تمارين ٢-٨

١) أ) ٢ جتا^{٢} هـ − ٧ جا^{٢} هـ = ٥ جتا^{٢} هـ

اقسم الطرفَين على جتا هـ لتحصل على:

$$\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} + ١ = ٥$$

استخدم ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$

١ + ظا هـ = ٥

ظا هـ = ٤

ب) هـ = ظا$^{-١}$ ٤

هـ = ٧٥,٩٦°

الحل الثاني هو ١٨٠° + ٧٥,٩٦° = ٢٥٥,٩٦°

الحلّان هما ٧٦٠°، ٢٥٦,٠° (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

٢) أ) ٣ جا^{٢} هـ + ٥ جا هـ × جتا هـ − ٢جتا^{٢} هـ اقسم الطرفَين على جتا^{٢} هـ لتحصل على:

$$\frac{\text{٣ جا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}} + \frac{\text{٥جا هـ} \times \text{جتا هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}} = \frac{\text{٢ جتا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}$$

استخدم ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ لتحصل على: ٣ ظا^{٢} هـ + ٥ ظا هـ − ٢ = ٠

ب) استخدم ٣ ظا^{٢} هـ + ٥ ظا هـ − ٢ = ٠ وحلّلها إلى العوامل

(٣ ظا هـ − ١)(ظا هـ + ٢) = ٠

إما ٣ ظا هـ − ١ = ٠

ظا هـ = $\frac{١}{٣}$

هـ = ١٨,٤٣°

لا توجد حلول أخرى في المجال ٠° ≤ هـ ≤ ١٨٠° تحقّق من أن ظا هـ = $\frac{١}{٣}$

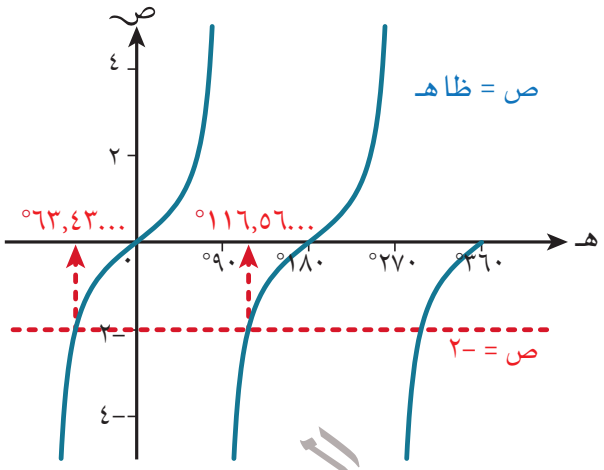
أو: ظا هـ + ٢ = ٠

ظا هـ = − ٢

هـ = −٦٣,٤٣°

المعلم الإلكتروني الشامل

استخدم التمثيل البياني لتحصل على:



الحلّ الأوّل هو ١٨٠° − ٦٣,٤٣° = ١١٦,٥٦°

الحلول هي: ١٨,٤°، ١١٦,٦° (لأقرب منزلة عشرية واحدة).

٣) أ إذا علمت أن ٨ جا^{٢}هـ + ٢جتا^{٢}هـ − جتاهـ = ٦

لا يوجد جاهـ في الصيغة الجديدة.

استخدم المتطابقة جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١ وأعد الترتيب لتحصل على: جا^{٢}هـ = ١ − جتا^{٢}هـ

عوّض بدل جا^{٢}هـ لتحصل على:

٨(١ − جتا^{٢}هـ) + ٢جتا^{٢}هـ − جتاهـ = ٦

٨ − ٨جتا^{٢}هـ + ٢جتا^{٢}هـ − جتاهـ = ٦

٨ − ٦جتا^{٢}هـ − جتاهـ = ٦

أعد الترتيب:

٦جتا^{٢}هـ + جتاهـ − ٢ = ٠

تحليل الطرف الأيمن إلى العوامل يعطي:

(٣جتاهـ + ٢)(٢جتاهـ − ١) = ٠

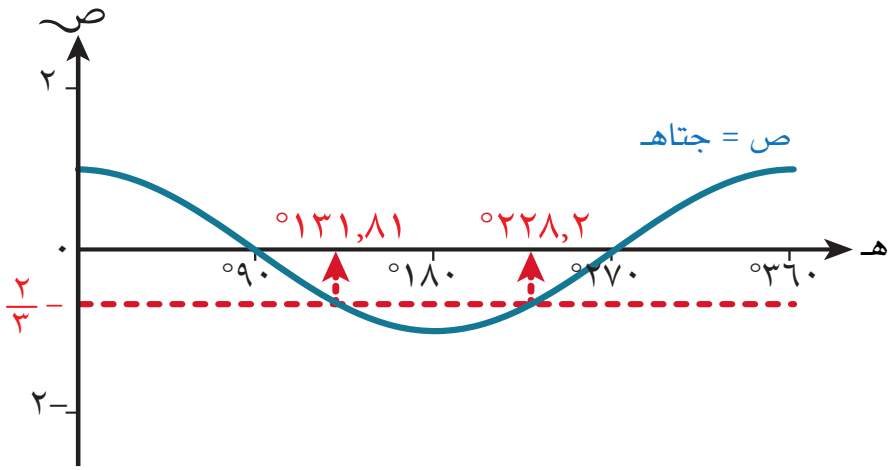
إما: ٣جتاهـ + ٢ = ٠

جتاهـ = $-\frac{٢}{٣}$

هـ = ١٣١,٨١°

المعلم الالكتروني الشامل

استخدم التمثيل البياني المقابل:



الحل الثاني: °٢٢٨,٢

أو: ٢ جتاهـ − ١ = ٠

جتاهـ = $\frac{١}{٢}$

هـ = °٦٠

الحل الآخر في الفترة °٠ ≤ هـ ≤ °٣٦٠ حيث جتاهـ = $\frac{١}{٢}$ هو:

هـ = ٣٦٠ − ٦٠ = °٣٠٠ (حيث جيب التمام موجب في الربع الرابع)

الحلول هي: °٦٠، °١٣١,٨، °٢٢٨,٢، °٣٠٠

٤) أ) ٤ جا^{٤}هـ + ١٤ = ١٩ جتا^{٢}هـ

لاحظ أنه لا توجد حدود جاهـ في الطرف الأيسر

استخدم المتطابقة جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١ وأعد الترتيب لتحصل على:

جتا^{٢}هـ = ١ − جا^{٢}هـ

عوّض بدلًا من جتا^{٢}هـ في المعادلة الأصلية لتحصل على:

٤ جا^{٤}هـ + ١٤ = ١٩ − ١٩ جا^{٢}هـ

استبدل س بـ جا^{٢}هـ لتحصل على:

٤ س^{٢} + ١٤ = ١٩ − ١٩س

٤ س^{٢} + ١٩س − ٥ = ٠

ب) حلل الطرف الأيمن إلى العوامل لتحصل على:

(٤س − ١) (س + ٥) = ٠

أما: س + ٥ = ٠

أي جا^{٢}هـ + ٥ = ٠

جا^{٢}هـ = −٥ لا يوجد حل.

أو: ٤س − ١ = ٠

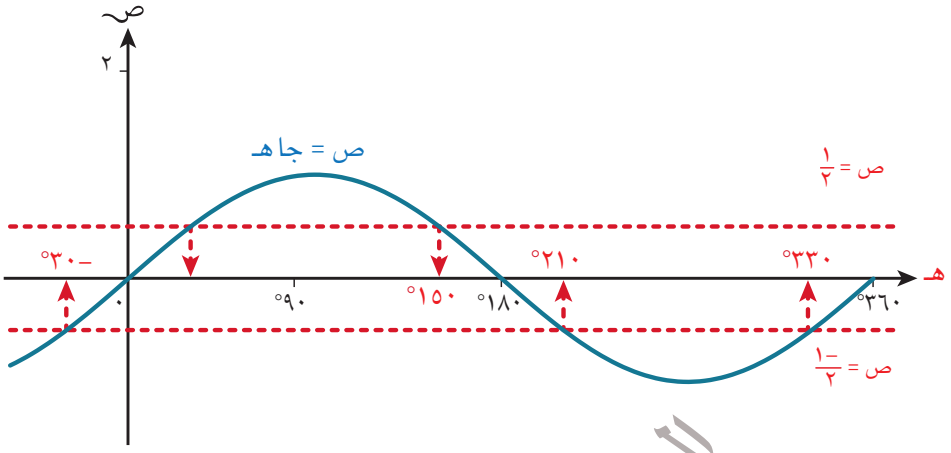
س = $\frac{١}{٤}$

وعليه يكون جا^{٢}هـ = $\frac{١}{٤}$

ومنه، جاهـ = ± $\frac{١}{٢}$

المعلم الإلكتروني الشامل

استخدم التمثيل البياني الآتي:



إذا كان جا هـ = $\frac{١}{٢}$ فإن هـ = ٣٠° أو ١٥٠°

إذا كان جا هـ = $-\frac{١}{٢}$ فإن هـ = ٢١٠° أو ٣٣٠°

الحلول هي: ٣٠°، ١٥٠°، ٢١٠° أو ٣٣٠°

تكون جا موجبة في الربعَين الأوّل والثاني
وتكون سالبة في الربعَين الثالث والرابع

٥) أ اكتب جا هـ ظا هـ = ٣

بالصورة جتا^{٢}هـ + ٣ جتاهـ − ١ = ٠

الصورة المطلوبة لا تتضمن جا هـ أو ظا هـ.

استخدم ظا هـ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$ وعوّض في المعادلة الأصلية لتحصل على:

جاهـ × $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$ = ٣

$\frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتاهـ}}$ = ٣

جا^{٢}هـ = ٣ جتاهـ

استخدم المتطابقة جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١

لتجد أن جا^{٢}هـ = ١ − جتا^{٢}هـ

عوّض بدل جا^{٢}هـ لتحصل على:

المعلم الإلكتروني الشامل

١ – جتا٢هـ – ٣ جتاهـ

بإعادة ترتيب المعادلة تحصل على:

جتا٢هـ + ٣ جتاهـ – ١ = ٠

ب المعادلة لا تحلل إلى العوامل، لذا استخدم الصيغة التربيعية مع المعادلة

أ س٢ + ب س + جـ = ٠، بافتراض أن س = جتا هـ

س٢ + ٣س – ١ = ٠

ويكون، أ = ١، ب = ٣، جـ = –١

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{(٣)^{٢} - ٤(١)(-١)}}{(١)٢}$$

$$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{١٣}}{٢}$$

س = –٣,٣٠٢٧، أو س = ٠,٣٠٢٧

ومنها جتا هـ = – ٣,٣٠٢٧ لا توجد حلول في الفترة –١ ≤ جتا هـ ≤ ١

أو جتا هـ = ٠,٣٠٢٧

ومنها هـ = ٧٢,٣٨°

وبما أن جيب التمام موجب في الربع الرابع فإن الحلّ الثاني هو ٣٦٠° – ٧٢,٣٨° = ٢٨٧,٦٢°

الحلول هي: ٧٢,٤°، ٢٨٧,٦° (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

٦) أ ٥ (٢جاهـ – جتاهـ) = ٤ (جاهـ + ٢جتاهـ)

فكّ الأقواس: ١٠ جاهـ – ٥ جتاهـ = ٤ جاهـ + ٨ جتاهـ

٦ جاهـ = ١٣ جتاهـ

اقسم الطرفَين على جتا هـ، واستخدم

ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ لتحصل على: ٦ ظا هـ = ١٣

ظا هـ = $\frac{١٣}{٦}$

ب هـ = ظا$^{-١}$ $\left(\frac{١٣}{٦}\right)$

هـ = ٦٥,٢٢°

الحلّ الثاني هو ١٨٠° + ٦٥,٢٢° (لأن الظلّ موجب في الربع الثالث).

الحلّان هما: ٦٥,٢٢°، ٢٤٥,٢° (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

٧) أ $\frac{\text{جاهـ}}{١ + \text{جتاهـ}} + \frac{١ + \text{جتاهـ}}{\text{جاهـ}} = \frac{٢}{\text{جاهـ}}$

اجمع الحدَّين في الطرف الأيمن:

$$= \frac{(\text{جاهـ})^{٢}}{\text{جاهـ}(١ + \text{جتاهـ})} + \frac{(١ + \text{جتاهـ})^{٢}}{\text{جاهـ}(١ + \text{جتاهـ})}$$

$$= \frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ} + (١ + \text{جتاهـ})^{٢}}{\text{جاهـ}(١ + \text{جتاهـ})}$$

$$= \frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ} + ١ + ٢\text{جتاهـ} + \text{جتا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جاهـ}(١ + \text{جتاهـ})}$$

استخدم المتطابقة جا٢هـ + جتا٢هـ = ١ لتبسّط البسط وتحصل على:

$$= \frac{٢ + ٢\text{جتاهـ}}{\text{جاهـ}(١ + \text{جتاهـ})}$$

$$= \frac{٢(١ + \text{جتاهـ})}{\text{جاهـ}(١ + \text{جتاهـ})}$$

$$= \frac{٢}{\text{جاهـ}}$$

المعلم الإلكتروني الشامل

ب) $\frac{٢}{\text{جاهـ}} = ١ + ٣\,\text{جاهـ}$

$٢ = \text{جاهـ} + ٣\,\text{جا}^٢\text{هـ}$

$٣\,\text{جا}^٢\text{هـ} + \text{جاهـ} - ٢ = ٠$

حلِّل إلى العوامل لتحصل على:

$(٣\,\text{جاهـ} - ٢)(\text{جاهـ} + ١) = ٠$

إما: $\text{جاهـ} + ١ = ٠$

$\text{جاهـ} = -١$

$\text{هـ} = ٢٧٠°$

أو: $٣\,\text{جاهـ} - ٢ = ٠$

$\text{جاهـ} = \frac{٢}{٣}$

$\text{هـ} = ٤١,٨١°$

وحيث إن جيب الزاوية موجب في الربعَين الأول والثاني فإن الحل الثاني هو:

$١٨٠° - ٤١,٨١° = ١٣٨,١٩°$

الحلول هي: $٤١,٨١°$، $١٣٨,١٩°$، $٢٧٠°$

٨) أ) $\frac{\text{جتاهـ}}{\text{ظاهـ}(١ + \text{جاهـ})} = \frac{١}{\text{جاهـ}} - ١$

خُذ الطرف الأيمن:

اضرب كلًا من البسط والمقام في $(١ - \text{جاهـ})$ فينتج:

$= \frac{\text{جتاهـ}(١ - \text{جاهـ})}{\text{ظاهـ}(١ + \text{جاهـ})(١ - \text{جاهـ})}$

فك المقام لتحصل على:

$= \frac{\text{جتاهـ}(١ - \text{جاهـ})}{\text{ظاهـ}(١ - \text{جا}^٢\text{هـ})}$

استخدم المتطابقة $\text{جا}^٢\text{هـ} + \text{جتا}^٢\text{هـ} = ١$ ومنها يكون

$١ - \text{جا}^٢\text{هـ} = \text{جتا}^٢\text{هـ}$

عوّض بدل $١ - \text{جا}^٢\text{هـ}$ في المقام لتحصل على:

$= \frac{\text{جتاهـ}(١ - \text{جاهـ})}{\text{ظاهـ} \times \text{جتا}^٢\text{هـ}}$

اقسم البسط والمقام على جتاهـ لتحصل على:

$= \frac{١ - \text{جاهـ}}{\text{ظاهـ} \times \text{جتاهـ}}$

استخدم $\text{ظاهـ} = \frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$ وعوّض بدل ظاهـ

فتحصل على:

$$\frac{١ - \text{جاهـ}}{\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}} \times \text{جتاهـ}}$$

$= \frac{١ - \text{جاهـ}}{\text{جاهـ}}$

$= \frac{١}{\text{جاهـ}} - ١$

$= \frac{١}{\text{جاهـ}} - ١$

ب) $\frac{١}{\text{جاهـ}} - ١ = ١$

$\frac{١}{\text{جاهـ}} = ٢$

$٢\,\text{جاهـ} = ١$

$\text{جاهـ} = \frac{١}{٢}$

جيب الزاوية موجب في الربعَين الأول والثاني فيكون:

$\text{هـ} = ٣٠°$ و $\text{هـ} = ١٨٠° - ٣٠° = ١٥٠°$

الحلّان هما: $٣٠°$، $١٥٠°$

المعلم الالكتروني الشامل

٩) أ) $\frac{١}{١ + \text{جاهـ}} + \frac{١}{١ - \text{جاهـ}} = \frac{٢}{\text{جتا}^٢\text{هـ}}$

ابدأ بالطرف الأيمن:

اجمع الكسرَين لتحصل على:

$$= \frac{١ - \text{جاهـ}}{(١ - \text{جاهـ})(١ + \text{جاهـ})} + \frac{١ + \text{جاهـ}}{(١ - \text{جاهـ})(١ + \text{جاهـ})}$$

$$= \frac{١ - \text{جاهـ} + ١ + \text{جاهـ}}{(١ - \text{جاهـ})(١ + \text{جاهـ})}$$

$$= \frac{٢}{١ - \text{جا}^٢\text{هـ}}$$

استخدم المتطابقة $\text{جا}^٢\text{هـ} + \text{جتا}^٢\text{هـ} = ١$، ومنها يكون $١ - \text{جا}^٢\text{هـ} = \text{جتا}^٢\text{هـ}$

عوّض بدل $١ - \text{جا}^٢\text{هـ}$ لتحصل على:

$$= \frac{٢}{\text{جتا}^٢\text{هـ}}$$

ب) $\text{جتاهـ} \times \frac{٢}{\text{جتا}^٢\text{هـ}}$

بسّط الطرف الأيمن لتحصل على:

$$\frac{٢}{\text{جتاهـ}} = ٥$$

$٢ = ٥ \text{ جتاهـ}$

$\text{جتاهـ} = ٠,٤$

$\text{هـ} = ٦٦,٤٢^\circ$

جيب تمام الزاوية موجب في الربعَين الأول والرابع، وعليه يكون الحلّ:

$٣٦٠^\circ - ٦٦,٤٢^\circ = ٢٩٣,٥٧^\circ$

الحلّان هما: $٦٦,٤^\circ$، $٢٩٣,٦^\circ$

المعلم الإلكتروني الشامل

١٠) أ $\left(\frac{١}{\text{جا هـ}} - \frac{١}{\text{ظا هـ}}\right)^{٢} = \frac{١ + \text{جتا هـ}}{١ - \text{جتا هـ}}$

خُذ الطرف الأيمن:

$= \left(\frac{١}{\text{جا هـ}} - \frac{١}{\text{ظا هـ}}\right)^{٢}$

استخدم المتطابقة ظا هـ $= \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ وعوّض بدل ظا هـ لتحصل على:

$= \left(\frac{١}{\text{جا هـ}} + \frac{١}{\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}}\right)^{٢}$

$= \left(\frac{١}{\text{جا هـ}} + \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}\right)^{٢}$

$= \left(\frac{١ + \text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}\right)^{٢}$

ربّع لتحصل على:

$= \frac{(١ + \text{جتا هـ})(١ + \text{جتا هـ})}{\text{جا}^{٢}\text{هـ}}$

استخدم المتطابقة جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١، ومنها يكون جا^{٢}هـ = ١ − جتا^{٢}هـ

عوّض بدل جا^{٢}هـ في المقام تحصل على:

$= \frac{(١ + \text{جتا هـ})(١ + \text{جتا هـ})}{١ - \text{جتا}^{٢}\text{هـ}}$

حلِّل المقام مستخدمًا الفرق بين مربّعَين لتحصل على:

$= \frac{(١ + \text{جتا هـ})(١ + \text{جتا هـ})}{(١ - \text{جتا هـ})(١ + \text{جتا هـ})}$

اقسم البسط والمقام على (١ + جتا هـ) لتحصل على:

$= \frac{١ + \text{جتا هـ}}{١ - \text{جتا هـ}}$

ب $\frac{١ + \text{جتا هـ}}{١ - \text{جتا هـ}} = ٢$

١ + جتا هـ = ٢ (١ − جتا هـ)

١ + جتا هـ = ٢ − ٢ جتا هـ

٣ جتا هـ = ١

جتا هـ $= \frac{١}{٣}$

هـ = ٧٠,٥٢°

جيب تمام الزاوية موجب في الربع الأول والربع الرابع، فيكون الحل الثاني هو:

٣٦٠° − ٧٠,٥٢° = ٢٨٩,٤٧°

الحلّان هما: ٧٠,٥°، ٢٨٩,٥°

١١) أ ابدأ الطرف الأيمن واكتبه في صورة فرق بين مربعَين لتحصل على:

(جتا^{٢}هـ − جا^{٢}هـ)(جتا^{٢}هـ + جا^{٢}هـ)

استخدم المتطابقة جتا^{٢}هـ + جا^{٢}هـ = ١ لتبسّط العبارة فتحصل على: (جتا^{٢}هـ − جا^{٢}هـ)(١)

وبما أنّ جا^{٢}هـ = ١ − جتا^{٢}هـ فإنّ:

جتا^{٢}هـ − (١ − جتا^{٢}هـ)

= جتا^{٢}هـ − ١ + جتا^{٢}هـ

= ٢جتا^{٢}هـ − ١

ب ٢جتا^{٢}هـ − ١ $= \frac{١}{٢}$

٢جتا^{٢}هـ $= \frac{٣}{٢}$

جتا^{٢}هـ $= \frac{٣}{٤}$

المعلم الالكتروني للدارس

جتاهـ = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

جتاهـ = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

الجذر الموجب يعطي هـ = ٣٠°،

و٣٦٠° – ٣٠° = ٣٣٠° حيث جيب التمام يكون موجبًا في الربعَين الأوّل والرابع.

الجذر السالب يعطي هـ = ١٥٠°، باستخدام تماثل منحنى دالة جتا لتحصل على:

هـ = ٣٦٠° – ١٥٠° = ٢١٠°

الحلول هي: ٣٠°، ١٥٠°، ٢١٠°، ٣٣٠°

١٢) أ ٣ جتا س – ٢ ظاس = ٠

٣ جتاس – $\frac{٢ جاس}{جتا س}$ = ٠

٣ جتا^{٢}س – ٢جاس = ٠

٣(١ – جا^{٢}س) – ٢جاس = ٠

٣ – ٣ جا^{٢}س – ٢جاس = ٠

٣جا^{٢}س + ٢جاس – ٣ = ٠

٣ – ٣جا^{٢}س – ٢جاس = ٠

استخدم الصيغة التربيعية حيث

أ = ٣، ب = ٢، جـ = –٣

جاس = $\frac{-٢ \pm \sqrt{(-٣)(٣)٤ - ٢٢}}{٦}$

= $\frac{-٢ \pm \sqrt{٤٠}}{٦}$

= –١,٣٨٧٤ أو ٠,٧٢٠٧٦

جاس = –١,٣٨٧٤ ليس لها حلّ.

جاس = ٠,٧٢٠٧٦ تعطي س = ٠,٨٠٤٨، وحيث الجيب موجب في الربعَين الأوّل والثاني، فإن قيم س الأخرى هي:

π – ٠,٨٠٤٨، ٢π + ٠,٨٠٤٨

القيم الثلاث حيث يتقاطع المنحنى مع محور السينات هي: س = ٠,٨٠٥، س = ٢,٣٤، س = ٧,٠٩

المعلم الإلكتروني الشامل