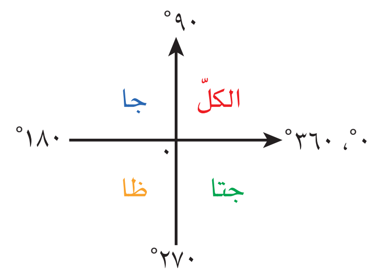
تمارين ٢-٣

١) استخدم المخطّط الآتي للتمرينين ١، ٢ لتبيّن أي الدوال المثلّثيّة موجبة وفي أي ربع.



أ) زاوية الأساس ١٠° وتقع الزاوية ١٩٠° في الربع الثالث.

$$\text{جا } ١٩٠^\circ = -\text{جا }(١٩٠^\circ - ١٨٠^\circ) = -\text{جا } ١٠^\circ$$

ب) زاوية الأساس ٥٥° وتقع الزاوية ٣٠٥° في الربع الرابع.

$$\text{جتا } ٣٠٥^\circ = \text{جتا }(٣٦٠^\circ - ٣٠٥^\circ) = \text{جتا } ٥٥^\circ$$

ج) زاوية الأساس ٥٥° وتقع الزاوية ١٢٥° في الربع الثاني.

$$\text{ظا } ١٢٥^\circ = -\text{ظا }(١٨٠^\circ - ١٢٥^\circ) = -\text{ظا } ٥٥^\circ$$

د) زاوية الأساس ٦٥° وتقع الزاوية −٢٤٥° في الربع الثاني.

$$\text{جتا }(-٢٤٥^\circ) = -\text{جتا }(٢٤٥^\circ - ١٨٠^\circ) = -\text{جتا } ٦٥^\circ$$

هـ) زاوية الأساس $\frac{\pi}{٥}$ وتقع الزاوية $\frac{٤\pi}{٥}$ في الربع الثاني.

$$\text{جتا } \frac{٤\pi}{٥} = -\text{جتا }(\pi - \frac{٤\pi}{٥}) = -\text{جتا } \frac{\pi}{٥}$$

و) زاوية الأساس $\frac{\pi}{٨}$ وتقع الزاوية $\frac{٩\pi}{٨}$ في الربع الثالث.

$$\text{جا } \frac{٩\pi}{٨} = -\text{جا }\left(\frac{٩\pi}{٨} - \pi\right) = -\text{جا } \frac{\pi}{٨}$$

ز) زاوية الأساس $\frac{٣\pi}{١٠}$ وتقع الزاوية $-\frac{٧\pi}{١٠}$ في الربع الثالث.

$$\text{جتا }\left(-\frac{٧\pi}{١٠}\right) = -\text{جتا }\left(\pi - \frac{٧\pi}{١٠}\right) = -\text{جتا } \frac{٣\pi}{١٠}$$

ح) زاوية الأساس $\frac{٢\pi}{٩}$ وتقع الزاوية $-\frac{١١\pi}{٩}$ في الربع الثالث .

$$\text{ظا } \frac{١١\pi}{٩} = \text{ظا }\left(\frac{١١\pi}{٩} - \pi\right) = \text{ظا } \frac{٢\pi}{٩}$$

٢)

أ) $\text{جتا } ١٢٠^\circ = -\text{جتا }(١٨٠^\circ - ١٢٠^\circ) = -\text{جتا } ٦٠^\circ = -\frac{١}{٢}$

ب) $\text{ظا } ٣٣٠^\circ = -\text{ظا }(٣٦٠^\circ - ٣٣٠^\circ) = -\text{ظا } ٣٠^\circ = -\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

ج) $\text{جا } ٢٢٥^\circ = -\text{جا }(٢٢٥^\circ - ١٨٠^\circ) = -\text{جا } ٤٥^\circ = -\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

د) $\text{ظا }(-٣٠٠^\circ) = \text{ظا }(٣٦٠^\circ - ٣٠٠^\circ) = \text{ظا } ٦٠^\circ = \sqrt{٣}$

هـ) $\text{جا } \frac{٤\pi}{٣} = -\text{جا }\left(\frac{٤\pi}{٣} - \pi\right) = -\text{جا } \frac{\pi}{٣} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

و) $\text{جتا } \frac{٧\pi}{٣} = \text{جتا }\left(\frac{٧\pi}{٣} - ٢\pi\right) = \text{جتا } \frac{\pi}{٣} = \frac{١}{٢}$

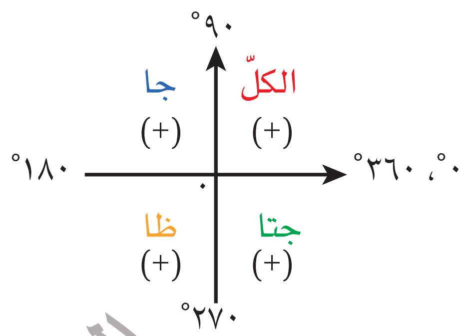
ز) $\text{ظا }\left(-\frac{\pi}{٦}\right) = -\text{ظا } \frac{\pi}{٦} = -\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

ح) $\text{جتا } \frac{١٠\pi}{٣} = -\text{جتا }\left(٢\pi + \frac{٤\pi}{٣}\right) = -\text{جتا } \frac{٤\pi}{٣}$

$= -\text{جتا }\left(\frac{٤\pi}{٣} - \pi\right) = -\text{جتا } \frac{\pi}{٣} = -\frac{١}{٢}$

٣) جا هـ < ٠ تعني أن جاهـ سالب.

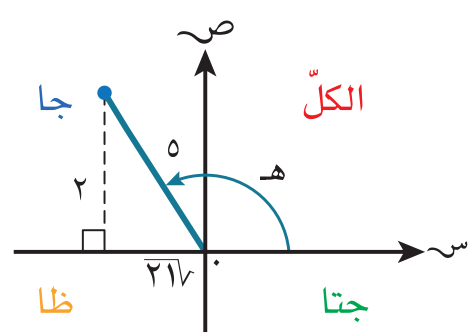
ظا هـ < ٠ تعني أن ظاهـ سالب.



∴ تقع هـ في الربع الرابع.

٤) أ إذا كانت الزاوية هـ منفرجة فإن ٩٠° ≤ هـ ≤ ١٨٠°

أي أنها تقع في الربع الثاني.



استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على

$س^٢ = ٥^٢ - ٢^٢$

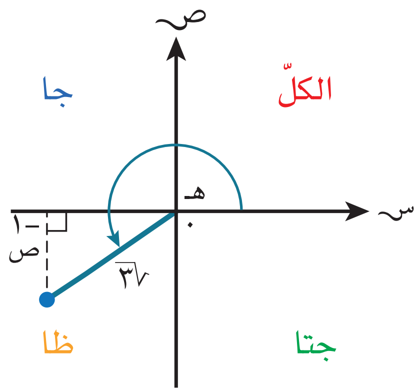
$س = \pm\sqrt{٢١}$

بما أن هـ تقع في الربع الثاني، فإن جتاهـ تكون سالبة

ومن الرسم يكون جتا هـ $= -\frac{\sqrt{٢١}}{٥}$

ب ظا هـ $= -\frac{٢}{\sqrt{٢١}}$

٥) أ تقع الزاوية هـ حيث ١٨٠° ≤ هـ ≤ ٢٧٠° في الربع الثالث. ويكون جاهـ سالبًا.



$ص^٢ + (١)^٢ = (\sqrt{٣})^٢$

$ص^٢ = ٢$

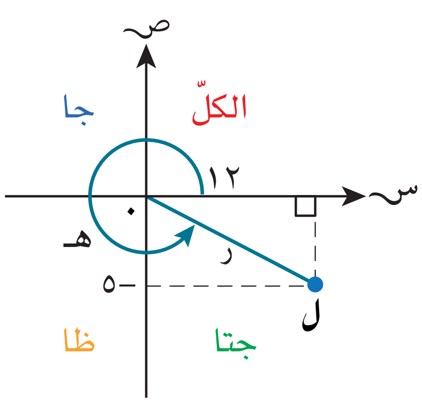
$ص = \pm\sqrt{٢}$ وحيث إن جاهـ < ٠ فيكون

جاهـ $= \frac{-\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} = -\sqrt{\frac{٢}{٣}}$

ب ظاهـ $= \frac{جاهـ}{جتاهـ} = \frac{-\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}}{\frac{-١}{\sqrt{٣}}} = \frac{-\sqrt{٢}}{-١} = \sqrt{٢}$

٦) أ تقع الزاوية هـ حيث ١٨٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠° في الربعَين الثالث والرابع.

∵ الظل موجب في الربع الثالث، فإننا نبحث عن زاوية تقع في الربع الرابع.



$ر^٢ = (٥)^٢ + ١٢^٢$

ر = ± $\sqrt{١٦٩}$

ر = ±١٣، ر > ٠

∴ ر = ١٣

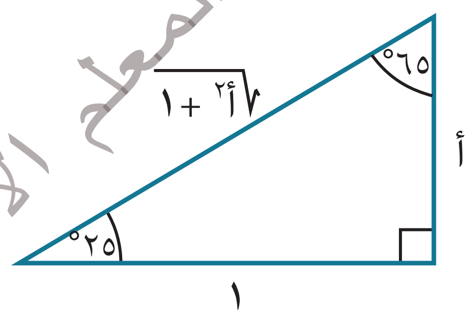
∵ هـ تقع في الربع الرابع

∴ جاهـ = $\frac{-٥}{١٣}$

ب جتاهـ = $\frac{١٢}{١٣}$

٧) **أ** ظا ٢٠٥° = ظا (١٨٠° + ٢٥°) = ظا ٢٥° = أ

استخدم المثلث الآتي للجزئيات (ب)، (ج)، (د):

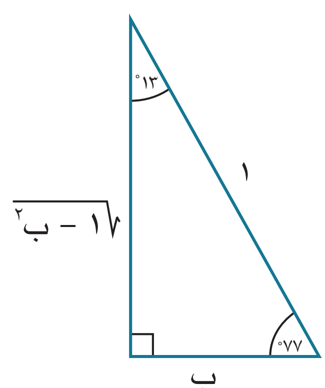


ب جا ٢٥° = $\frac{أ}{\sqrt{أ^{٢} + ١}}$

ج جتا ٦٥° = $\frac{أ}{\sqrt{أ^{٢} + ١}}$

د جتا ٢٤٥° = − جتا ٦٥° = − $\frac{أ}{\sqrt{أ^{٢} + ١}}$

٨) استخدم المثلث الآتي:



أ جا٧٧° = $\sqrt{١ - ب^{٢}}$

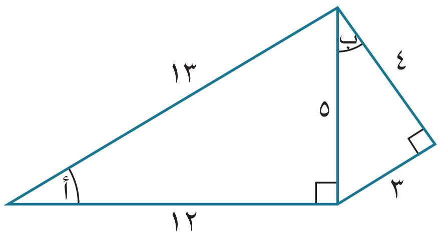
ب ظا ١٣° = $\frac{ب}{\sqrt{١ - ب^{٢}}}$

ج جا ٢٥٧° = جا ٧٧° = − $\sqrt{١ - ب^{٢}}$

د جتا ٣٤٧° = جتا (٣٦٠° − ٣٤٧°)

= جتا ١٣° $\sqrt{١ - ب^{٢}}$

٩) استخدم المثلّثات الآتية:



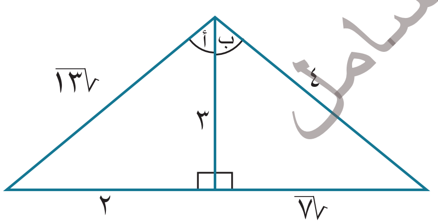
بما أن جا أ > ٠، جتا ب > ٠، فإن كل من أ، ب تقع في الربع الثاني.

∴ جا < ٠ و جتا < ٠، وأيضًا ظا < ٠

أ جتا أ = − $\frac{١٢}{١٣}$ **ب** ظا أ = − $\frac{٥}{١٢}$

ج جا ب = $\frac{٣}{٥}$ **د** ظا ب = − $\frac{٣}{٤}$

١٠) استخدم المثلّثات الآتية:



بما أن ظا أ < ٠، جتا ب < ٠، فإن كل من أ، ب تقع في الربع الرابع.

أ جا أ = − $\frac{٢}{\sqrt{١٣}}$ = − $\frac{٢}{\sqrt{١٣}} \times \frac{\sqrt{١٣}}{\sqrt{١٣}}$ = − $\frac{٢\sqrt{١٣}}{١٣}$

ب جتا أ = $\frac{٣}{\sqrt{١٣}}$ = $\frac{٣}{\sqrt{١٣}} \times \frac{\sqrt{١٣}}{\sqrt{١٣}}$ = $\frac{٣\sqrt{١٣}}{١٣}$

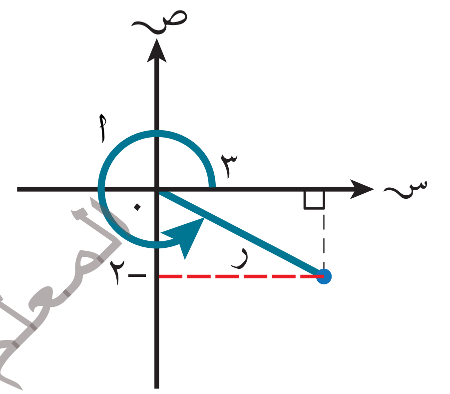
ج جا ب = − $\frac{\sqrt{٧}}{٤}$

د ظا ب = − $\frac{\sqrt{٧}}{٣}$

طريقة أخرى لحل الجزئية (أ):

أ إذا كان ظا أ $= -\frac{٢}{٣}$، جتا ب $= \frac{٣}{٤}$، فإن الزاويتَين تقعان في الربع الرابع.

من الشكل تجد أن ظا أ $= -\frac{٢}{٣}$:



أوجِد ر باستخدام نظرية فيثاغورث:

ر$^٢ = ٣^٢ + (٢)^٢$

ر $= \pm\sqrt{١٣}$

ر $= \sqrt{١٣}$ ، ر دائمًا موجب لأنها تمثل طول القطعة المستقيمة التي تدور حول المركز ٠ وتصنع زاوية مع المحور السيني الموجب.

$\because$ هـ تقع في الربع الرابع، فإن جا هـ < ٠

جا أ $= \frac{-٢}{\sqrt{١٣}}$

(11)

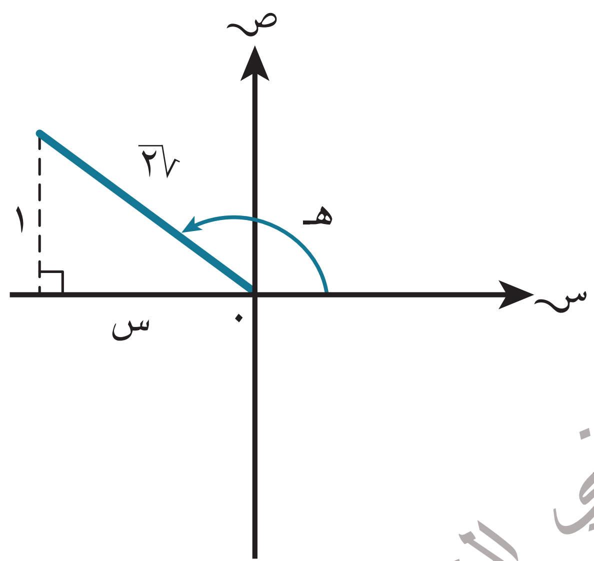
	هـ = ١٢٠°	هـ = ١٣٥° [١]	هـ = ٢١٠°
ظاهـ [٢]	$-\sqrt{٣}$ [٥]	-١	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
جاهـ	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ [٤]	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$-\frac{١}{٢}$
$\frac{١}{\text{جتاهـ}}$	-٢	$-\sqrt{٢}$	$-\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ [٣]

مدخلات الجدول الأصلي باللون الأسود والتكملة باللون الأحمر. نُفّذ الحل بالترتيب المرقم الآتي: [١] أولى خطوات الحل أنّ الترتيب الذي اتّبع ليس هو الوحيد لملء الجدول.

ابدأ بالعمود الأوسط رقم [١]: جاهـ موجب، و $\frac{١}{\text{جتاهـ}}$ سالب أي أن جتاهـ سالب.

وعليه تقع الزاوية في الربع الثاني.

استخدم الشكل الآتي ونظرية فيثاغورث لتجد أن:



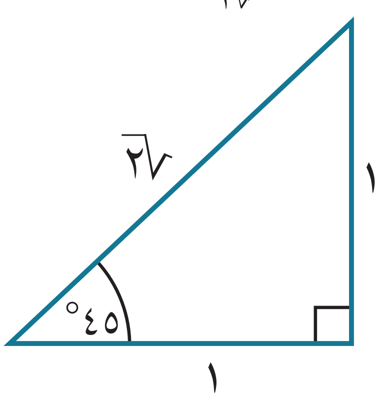
س$^٢ = (\sqrt{٢})^٢ - ١^٢$

س $= \pm ١$، لكن جتاهـ $= -\frac{١}{\sqrt{٢}} < ٠$

جاهـ $= \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\therefore$ هـ تقع في الربع الثاني،

والزاوية التي جيبها $\frac{١}{\sqrt{٢}}$، هي ٤٥°



$\therefore$ هـ $= ١٨٠° - ٤٥° = ١٣٥°$

وعليه يكون رأس العمود [١] هو هـ = ١٣٥° .

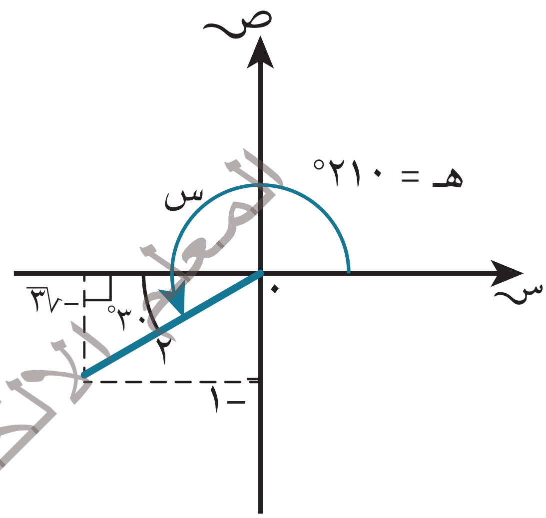
وبما أنه من المثلث، ظا ٤٥° = ١، يكون ظا ١٣٥° = −١

وهكذا نكون قد أوجدنا الخليتَين [١]، [٢].

الآن انظر إلى نهاية العمود الذي رأسه هـ = ٢١٠°

(تقع في الربع الثالث)، سنجد أن جا ٢١٠° = $-\frac{١}{٢}$

من الشكل الآتي:



زاوية الأساس هي ٣٠° (٢١٠° − ١٨٠° = ٣٠°)

استخدم نظرية فيثاغورث فيكون:

س^٢ = ٢^٢ − (١)^٢

= ±$\sqrt{٣}$

هـ تقع في الربع الثالث،

∴ جاهـ < ٠

الزاوية الرئيسية للزاوية ٢١٠° هي ٢١٠° − ١٨٠° = ٣٠°،

جتا٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جتا٢١٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (لأنها تقع في الربع الثالث)

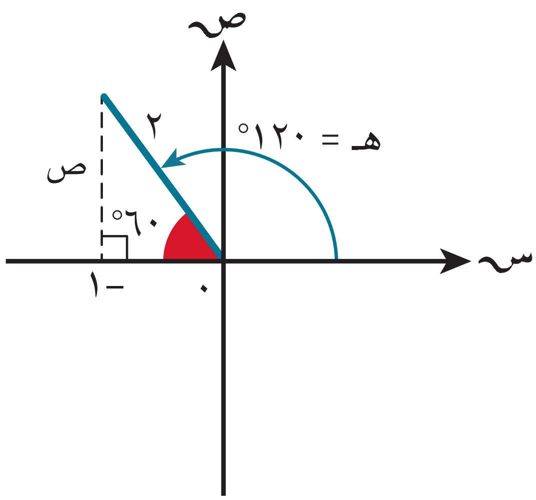
$\frac{١}{\text{جتاهـ}} = \frac{١}{\text{جتا٢١٠°}}$ ، $\frac{١}{-\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ ، $-\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

وهذه الخلية رقم [٣].

من العمود الأول حيث هـ = ١٢٠° والتي تقع في الربع الثاني.

$\frac{١}{\text{جتا١٢٠°}}$ = −٢، وعليه يكون جتا١٢٠° = $-\frac{١}{٢}$

من الشكل الآتي:



زاوية الأساس ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

من نظرية فيثاغورث:

ص^٢ = ٢^٢ − (١)^٢

ص = ±$\sqrt{٣}$، وحيث هـ تقع في الربع الثاني، فإن

جاهـ > ٠ يكون جاهـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ويكون جا١٢٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ وهي الخلية رقم [٤].

ظا ١٢٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{-١}$ = −$\sqrt{٣}$ وهي الخلية رقم [٥].