدام النتيجة من الجزئية (أ)

$$١ + \frac{١}{\text{جتا س}} + ٢ = ٠$$

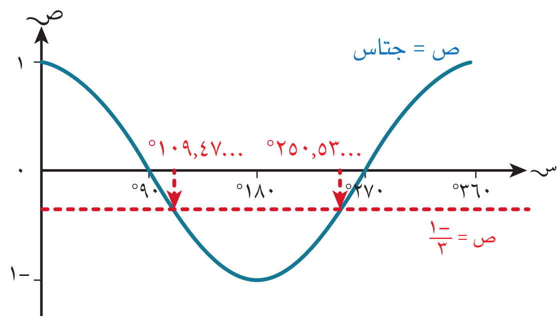
$$\frac{١}{\text{جتا س}} = -٣$$

$$-٣\text{جتا س} = ١$$

$$\text{جتا س} = -\frac{١}{٣}$$

$$\text{س} = ١٠٩{,}٤٧^\circ$$

استخدم التماثل للتمثيل البياني لتجد:




يمكن الحصول على الحل الثاني جبريًا كالآتي:

جتاس سالبة في الربعَين الثاني والثالث

س = $١٠٩{,}٤٧^\circ$ ستقع في الربع الثاني

لإيجاد الزاوية في الربع الرابع تكون:

$$٣٦٠^\circ - ١٠٩{,}٤٧^\circ = ٢٥٠{,}٥٣^\circ$$

الحلول هي: س = $١٠٩{,}٤٧^\circ$ أو س = $٢٥٠{,}٥٣^\circ$

**١٢)** **أ** $\frac{٢ - \text{جا س}}{١ + ٢\text{جا س}} = \frac{٣}{٤}$ في الفترة $٠^\circ \leqslant$ س $\leqslant ٢\pi$

$$٤(٢ - \text{جا س}) = ٣(١ + ٢\text{جا س})$$

$$٨ - ٤\text{جا س} = ٣ + ٦\text{جا س}$$

$$١٠\text{جا س} = ٥$$

$$\text{جا س} = ٠{,}٥$$

$$\text{س} = \frac{\pi}{٦}،\ \text{س} = \pi - \frac{\pi}{٦} = \frac{٥\pi}{٦}$$

جيب الزاوية موجب في الربعَين الأول والثاني

الحلول هي: $\frac{\pi}{٦}$، $\frac{٥\pi}{٦}$

**ب** $\text{جا س} - ٢\text{جتا س} = ٢(٢\text{جا س} - ٣\text{جتا س})$

$$\text{جا س} - ٢\text{جتا س} = ٤\text{جا س} - ٦\text{جتا س}$$

$$٣\text{جا س} = ٤\text{جتا س}$$

اقسم الطرفَين على جتا س لتحصل على:

$$\frac{٣\text{جا س}}{\text{جتا س}} = ٤$$

استخدم ظاس = $\frac{جاس}{جتاس}$

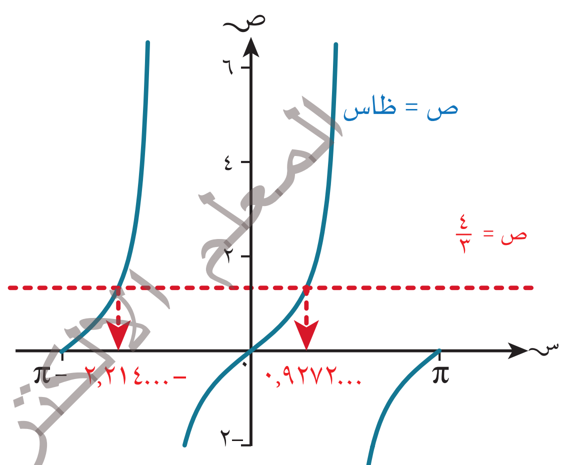
٣ ظاس = ٤

ظاس = $\frac{٤}{٣}$

س = ٠,٩٢٧ء

استخدم تماثل المنحنى في مجاله

−π° ⩽ س ⩽ π:




يمكن الحصول على الحل الثاني جبريًا كالآتي:

في الربع الثالث في الفترة −π ⩽ س ⩽ π

تكون س = −π + ٠,٩٢٧٣

= −٢,٢١٤ء

الحلول هي: −٢,٢١ء، ٠,٩٢٧ء (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

**١٣)** أ عُرّفت الدالة د: س ← ٣ − ٢ ظاس $\left(\frac{١}{٢}س\right)$ في الفترة ٠° ⩽ س ⩽ ٢π

تحوّل التمثيل البياني د(س) = ظاس، دورة الدالة π إلى التمثيل البياني

د(س) = ٣ − ٢ ظاس $\left(\frac{١}{٢}س\right)$، بالتحويلات الهندسية الآتية:

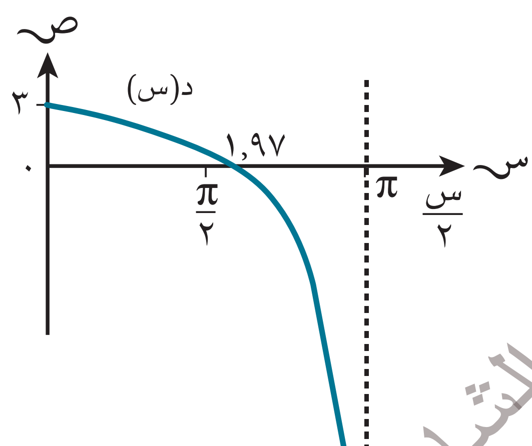
- تمدد أفقي معامله ٢ (ضُربت كل الإحداثيات السينية في ٢ ): أصبحت الدورة الآن ٢π، والمدى د(س) ⩽ ٠
- تمدد رأسي معامله ٢ (ضُربت كل الإحداثيات الصادية في − ١)، المدى د(س) ⩽ ٠
- انعكاس في المحور الصادي (كل الإحداثيات السينية ضربت في −١)
- المدى الآن د(س) ⩾ ٠
- انسحاب بالمتجه $\binom{٠}{٣}$ (زادت الإحداثيات الصادية بمقدار ٣) أصبح المدى د(س) ⩾ ٣

ب د$\left(\frac{٢}{٣}\pi\right)$ = ٣ − ٢ظا$\left(\frac{١}{٢} \times \frac{٢\pi}{٣}\right)$

= ٣ − ٢ظا$\left(\frac{\pi}{٣}\right)$

= ٣ − ٢$\sqrt{٣}$

ج




د د(س) = ٣ − ٢ظا$\left(\frac{١}{٢}س\right)$

ص = ٣ − ٢ظا$\left(\frac{١}{٢}س\right)$

س = ٣ − ٢ظا$\left(\frac{١}{٢}ص\right)$

٢ ظا$\left(\frac{١}{٢}ص\right)$ = ٣ − س

ظا$\left(\frac{١}{٢}ص\right)$ = $\frac{٣ - س}{٢}$

ظا$^{-١}\left(\frac{٣ - س}{٢}\right)$ = $\frac{١}{٢}$ص

ص = ٢ ظا$^{-١}\left(\frac{٣ - س}{٢}\right)$

د$^{-١}$(س) = ٢ ظا$^{-١}\left(\frac{٣ - س}{٢}\right)$

**١٤)** أ ٢ جتا٢ هـ = ٣ جا٢ هـ حيث ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°

استخدم المتطابقة جا٢ هـ + جتا٢ هـ = ١ ومنها يكون جتا٢ هـ = ١ − جا٢ هـ

عوّض بدل جتا٢ هـ لتحصل على:

٢ (١ − جا٢ هـ) = ٣ جا هـ

٢ − ٢ جا٢ هـ = ٣ جا هـ

٢ جا٢ هـ + ٣ جا هـ − ٢ = ٠

حلِّل إلى العوامل:

(٢ جا هـ − ١) (جا هـ + ٢) = ٠

**إما:** ٢ جا هـ − ١ = ٠

جا هـ = ٠,٥

في الربع الأول تكون هـ = ٣٠° وفي الربع الثاني تكون، هـ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠° (جيب الزاوية موجب في الربعَين الأول والثاني)

**أو:** جا هـ + ٢ = ٠

جا هـ = −٢ لا يوجد حل حيث −١ ⩽ جا هـ ⩽ ١

الحلول هي: ٣٠°، ١٥٠°

ب انظر الشكل:

عند حل المعادلة ٢ جتا٢ هـ = ٣ جا هـ، أصغر حلّ هو هـ = ٣٠°

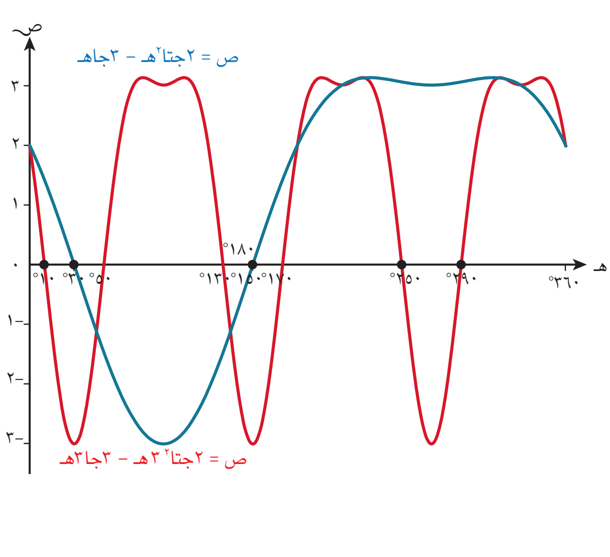
أي أن: ٢ جتا٢ ٣٠° = ٣ جا ٣٠°

قارن الناتج مع ٢ جتا٢(ن هـ) = ٣ جا (ن هـ)

فيكون: ن هـ = ٣٠°

ن × ١٠ = ٣٠°

ن = ٣°



يبيّن التمثيل البياني لـ ص = ٢ جتا$^{٢}$هـ − ٣ جا هـ

حلول المعادلة في الفترة ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°

عندما ن = ٣ فإن التمثيل البياني

لـ ص = ٢ جتا$^{٢}$(٣هـ) − ٣ جا (٣هـ) نتج من إجراء تمدد أفقي للدالة الأصلية (معامله $\frac{١}{٣}$)

دورة هذا التمثيل البياني هي $\frac{٢\pi}{٣}$ = ١٢٠°

الحل الأول هو ١٠° (ممّا سبق).

الحل الثاني هو هـ × ٣ = ١٥٠° (هـ = ٥٠°)

دورة جا س هي $\frac{٢\pi}{٣}$ = ١٢٠°

لإيجاد أكبر حل للمعادلة نجد بقية الحلول بإضافة ١٢٠° إلى كل حلّ من الحلَّين الأولَين.

أي أن الحلّ الثالث ١٠° + ١٢٠° = ١٣٠°

الحلّ الرابع ٥٠° + ١٢٠° = ١٧٠°

الحلّ الخامس ١٣٠° + ١٢٠° = ٢٥٠°

الحلّ السادس ١٧٠° + ١٢٠° = ٢٩٠°

الحلّ السابع ٢٥٠° + ١٢٠° = ٣٧٠° ليس حلًا لأنه خارج المجال.

الحلّ هو ٢٩٠°

**١٥)** أ $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جاهـ + جتاهـ}} + \frac{\text{جتاهـ}}{\text{جاهـ − جتاهـ}} = \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{هـ − جتا}^{٢}\text{هـ}}$

اجمع الكسرَين في الطرف الأيمن لتحصل على:

$$\frac{\text{جاهـ(جاهـ − جتاهـ)}}{\text{(جاهـ + جتاهـ)(جاهـ − جتاهـ)}} + \frac{\text{جتاهـ (جاهـ + جتاهـ)}}{\text{(جاهـ + جتاهـ)(جاهـ − جتاهـ)}}$$

$$\frac{\text{جاهـ(جاهـ − جتاهـ) + جتاهـ (جاهـ + جتاهـ)}}{\text{(جاهـ − جتاهـ)(جاهـ + جتاهـ)}}$$

فكّ الأقواس لتحصل على: $\frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ − جاهـ × جتاهـ + جاهـ × جتاهـ + جتا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جا}^{٢}\text{هـ − جتا}^{٢}\text{هـ}}$

استخدم المتطابقة جا$^{٢}$س + جتا$^{٢}$س = ١

$\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{هـ − جتا}^{٢}\text{هـ}}$ وهو الطرف الأيسر

ب $\dfrac{\text{جاهـ}}{\text{جاهـ + جتاهـ}} + \dfrac{\text{جتاهـ}}{\text{جاهـ − جتاهـ}} = ٣$ في الفترة $٠° \leqslant$ هـ $\leqslant ٣٦٠°$

$\dfrac{١}{\text{جا}^{٢}\text{هـ − جتا}^{٢}\text{هـ}} = ٣$

$٣(\text{جا}^{٢}\text{هـ − جتا}^{٢}\text{هـ}) = ١$

استخدم المتطابقة جا$^{٢}$س + جتا$^{٢}$س = ١، ومنها يكون جا$^{٢}$س = ١ − جتا$^{٢}$هـ

عوّض بدل جا$^{٢}$س لتحصل على: ٣(١ − جتا$^{٢}$هـ − جتا$^{٢}$هـ) = ١

فكّ الأقواس، ثم بسّط المعادلة لتحصل على:

٣ − ٦ جتا$^{٢}$هـ = ١

٦ جتا$^{٢}$هـ = ٢

جتا$^{٢}$هـ = $\dfrac{١}{٣}$

جتاهـ = $\pm \sqrt{\dfrac{١}{٣}} = \dfrac{١}{\sqrt{٣}}$

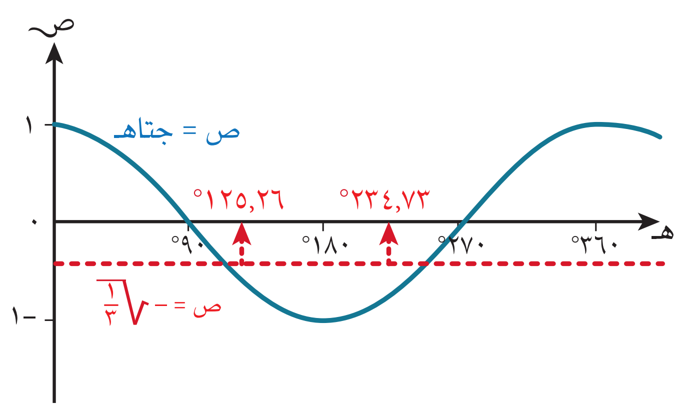
إذا كانت جتاهـ = $\sqrt{\dfrac{١}{٣}}$ فإن هـ = ٥٤,٧٣° (في الربع الأول)

وحيث إن جيب التمام موجب في الربع الأول والربع الرابع فإن الحل الثاني هو:

٣٦٠° − ٥٤,٧٣° = ٣٠٥,٣°

إذا كان جتاهـ = $-\sqrt{\dfrac{١}{٣}}$ فإن هـ = ١٢٥,٢٦°

حيث إن جيب تمام الزاوية سالب في الربع الثاني والربع الثالث، استخدم تماثل الرسم الآتي:




فيكون الحل الثاني هو ١٨٠° + ٥٤,٧° = ٢٤٣,٣°

يكون الحل الثاني جبريًا كالآتي:

١٨٠ + ٥٤,٧ = ٢٤٣,٧

الحلول هي: ٥٤,٧°، ١٢٥,٣°، ٢٣٤,٧°، ٣٠٥,٣° (لأقرب منزلة عشرية واحدة).

**١٦)** أ $\frac{\text{٤ جتاهـ}}{\text{ظاهـ}} + ١٥ = ٠$

عوّض باستخدام ظاهـ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$

$\frac{\text{٤ جتاهـ}}{\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}} + ١٥ = ٠$

بسّط لتحصل على:

$\frac{\text{٤ جتا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جاهـ}} + ١٥ = ٠$

اضرب الطرفَين في جاهـ لتحصل على:

٤ جتا$^{٢}$هـ + ١٥ جاهـ = ٠

استخدم المتطابقة جا$^{٢}$هـ + جتا$^{٢}$هـ = ١ ومنها

جتا$^{٢}$هـ = ١ − جا$^{٢}$هـ لتحصل على:

٤ جتا$^{٢}$هـ = ٤ − ٤ جا$^{٢}$هـ

عوّض بدلًا من ٤ جتا$^{٢}$هـ لتحصل على:

٤ − ٤ جا$^{٢}$هـ + ١٥ جاهـ = ٠

٤ جا$^{٢}$هـ − ١٥ جاهـ − ٤ = ٠ الطرف الأيسر

ب حلِّل الطرف الأيمن إلى العوامل

٤ جا$^{٢}$هـ − ١٥ جاهـ − ٤ = ٠

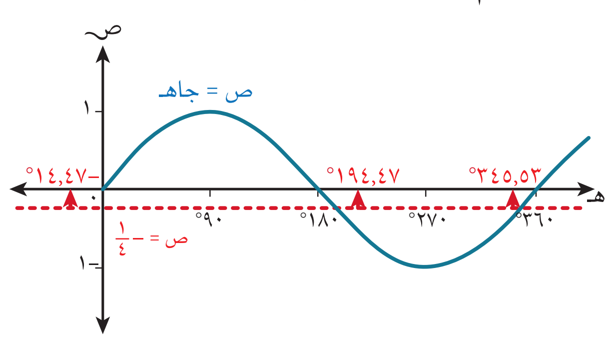
(٤جاهـ + ١) (جاهـ − ٤) = ٠

إما: ٤جاهـ + ١ = ٠

جاهـ = $-\frac{١}{٤}$

هـ = −١٤,٥° ليست حلاً لأنها خارج المجال.

استخدم تماثل المنحنى:




الحلّ الأوّل:

١٨٠° + (−١٤,٤٧) = ١٩٤,٥° باستخدام الزاوية الموجبة المكافئة للزاوية −١٤,٤٧

الحلّ الثاني:

٣٦٠° − ١٤,٤٧° = ٣٤٥,٥°

أو:

جاهـ = ٤ لا يوجد حلّ لأن −١ ⩽ جاهـ ⩽ ١

الحلّان هما: ١٩٤,٥° أو ٣٤٥,٥° (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

**١٧)** أ د(س) = ٥ + ٣ جتا $\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)$، د(س) = ٧

٥ + ٣ جتا $\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)$ = ٧

٣ جتا $\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)$ = ٢

جتا $\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)$ = $\frac{٢}{٣}$

$\frac{١}{٢}$ س = ٠,٨٤١٠ ء

وحيث إن جيب التمام موجب في الربعين الأوّل والرابع فإن:

$\frac{١}{٢}$ س = ٢π − ٠,٨٤١٠ = ٥,٤٤٢ ء

فيكون $\frac{١}{٢}$ س = ٠,٨٤١٠ ء

س = ١,٦٨٢ ء

الحل هو ١,٦٨ ء (لأقرب منزلتَين عشريتَين).

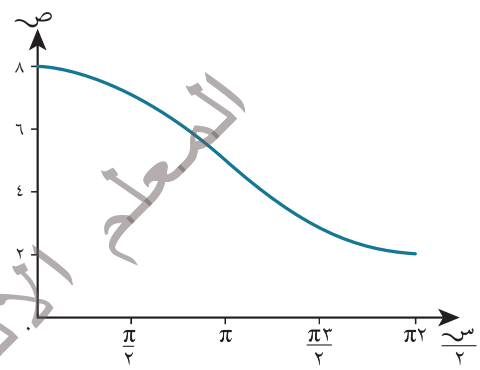
ب التمثيل البياني للدالة د(س) = جتا س (الدورة ٢π، السعة ١) قد تحوّل إلى التمثيل البياني للدالة

د(س) = ٥ + ٣ جتا $\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)$ بالتحويلات الهندسية الآتية:

- تمدّد أفقي معامله ٢ (جميع الإحداثيات السينية قد ضُربت في ٢، أصبحت الدورة ٤π)

- تمدّد رأسي معامله ٣ (جميع الإحداثيات الصادية قد ضُربت في ٣، أصبح المدى
  $-٣ \leqslant \text{د}(\text{س}) \leqslant ٣$)
- انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٥ \end{pmatrix}$. (زادت الإحداثيات السينية جميعها بمقدار ٥، ليصبح المدى
  $٢ \leqslant \text{د}(\text{س}) \leqslant ٨$)

المجال لم يتغيّر.




ج الدالة د(س) واحد إلى واحد، لذا دالتها العكسية موجودة.

د $\text{د}(\text{س}) = ٥ + ٣\,\text{جتا}\left(\frac{١}{٢}\,\text{س}\right)$

$\text{ص} = ٥ + ٣\,\text{جتا}\left(\frac{١}{٢}\,\text{س}\right)$

$\text{س} = ٥ + ٣\,\text{جتا}\left(\frac{١}{٢}\,\text{ص}\right)$

$٣\,\text{جتا}\left(\frac{١}{٢}\,\text{ص}\right) = \text{س} - ٥$

$\text{جتا}\left(\frac{١}{٢}\,\text{ص}\right) = \frac{\text{س} - ٥}{٣}$

$\frac{١}{٢}\,\text{ص} = \text{جتا}^{-١}\left(\frac{\text{س} - ٥}{٣}\right)$

$\text{ص} = ٢\,\text{جتا}^{-١}\left(\frac{\text{س} - ٥}{٣}\right)$

$\text{د}^{-١}(\text{س}) = ٢\,\text{جتا}^{-١}\left(\frac{\text{س} - ٥}{٣}\right)$