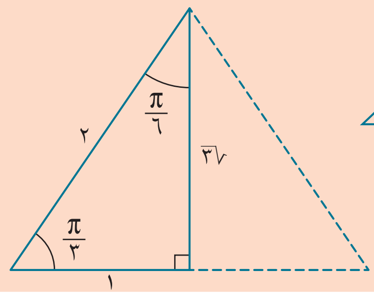
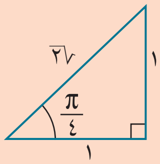
تمارين ٢-٥

اعتمد القيم الدقيقة لعناصر المثلّثات بأي من التدريجَين (الدرجات أو الراديان) لتساعدك في الإجابة عن الأسئلة ١ إلى ٣





١) أ جتا $^{-١}$ يعني الزاوية التي جيب تمامها ١ في المجال المعطى $٠° \leqslant$ الزاوية $\leqslant ١٨٠°$ وهي $٠°$

ب جا $^{-١}\left(\frac{١}{٢}\right)$ يعني الزاوية في المجال المعطى $-٩٠° \leqslant$ الزاوية $\leqslant ٩٠°$ التي يكون جَيّب تمامها $\frac{١}{٢}$ وهي $٣٠°$

ج ظا $\sqrt{٣}$ يعني الزاوية التي ظلها $\sqrt{٣}$ في المجال المعطى $-٩٠° \leqslant$ الزاوية $\leqslant ٩٠°$ وهي $٦٠°$

د جا $^{-١}(-١)$ يعني الزاوية التي جيبها -١ في المجال المعطى $-٩٠° \leqslant$ الزاوية $\leqslant ٩٠°$ وهي $-٩٠°$

هـ جا $^{-١}(-\sqrt{٣})$ يعني الزاوية التي جيبها $-\sqrt{٣}$ في المجال المعطى $-٩٠° \leqslant$ الزاوية $\leqslant ٩٠°$ وهي $-٦٠°$

و جتا $^{-١}\left(-\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ يعني الزاوية التي جيبها $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ في المجال المعطى $٠° \leqslant$ الزاوية $\leqslant ١٨٠°$ وهي $١٣٥°$

٢) أ جا $^{-١}(٠)$ يعني الزاوية التي جيبها ٠ في المجال المعطى $-\frac{\pi}{٢} \leqslant$ الزاوية $\leqslant \frac{\pi}{٢}$ وهي ٠

ب ظا $^{-١}$ يعني الزاوية التي ظلها ١ في المجال المعطى $-\frac{\pi}{٢} \leqslant$ الزاوية $\leqslant \frac{\pi}{٢}$ وهي $\frac{\pi}{٤}$.

ج جتا $^{-١}\left(-\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ يعني الزاوية التي جيب تمامها $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ في المجال المعطى $٠ \leqslant$ الزاوية $\leqslant \pi$ وهي $\frac{\pi}{٤}$.

د ظا $^{-١}\left(-\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ يعني الزاوية التي ظلها $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ في المجال المعطى $-\frac{\pi}{٢} \leqslant$ الزاوية $\leqslant \frac{\pi}{٢}$ وهي $-\frac{\pi}{٦}$.

هـ جتا $^{-١}\left(-\frac{١}{٢}\right)$ يعني الزاوية التي جيب تمامها $-\frac{١}{٢}$ في المجال المعطى $٠° \leqslant$ الزاوية $\leqslant \pi$ وهي $\frac{٢\pi}{٣}$.

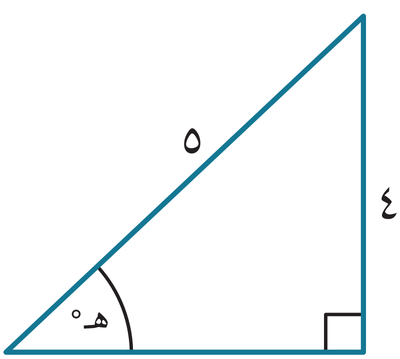
و جا $^{-١}\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ يعني الزاوية التي جيبها $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ في المجال المعطى $-\frac{\pi}{٢} \leqslant$ الزاوية $\leqslant \frac{\pi}{٢}$ و هي $-\frac{\pi}{٣}$.

٣) أ جتا $^{-١}\left(\frac{٣}{٥}\right)$ يعني الزاوية هـ التي جيب تمامها $\frac{٣}{٥}$ حيث $٠° \leqslant$ الزاوية $\leqslant ١٨٠°$

وهذه لم تستخدم أيًا من المثلثات أعلاه، وليس مسموحًا أن تستخدم الحاسبة.

جيب التمام موجب في الربع الأوّل، لذا استخدم المثلّث المبيّن ونظرية فيثاغورث لتحسب أطوال الأضلاع المجهولة، أي ٤

جا هـ $= \frac{٤}{٥}$ فيكون جا^{٢}هـ $= \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٢٥}$



ب) استخدم المثلث نفسه في الجزئية (أ):

ظا هـ = $\frac{٤}{٣}$

∴ ظا^{٢}هـ = $\left(\frac{٤}{٣}\right)^{٢}$ = $\frac{١٦}{٩}$

٤) أ) تحوّل التمثيل البياني للدالة د(س) = جا س إلى التمثيل البياني للدالة د (س) = ٣ جا س − ٤ بتركيب التحويلات الهندسية الآتية:

- تمدد رأسي معامله ٣ في الفترة −٣ ≤ س ≤ ٣ أُتبع بـ
- انسحاب بالمتجه $\binom{٠}{-٤}$ تصبح الفترة −٧ ≤ د(س) ≤ −١

∴ المدى هو −٧ ≤ د(س) ≤ −١

لا يؤثر أي من التحويلَين الهندسيَّين على المجال.

ب) د (س) = ٣ جا س − ٤

ص = ٣ جا س − ٤

٣ جا س = ص + ٤

٣ جا ص = س + ٤

جا ص = $\left(\frac{\text{س} + ٤}{٣}\right)$

ص = جا$^{-١}$ $\left(\frac{\text{س} + ٤}{٣}\right)$

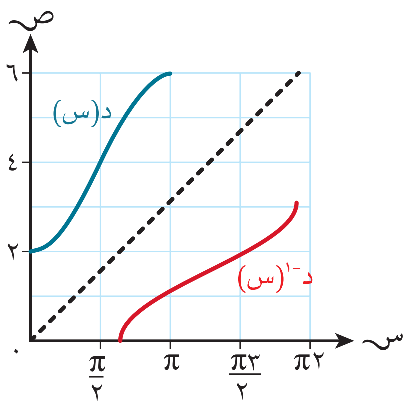
د$^{-١}$(س) = جا$^{-١}$ $\left(\frac{\text{س} + ٤}{٣}\right)$

٥) أ) تحوّل التمثيل البياني للدالة د(س) = جتا س إلى التمثيل البياني للدالة د(س) = ٤ −٢ جتا س بتركيب التحويلات الهندسية الآتية:

- تمدد رأسي معامله ٣ في الفترة −٢ ≤ ٢س ≤ ٢ أُتبع بـ :
- انعكاس في المحور السيني، وهذا لا يؤثر على المدى، أُتبع بـ:
- انسحاب بالمتجه $\binom{٠}{-٤}$

∴ المدى هو ٢ ≤ د(س) ≤ ٦

المجال لم يتغير ٠ ≤ س ≤ π.



ب) بالنظر إلى التمثيل البياني تلاحظ أن د دالة واحد إلى واحد لذا يوجد لها دالة عكسية.

د(س) = ٤ − ٢جتا س

ص = ٤ − ٢جتا س

س = ٤ − ٢جتا ص

٢ جتا ص = ٤ − س

جتا ص = $\frac{٤ - \text{س}}{٢}$

ص = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{٤ - \text{س}}{٢}\right)$

د$^{-١}$(س) = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{٤ - \text{س}}{٢}\right)$

ج) انظر الشكل

٦) أ) تحوّل التمثيل البياني للدالة د(س) = جا س إلى التمثيل البياني للدالة د(س) = ٥ −٢ جا س بتركيب التحويلات الهندسية الآتية:

- تمدد رأسي معامله ٢. المجال يبقى

$\frac{\pi}{2} \leqslant$ س $\leqslant$ ل والمدى −٢ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٢. ثم أُتبع بـ:

- انعكاس في المحور السيني. المجال يبقى

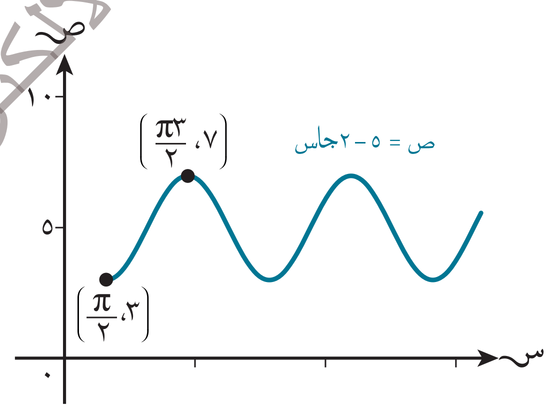
$\frac{\pi}{2} \leqslant$ س $\leqslant$ ل، وهذا لا يؤثر في المدى. ثم أُتبع بـ:

- انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٥ \end{pmatrix}$ المجال يبقى

$\frac{\pi}{2} \leqslant$ س $\leqslant$ ل،

$\therefore$ المدى ٣ $\leqslant$ د(س) $\leqslant$ ٧

تمثيل الدالة د(س) = ٥ −٢ جا س للمجال س $\geqslant \frac{\pi}{2}$. كما هو مبيّن:



يكتب على الشكل ص = ٥ −٢ جا س.

توجد دالة عكسية للدالة د عندما تكون "واحد إلى واحد".

انظر إلى التمثيل البياني، القيمة العظمى عندما س تكون $\frac{٣\pi}{٢}$.

$\therefore$ ل = $\frac{٣\pi}{٢}$.

ب د(س) = ٥ −٢ جا س

ص = ٥ −٢ جا س

س = ٥ −٢ جا ص

٢ جا ص = ٥ − س

جا ص = $\left(\frac{٥ - \text{س}}{٢}\right)$

ص = جا$^{-١}\left(\frac{٥ - \text{س}}{٢}\right)$

مجال د$^{-١}$(س) هو مدى الدالة د(س). أي أن المجال هو ٣ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٧

٧) **أ** تحوّل التمثيل البياني للدالة د(س) = جتا س إلى التمثيل البياني للدالة د(س) = ٤ جتا − ٥ بالتحويلات الهندسية الآتية:

- تمدد أفقي معامله ٢. يصبح المجال ٠ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٤π
- تمدد رأسي معامله ٤. يصبح المدى −٤ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٤. ثم أُتبع بـ:
- انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٥ \end{pmatrix}$. يصبح المدى −٩ $\leqslant$ د(س) $\leqslant$ −١. لا يتأثر المدى أي ٠ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٤π.

وعليه يكون مدى د هو −٩ $\leqslant$ د(س) $\leqslant$ −١

ب د(س) = ٤ جتا $\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)$ − ٥

ص = ٤ جتا $\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)$ − ٥

س = ٤ جتا $\left(\frac{\text{ص}}{٢}\right)$ − ٥

٤ جتا $\left(\frac{\text{ص}}{٢}\right)$ = س + ٥

جتا $\left(\frac{\text{ص}}{٢}\right) = \frac{\text{س} + ٥}{٤}$ =

$\frac{\text{ص}}{٢}$ = جتا$^{-١}$هـ $\left(\frac{\text{س} + ٥}{٤}\right)$

ص = ٢ جتا$^{-١}$هـ $\left(\frac{\text{س} + ٥}{٤}\right)$

د$^{-١}$(س) = ٢ جتا$^{-١}$هـ $\left(\frac{\text{س} + ٥}{٤}\right)$

مدى د$^{-١}$(س) هو مجال د، أي ٠ $\leqslant$ د$^{-١}$(س) $\leqslant$ ٢π .