تمارين ٢-٤

١) التمدّد باتجاه موازٍ للمحور السيني يؤثّر على دورة الدالة.

دورة دالة الجيب ودالة جيب التمام

$= \frac{٣٦٠°}{\text{مضاعفات الزاوية س}}$

دورة دالة الظل $= \frac{١٨٠°}{\text{مضاعفات الزاوية س}}$

أ $\frac{٣٦٠°}{١} = ٣٦٠°$

ب $\frac{٣٦٠°}{٢} = ١٨٠°$

ج $\frac{١٨٠°}{\frac{١}{٢}} = ٣٦٠°$

د $\frac{٣٦٠°}{٣} = ١٢٠°$

هـ $\frac{٣٦٠°}{١} = ١٨٠°$

و $\frac{١٨٠°}{١} = ١٨٠°$

٢) تمدد موازٍ لمحور الصادات يؤثر على سعة دالتَي الجيب وجيب التمام.

السعة تساوي ١ × مضاعفات جا س أو جتا س.

أ ١ × ١ = ١

ب ١ × ٥ = ٥

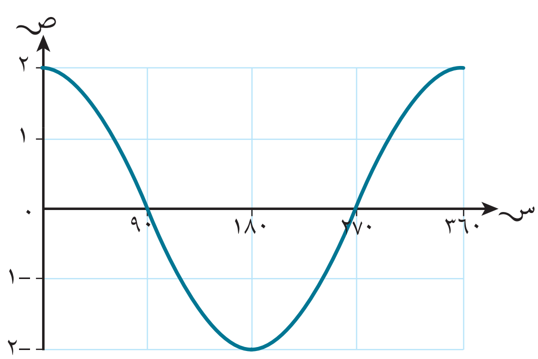
ج ١ × ٧ = ٧

د ١ × ٣ = ٣

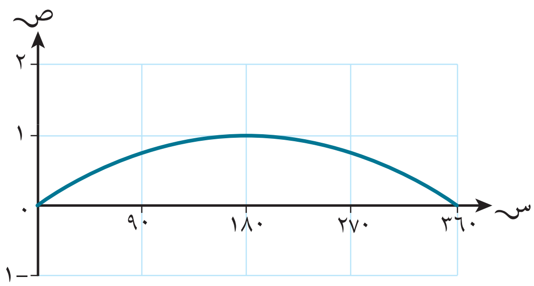
هـ ١ × ٤ = ٤

و ١ × ٢ = ٢

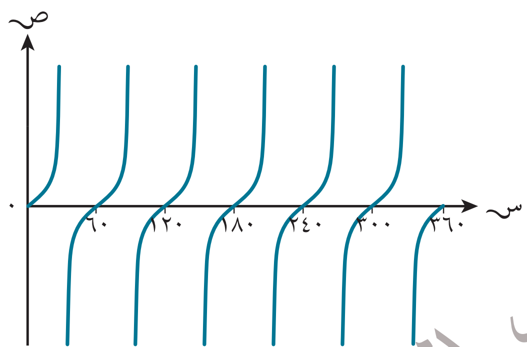
٣) أ تمدد التمثيل البياني لـ ص= جتا س بمعامل مقداره ٢ باتجاه موازٍ لمحور الصادات.



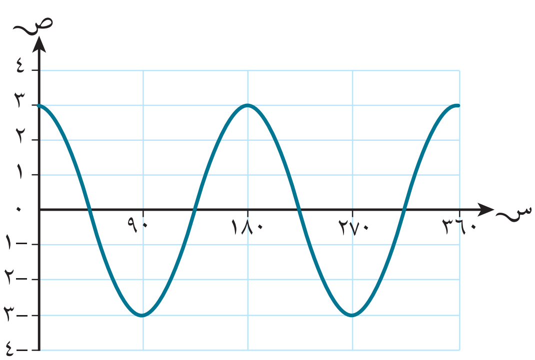
ب تمدد التمثيل البياني لـ ص= جا س بمعامل مقداره ٢ باتجاه موازٍ لمحور السينات.



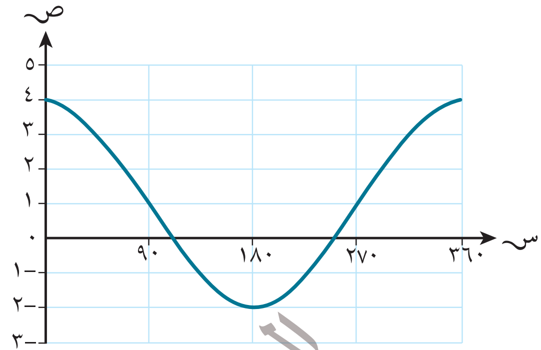
ج تمدد التمثيل البياني لـ ص= ظا س بمعامل مقداره $\frac{١}{٣}$ باتجاه موازٍ لمحور السينات.



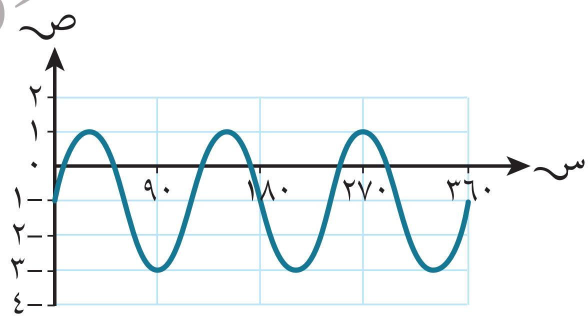
د تمدد التمثيل البياني لـ ص = جتا س بمعامل مقداره $\frac{١}{٢}$ باتجاه موازٍ لمحور السينات، ثم تبعه تمدد معامله ٣ باتجاه موازٍ لمحور الصادات.



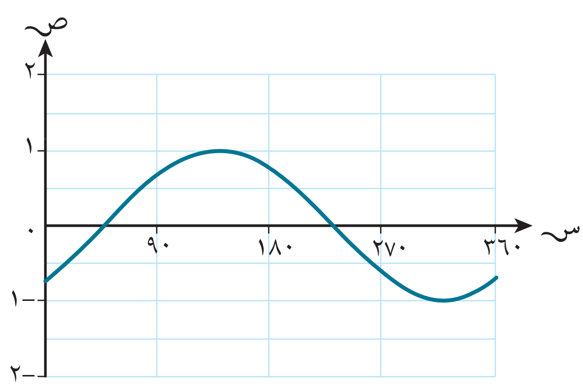
هـ) تمدد التمثيل البياني لـ ص = جتا س بمعامل مقداره ٣ باتجاه موازٍ لمحور الصادات، ثم تبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \end{pmatrix}$.



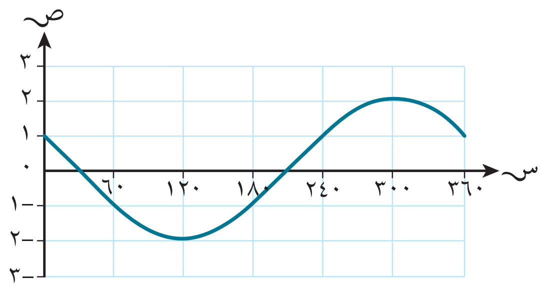
و) تمدد التمثيل البياني لـ ص = جتا س بمعامل مقداره $\frac{١}{٣}$ باتجاه موازٍ لمحور السينات، ثم تبعه تمدد معامله ٢ باتجاه موازٍ لمحور الصادات ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١- \end{pmatrix}$.



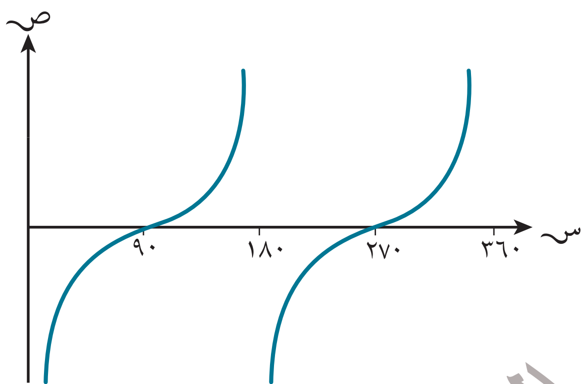
ز) سُحب التمثيل البياني لـ ص = جا س بالمتجه $\begin{pmatrix} ٤٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$.



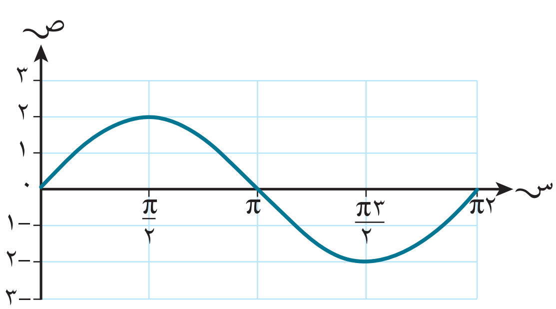
ح) سُحب التمثيل البياني لـ ص = جتا س بالمتجه $\begin{pmatrix} ٦٠- \\ ٠ \end{pmatrix}$ ثم تبعه تمدد معامله ٢ موازٍ لمحور الصادات.



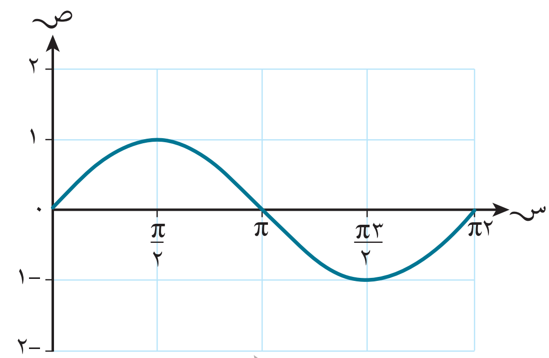
ط) سُحب التمثيل البياني لـ ص = ظا س بالمتجه $\begin{pmatrix} ٩٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$.



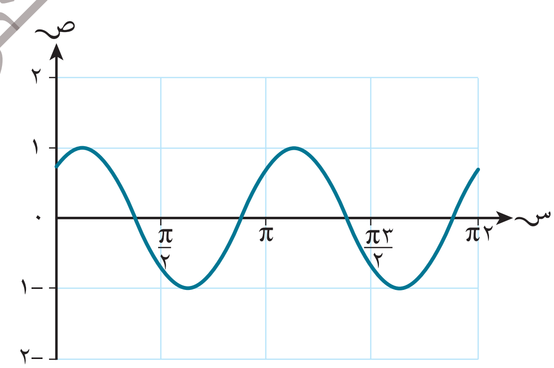
٤) أ) ١) تمدد التمثيل البياني لـ ص = جا س بمعامل مقداره ٢ باتجاه موازٍ لمحور الصادات.



٢) سُحب التمثيل البياني لـ ص = جتا س بالمتجه $\left(\begin{smallmatrix}\frac{\pi}{٢}\\ ٠\end{smallmatrix}\right)$.



٣) سُحب التمثيل البياني لـ ص = جا س بالمتجه $\left(\begin{smallmatrix}-\frac{\pi}{٤}\\ ٠\end{smallmatrix}\right)$ ثم تبعه تمدد معامله $\frac{١}{٢}$ باتجاه موازٍ لمحور السينات.



ب الإحداثيات السينية لنقط التحوّل للتمثيل البياني لـ ص = جا س هي: $\frac{\pi}{٢}$، $\frac{٣\pi}{٢}$، $\frac{٥\pi}{٢}$، $\frac{٧\pi}{٢}$، وهكذا.

جميعها قُلّصت بمقدار $\frac{\pi}{٢}$ ثم ضُربت في $\frac{١}{٢}$ لتصبح $\frac{\pi}{٨}$، $\frac{٥\pi}{٨}$، $\frac{٩\pi}{٨}$، $\frac{١٣\pi}{٨}$.

نقط التحوّل للتمثيل البياني لـ ص = جا(٢س+$\frac{\pi}{٤}$)

هي: ($\frac{\pi}{٨}$، ١)، ($\frac{٥\pi}{٩}$، –١)، ($\frac{٩\pi}{٨}$، ١)، ($\frac{١٣\pi}{٨}$، –١)

٥) أ تحوّل التمثيل البياني لـ ص = جا س حيث الدورة هي ٣٦٠° وسعته ١ إلى التمثيل البياني لـ ص = جا ٢س بتمدد معامله $\frac{١}{٢}$ موازٍ لمحور السينات.

ضُربت الدورة في نصف لتصبح ١٨٠° وجميع الإحداثيات السينية قد قُسمت على ٢

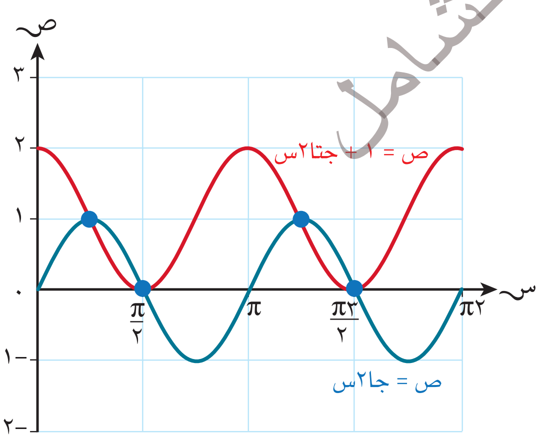
دورة التمثيل البياني لـ ص = جتا س في الفترة ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° هي ٣٦٠° وسِعته ١، تحوّل هذا التمثيل إلى التمثيل البياني ص = ١ + جتا ٢س بالتحويلات الهندسية الآتية:

١) تمدد أفقي معامله $\frac{١}{٢}$ و

٢) انسحاب بالمتجه $\left(\begin{smallmatrix}٠\\ ١\end{smallmatrix}\right)$ بأي ترتيب.

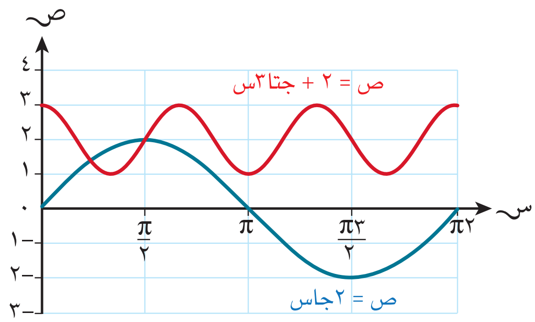
ضُربت الدورة في نصف، وعليه فإن الإحداثيات السينية الأصلية قد قُسمت على ٢، لكن السعة لم تتغيّر، إذ تحركت جميع الإحداثيات الصادية إلى الأعلى وحدة واحدة.

يصبح شكل التمثيل البياني كالآتي:



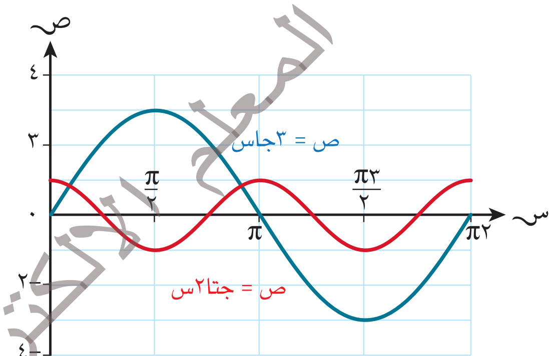
ب توجد أربعة حلول للمعادلة جا ٢س= ١ + جتا ٢س في الفترة ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

٦) أ



ب يتقاطع التمثيلان البيانيان في نقطتَين لذا يوجد حلّان للمعادلة.

٧) أ



ب يتقاطع التمثيلان البيانيان في نقطتَين لذا يوجد حلّان للمعادلة.

٨) يعتمد التمثيل البياني على تمثيل الدالة ص = جا س وقد أُجري عليه التحويلات الهندسية الآتية:

١) تمدد أفقي معامله $\frac{١}{ب}$.

٢) تمدد رأسي معامله أ

٣) انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ جـ \end{pmatrix}$

عندما ترسم مستقيمًا أفقيًا عند ص = ٥ تحصل على قيمة جـ حيث مُثلت هذه العملية بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٥ \end{pmatrix}$ فتكون جـ = ٥، تصبح سعة التمثيل البياني ٤ ومُثلت بتمدد رأسي معامله ٤ فتكون أ = ٤

تصبح دورة التمثيل البياني π تلاحظ أنها قد قسّمت إلى نصفَين فتكون ب = ٢

٩) خصائص التمثيل البياني للدالة ص = أ + ب جتا جـ س هي: الدورة ١٢٠° = $\frac{٣٦٠°}{٣}$ ، وعليه جـ = ٣

السعة ٢ = ١ × ٢، وعليه ب = ٢

معادلة محور التماثل هي:

$$ص = \frac{\text{القيمة العظمى لـ ص + القيمة الصغرى لـ ص}}{٢}$$

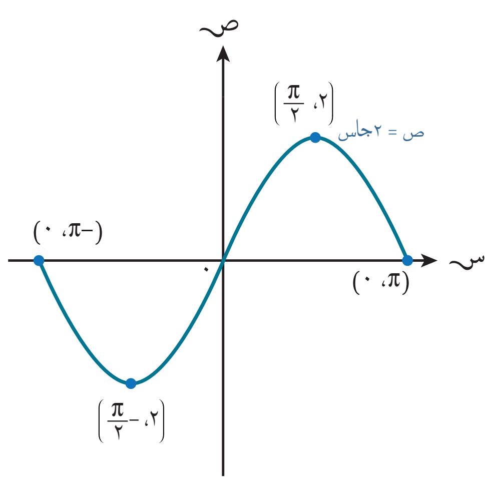
$$= \frac{١ + ٥}{٢} = ٣\text{، وعليه أ = ٣}$$

١٠) أ التمثيل البياني للدالة ص = جا س حيث دورتها ٢π، والسعة ١ قد تحوّل إلى التمثيل البياني للدالة ص = ٢ جا س بتمدد رأسي معامله ٢ ضُربت جميع الإحداثيات الصادية للتمثيل الأصلي في ٢

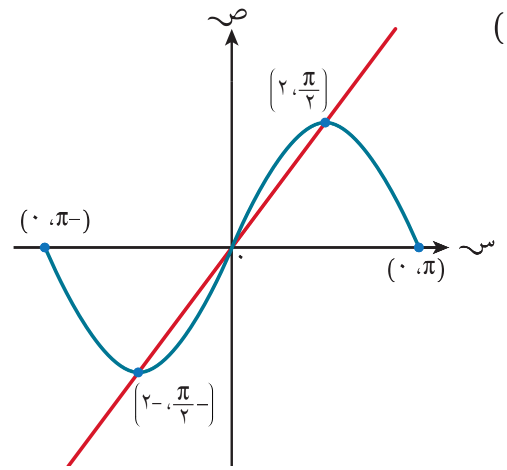
نقطة التحوّل العظمى للدالة ص = جا س في الفترة $-\pi \leqslant$ س $\leqslant \pi$ هي $\left(\frac{\pi}{٢}، ١\right)$.

نقطة التحوّل العظمى للدالة ص = ٢جا س في الفترة $-\pi \leqslant$ س $\leqslant \pi$ هي $\left(\frac{\pi}{٢}، ٢\right)$.

فيكون التمثيل البياني للدالة ص = ٢جا س في الفترة $-\pi \leqslant$ س $\leqslant \pi$ كما هو مبيّن أدناه:



١)



يقطع المستقيم ص = ك س التمثيل البياني عند النقطة العظمى $(\frac{\pi}{٢}، ٢)$.

نجد معادلته بتعويض س = $\frac{\pi}{٢}$، ص = ٢ في المعادلة ص = ك س.

وعليه يكون، ٢ = ك × $\frac{\pi}{٢}$ ومنها ك = $\frac{٤}{\pi}$

٢) استخدم تماثل المنحنى فتجد أن المستقيم يقطع المنحنى في النقاط $(-\frac{\pi}{٢}، -٢)$، $(٠، ٠)$

١١) تحوّل التمثيل البياني للدالة ص = ظا س إلى التمثيل البياني للدالة ص = أ ظا ب س + ج بالتحويلات الهندسية الآتية:

١) تمدد أفقي معامله $\frac{١}{ب}$.

٢) تمدد رأسي معامله أ، يمكن إجراء التحويلَين ١، ٢ بأي ترتيب.

٣) انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ جـ \end{pmatrix}$.

دراسة التحويلات الهندسية كل بدوره تحصل على:

١) يبيّن التمثيل البياني أن الدورة لم تتغير، وعليه تكون ب = ١ لأن دورة ظا س هي π .

أي أن ص = ظا ١س أو مباشرة ص = ظا س.

٢) تمدد رأسي معامله أ تحوّل التمثيل البياني للدالة ص = ظا س إلى ص = ٣ وإحداثيات النقطة ت الأصلية هي $(\frac{\pi}{٤}، ١)$ قد تحوّلت إلى ل $(\frac{\pi}{٤}، ٣)$،

فيكون أ = ٣ أي أن الدالة ص = ٣ ظا س

٣) الانسحاب الرأسي ٥ وحدات رأسية أي $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٥ \end{pmatrix}$

تحوّل ل $(\frac{\pi}{٤}، ٣)$ إلى ل $(\frac{\pi}{٤}، ٨)$، ويكون جـ = ٥

لتصبح الدالة ص = ٣ ظا س + ٥

∴ أ = ٣، ب = ١، جـ = ٥

إذا علمت أن ص = جا ب س أو ص = جتا ب س فإن الدورة = $\frac{٢\pi}{ب}$ أو $\frac{٣٦٠°}{ب}$.

إذا علمت أن ص = ظا ب س فإن الدورة = $\frac{\pi}{ب}$

أو الدورة = $\left(\frac{١٨٠°}{ب}\right)$

١٢) أ د(س) = أ + ب جا س في الفترة ٠ ≤ س ≤ ٢π

عوّض بدل س = ٠ في الدالة د(س) لتحصل على:

د(٠) = أ + ب جا(٠)

ومنها أ + ب جا(٠) = ٣

فيكون أ = ٣

عوّض بدل س = $\frac{٧\pi}{٦}$ في الدالة د(س) لتحصل على:

د$\left(\frac{٧\pi}{٦}\right)$ = ٣ + ب جا $\frac{٧\pi}{٦}$

ومنها، ٣ + ب جا $\frac{٧\pi}{٦}$ = ٢

−١ = ب جا $\frac{٧\pi}{٦}$

−$\frac{١}{٢}$ب = −١

أي أن ب = ٢

ب المطلوب هو إيجاد مدى ق قبل البحث عن قيمة د(س) حيث د(س) = ٣ + ٢ جا س.

سعة الدالة ص = جا س هي ١، لكن بعد تمدد رأسي معامله ٢، تكون الدالة ص = ٢ جا س وتصبح السعة ٢

وعليه فإن جميع الإحداثيات الصادية ستضرب في ٢

يتبع ذلك انسحاب رأسي بمقدار ٣ وحدات إلى الأعلى أو بالمتجه $\binom{٠}{٣}$ الأمر الذي يعني أن الإحداثيات الصادية تزيد بمقدار ٣

نقاط القيم العظمى والصغرى للتمثيل البياني د(س) = جا س في الفترة هي عند $\left(\frac{\pi}{٢}،\ ١\right)$ و $\left(\frac{٣\pi}{٢}،\ -١\right)$ على الترتيب.

بعد تحويلَين هندسيَّين تصبح نقاط القيم العظمى والصغرى:

العظمى: $\left(\frac{\pi}{٢}،\ ١ \times ٢ + ٣\right)$ أو $\left(\frac{\pi}{٢}،\ ٥\right)$

الصغرى: $\left(\frac{٣\pi}{٢}،\ -١ \times ٢ + ٣\right)$ أو $\left(\frac{٣\pi}{٢}،\ ١\right)$

∴ ١ ⩽ د(س) ⩽ ٥

١٣) أ د(س) = أ − ب جتا س حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

ينتقل د(س) إلى د(س) = أ − ب جتا س بعد إجراء ٣ تحويلات هندسية هي:

١) تمدد رأسي معامله ب، وتُضرب جميع الإحداثيات الصادية في ب، و

٢) انعكاس في المحور السيني، وتُضرب الإحداثيات الصادية الآن في −١، يُجرى هذان التحويلان بأي ترتيب. ثم يتبعه:

٣) انسحاب بالمتجه $\binom{٠}{أ}$، الإحداثيات الصادية الآن تزداد بمقدار أ وحدة.

وحيث يوجد تركيب تحويلَين هندسيَّين رأسيَّين فإن الدورة والإحداثيات السينية لجميع النقاط لا تتغير.

نقاط القيمة العظمى والقيمة الصغرى للتمثيل البياني للدالة د(س) = جتا س حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢π هي (٠، ١)، (π، −١) على الترتيب.

بعد التحويلات الهندسية الثلاثة تصبح النقطة (٠، ١) هكذا (٠،(١ × ب) × −١ + أ)

فيكون (١ × ب) ×−١ + أ = −٢ وتبسط إلى:

أ − ب = −٢ .... [١]

(π، −١) تصبح (π، (−١ × ب) × −١ + أ)

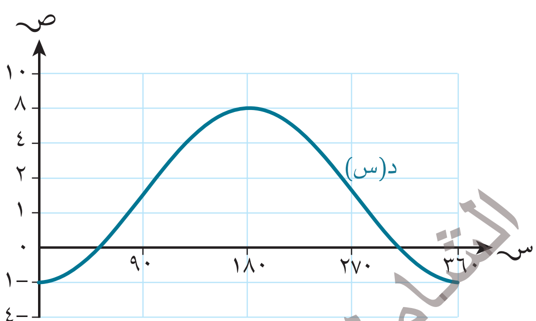
ومنه، (−١ × ب) × −١ + أ = ٨ وتبسط إلى

أ + ب = ٨ [٢]

اجمع المعادلتَين [١]، [٢] تحصل على ٢أ = ٦،

أي أن أ = ٣، ب = ٥

ب



١٤) د(س) = أ + ب جا جـ س حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

الدالة د(س) = جا س تصبح بالصورة

د(س) = أ − ب جا جـ س بعد تركيب ثلاثة تحويلات هندسية كما يأتي:

١) تمدّد أفقي معامله س، تضرب جميع الإحداثيات الصادية في $\frac{١}{جـ}$.

٢) تمدّد رأسي معامله ب، أي أن الإحداثيات الصادية الجديدة تُضرب في ب. هذان التحويلان يجريان بأي ترتيب. ثم يتبع:

٣) انسحاب رأسي بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ أ \end{pmatrix}$، تزداد الإحداثيات الصادية الآن بمقدار أ وحدة.

نقطتا القيمة العظمى والقيمة الصغرى للتمثيل البياني د(س) = جاس حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢π

هما $\left(\frac{\pi}{٢}، ١\right)$، $\left(\frac{٣\pi}{٢}، -١\right)$ على الترتيب.

بعد تركيب التحويلات الهندسية الثلاثة يكون:

$\left(\frac{\pi}{٢}، ١\right)$ تصبح $\left(\frac{\pi}{٢}، \frac{١}{جـ}، ١ \times ب + أ\right)$

ويكون ١ × ب + أ = ٩ وتبسط إلى:

أ + ب = ٩......... [١]

$\left(\frac{٣\pi}{٢}، -١\right)$ تصبح $\left(\frac{٣\pi}{٢}، \frac{١}{جـ}، -١ \times ب + أ\right)$

ومنها = -١ × ب + أ = ١ وتبسط إلى:

أ − ب = ١......... [٢]

اجمع المعادلتَين [١]، [٢] تحصل على ٢أ = ١٠،

أ = ٥، ب = ٤

نجد دورة دالة الجيب باستخدام الآتية:

الدورة = $\frac{٣٦٠°}{جـ}$

١٢٠° = $\frac{٣٦٠°}{جـ}$ ومنها جـ = ٣

∴ أ = ٥، ب = ٤، جـ = ٣

١٥) أ د(س) = أ + ٥ جتا ب س

حيث ٠° ⩽ س ⩽ ١٢٠°

الدالة د(س) = جتا س تصبح بالصورة

د(س) = أ + ٥ جتا ب س

بعد تركيب ثلاثة تحويلات هندسية هي:

١) تمدد أفقي معامله $\frac{١}{ب}$ جميع الإحداثيات السينية تُضرب في $\frac{١}{ب}$.

٢) تمدد رأسي معامله ٥. جميع الإحداثيات الصادية تُضرب في ٥. هذان التحويلان يجريان بأي ترتيب.

٣) انسحاب بمقدار أ وحدة أي بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ أ \end{pmatrix}$ تزداد الإحداثيات الصادية بمقدار أ وحدة.

تقع نقطتا القيمة العظمى والقيمة الصغرى للتمثيل البياني د(س) = جتا س في الفترة ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠° عند (٠، ١)، (١٨٠، -١) على الترتيب.

بعد تركيب التحويلات الهندسية الثلاثة

النقطة (٠، ١) تصبح $\left(٠، \frac{١}{ب}، ١ \times ٥ + أ\right)$

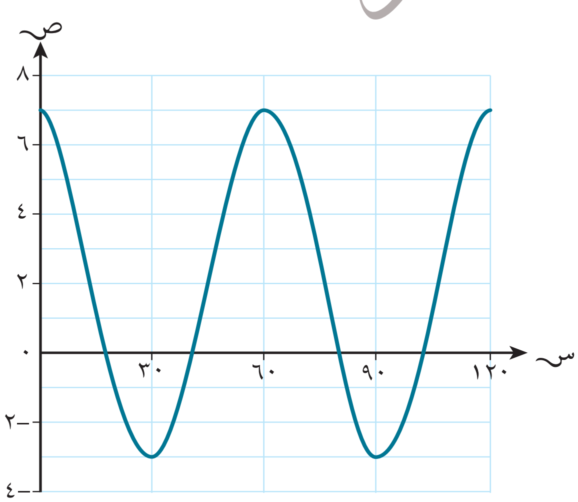
ويكون ١ × ٥ + أ = ٧ وعند تبسيطها تحصل على: أ = ٢

الدورة = $\frac{٣٦٠°}{ب}$ ويكون

$\frac{٣٦٠°}{ب}$ = ٦٠ ومنها ب = ٦

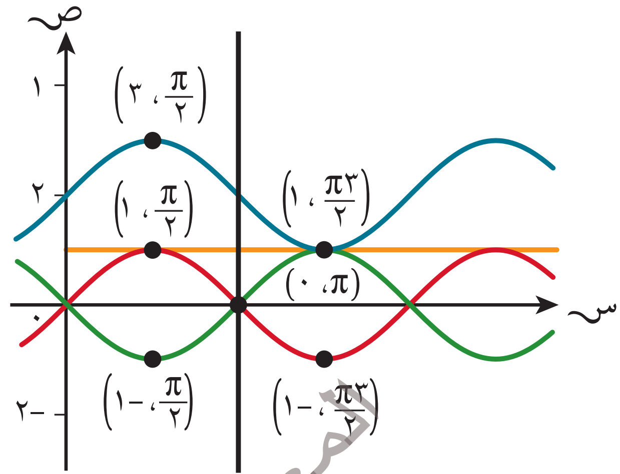
ب تتأثر السعة فقط بالتمدد الرأسي الذي معامله ٥ وعليه تكون السعة الجديدة ٥ لأن سعة الدالة ص = − جاس هي ١

جـ



١٦) الرسم قد يساعد الطلبة.

انظر إلى سلسلة التمثيلات البيانية الآتية:

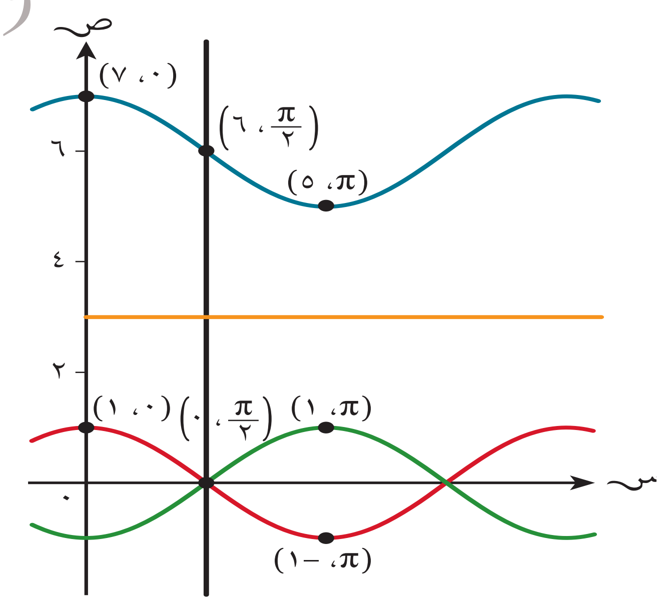


إذا عُكست الدالة ص = جا س في المستقيم س = π تصبح الدالة ص = − جا س.

إذا عُكس التمثيل البياني الجديد في المستقيم ص = ١ تصبح معادلة الدالة الجديدة

ص = ٢ + جا س

١٧) انظر إلى سلسلة التمثيلات البيانية:



إذا عُكست الدالة ص = جتا س في المستقيم س = $\frac{\pi}{2}$ تصبح المعادلة ص = − جتا س.

عُكس التمثيل البياني الجديد في المستقيم ص = ٣ تكون الدالة الجديدة:

ص = ٦ + جتا س