أ ج = ١٩,٦٣٩٠٨

طريقة بديلة لإيجاد أ ج:

أ′² = ب′² + جـ′² − ٢ب′ جـ′ جتا أ

عوّض القيم في المعادلة لتحصل على:

$$\text{أ ج} = \sqrt{٢٠٠ - ٢٠٠ \text{ جتا}\left(\left(\frac{٢ - \pi}{٣}\right) - \pi\right)}$$

$$\text{أ ج} = \sqrt{٢٠٠ - ٢٠٠ \text{ جتا}\left(\frac{٢ + \pi ٢}{٣}\right)}$$

أ ج = $\sqrt{٢٠٠ - ٢٠٠ \text{ جتا}(-٠,٩٢٨٤٥٧)}$ = ١٩,٦٣٩

(لكن هذه الطريقة قد تؤدي إلى خطأ إذا لم تنتبه جيدًا أثناء الحلّ)

محيط المثلّث أ ب ج

= ٢٠ + ١٩,٦٣٩ + ٣,٧٨٢

= ٤٣,٤ سم (لأقرب ٣ أرقام معنوية).

تمارين ١-٣

١) أ نصف القطر ١٢ سم، وقياس الزاوية $\frac{\pi}{٦}$

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق² × هـ^{ء}

= $\frac{١}{٢} \times (١٢)^{٢} \times \frac{\pi}{٦}$

= ١٢ π سم²

ب المساحة = $\frac{١}{٢} \times ١٠^{٢} \times \frac{\pi ٢}{٥}$ = ٢٠ π سم²

ج المساحة = $\frac{١}{٢} \times \left(\frac{٩}{٢}\right)^{٢} \times \frac{\pi ٢}{٩} = \frac{\pi ٩}{٤}$ سم²

د المساحة = $\frac{١}{٢} \times ٩^{٢} \times \frac{\pi ٤}{٣}$ = ٥٤ π سم²

٢) أ مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق² × هـ^{ء}

= $\frac{١}{٢} \times (٣٤)^{٢} \times ١,٥$

= ٨٦٧ سم²

ب المساحة = $\frac{١}{٢} \times (٢,٦)^{٢} \times ٠,٩$ = ٣,٠٤٢ سم²

٣) أ نصف القطر ٤ سم، والمساحة ٩ سم²

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق² × هـ^{ء}،

٩ = $\frac{١}{٢} \times ٤^{٢} \times$ هـ

هـ = ١,١٢٥^{ء}

ب ٢٧ = $\frac{١}{٢} \times ٦^{٢} \times$ هـ

هـ = ٢٧ ÷ $\left(\frac{١}{٢} \times ٦^{٢}\right)$ = ١,٥^{ء}

٤) أ طول القوس = نق × هـ^{ء}

١٠ = ٨ هـ

هـ = ١,٢٥^{ء}

ب مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق² × هـ^{ء}

= $\frac{١}{٢} \times ٨^{٢} \times ١,٢٥$

= ٤٠ سم²

٥) أ طول القوس = نق هـ^{ء}

٧ = ٤هـ

هـ = $\frac{٧}{٤}$ = ١,٧٥^{ء}

وعليه، فإن ق(∠ل م ع) = ١,٧٥^{ء}

ب المثلث ل م سـ قائم الزاوية (الزاوية محصورة بين مماس ونصف قطر الدائرة ٩٠°).

الزاوية ل م سـ تساوي $\frac{١,٧٥}{٢}$ = ٠,٨٧٥^{ء}

استخدم حساب المثلّثات لتحصل على:

ظا ٠,٨٧٥ = $\frac{\text{ل سـ}}{٤}$

ل سـ = ٤ × ظا ٠,٥٧٨

تذكر أن تضع الحاسبة بوضعية الراديان (rad mode).

المعلم الإلكتروني الشامل

ل سـ = ٤,٧٩ سم (لأقرب ٣ أرقام معنوية).

ج مساحة المنطقة المظلّلة =

مساحة م ل سـ ع – مساحة القطاع الدائري م ل ع

استخدم مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × هـ^{ء}

المساحة المظلّلة =

٢ × مساحة المثلّث م ل سـ – مساحة القطاع الدائري ع م ل

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤,٧٩ – $\frac{١}{٢}$ × ٤^{٢} × ١,٧٥

= ٥,١٦ سم^{٢} (لأقرب ٣ أرقام معنوية).

٦) مساحة المنطقة المظلّلة =

مساحة Δ م ف ر – مساحة القطاع م ل ر

استخدم مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

ومساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × هـ^{ء}

لتجد مساحة المثلث م ف ر، أوجد أولًا طول القطعة المستقيمة $\overline{\text{ر ف}}$

Δ م ف ر قائم الزاوية عند ر

ظا (ر $\hat{\text{م}}$ ف) = $\frac{\text{ر ف}}{٨}$

ظا $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{\text{ر ف}}{٨}$ (استخدم الراديان)

$\frac{\text{ر ف}}{٨}$ = $\sqrt{٣}$

ر ف = ٨ $\sqrt{٣}$

لا تحسب هذه القيمة لأن السؤال يطلب القيمة الدقيقة.

مساحة المنطقة المظلّلة =

$\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٨ $\sqrt{٣}$ – $\frac{\pi}{٣}$ × ٨^{٢} × $\frac{١}{٢}$ = $\left(\frac{\pi ٣٢}{٣} - ٣٢\sqrt{٣}\right)$ سم^{٢}

٧) أ الزاويتان م ب ل، م أ ل قائمتان (الزاوية محصورة بين المماس ونصف القطر).

ق(ل $\hat{\text{م}}$ أ) = $\frac{\pi}{٦}$

استخدم المثلث ل م أ لتجد أن: ظا $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{\text{أ ل}}{٥}$

أ ل = ٥ ظا $\frac{\pi}{٦}$ (استخدم وضعية الراديان على الحاسبة)

أ ل = $\frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$ سم

ب مساحة المنطقة المظلّلة = مساحة الشكل

أ ل ب م – مساحة القطاع الدائري أ م ب

= ٢ × مساحة المثلث ل أ م – مساحة القطاع الدائري أ م ب

استخدم مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

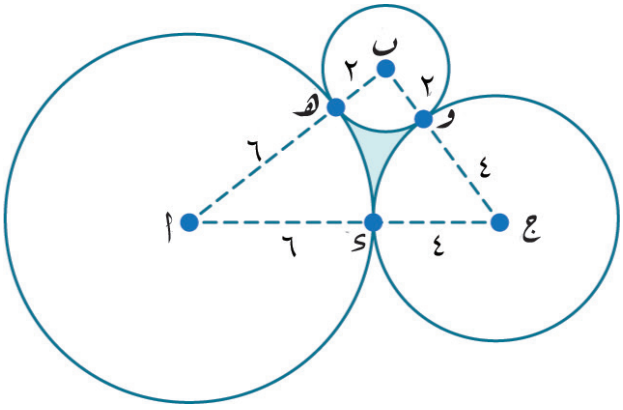
مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × هـ^{ء}

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٥ × $\frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$ – $\frac{١}{٢}$ × ٥^{٢} × $\frac{\pi}{٣}$

= $\frac{٢٥\sqrt{٣}}{٣}$ – $\frac{٢٥\pi}{٦}$

= $\frac{٢٥}{٦}$ (٢$\sqrt{٣}$ – π) سم^{٢}

٨) سمّ الشكل بالأحرف أ، ب، ج، ء، هـ، و



المعلم الإلكتروني الشامل

$ق(\widehat{أ ب ج}) = ٩٠°$

تحقّق باستخدام نظرية فيثاغورث

$(أ ج)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب ج)^٢$

$١٠^٢ = ٨^٢ + ٦^٢$

$١٠٠ = ٦٤ + ٣٦$

$١٠٠ = ١٠٠$

$ظا(ب\widehat{أ ج}) = \frac{٦}{٨}$

$ق(ب\widehat{أ ج}) = ٠,٦٤٣٥٠١^ء$

$ق(ب\widehat{ج أ}) = \pi - \frac{\pi}{٢} - ٠,٦٤٣٥٠١$

$= ٠,٩٢٧٢٩٥^ء$

مساحة القطاع الدائري $ء أ هـ = \frac{١}{٢} نق^٢ \times هـ^ء$

مساحة القطاع الدائري $ء أ هـ = \frac{١}{٢} \times ٦^٢ \times ٠,٦٤٣٥٠١$

$= ١١,٥٨٣٠١$ سم^٢

مساحة القطاع الدائري $و ج ء = \frac{١}{٢} نق^٢ \times هـ^ء$

مساحة القطاع الدائري $و ج ء = \frac{١}{٢} \times ٤^٢ \times ٠,٩٢٧٢٩٥$

$= ٧,٤١٨٣٦$ سم^٢

مساحة القطاع الدائري $هـ ب و = \frac{١}{٢} نق^٢ \times هـ^ء$

مساحة القطاع الدائري $هـ ب و = \frac{١}{٢} \times ٢^٢ \times \frac{\pi}{٢}$

$= \pi$ سم^٢

مساحة القطاعات الدائرية الثلاثة

$= ١١,٥٨٣٠١ + ٧,٤١٨٣٦ + \pi$

$= ٢٢,١٤٢٩٧$ سم^٢

مساحة المثلث $أ ب ج = \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٦$

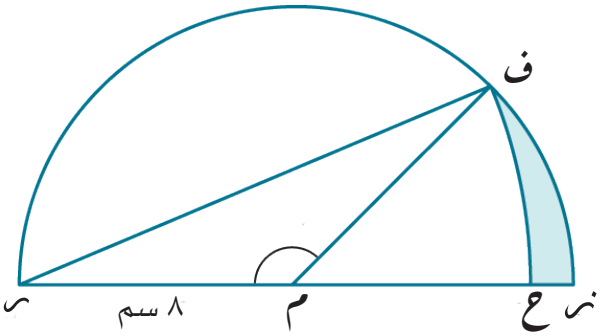
$= ٢٤$ سم^٢

مساحة المنطقة المظلّلة $= ٢٤ - ٢٢,١٤٢٩٧$

$= ١,٨٥٧٠٢$

$= ١,٨٦$ سم^٢ (لأقرب ٣ أرقام معنوية)

٩)



انتبه! طول م ح ليس ٨ سم.

أ استخدم مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} أ' \times ب' \times جا ج$

مساحة المثلث م ر ف $= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٨ \times جا ٢$

(استخدم وضعية الراديان (rad mode) على الحاسبة)

$= ٢٩,٠٩٧٥١$ سم^٢

$= ٢٩,١$ سم^٢ (لأقرب ٣ أرقام معنوية).

ب مساحة القطاع الدائري ف م ر

$= \frac{١}{٢} نق^٢ \times هـ^ء$

$= \frac{١}{٢} \times ٨^٢ \times (٢ - \pi)$

$= ٣٦,٥٣٠٩٦$

$= ٣٦,٥$ سم^٢ (لأقرب ٣ أرقام معنوية).

ج نصف قطر القطاع الدائري ف ر ح هو ر ح.

استخدم قانون جيب التمام:

$أ'^٢ = ب'^٢ + ج'^٢ - ٢ ب' ج' جتا أ$ لتجد قيمة ر ف

$(ر ف)^٢ = ٨^٢ + ٨^٢ - ٢ \times ٨ \times ٨ \times جتا ٢$

(استخدم وضعية الراديان (rad mode) على الحاسبة).

المعلم الإلكتروني للتأهيل

ر ف = $\sqrt{١٨١,٢٦٦٧٩}$

ر ف = ١٣,٤٦٣٥٣

المثلث ر م ف متطابق الضلعَين م ر = م ف

ق(∠ر ف) = $\frac{\pi - ٢}{٢}$ ˚

مساحة القطاع الدائري ف ر ع = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × هـ˚

= $\frac{١}{٢}$ × (١٣,٤٦٣٥٣)^{٢} × $\left(\frac{\pi - ٢}{٢}\right)$

= ٥١,٧٣٣٢١

= ٥١,٧ سم^{٢} (لأقرب ٣ أرقام معنوية)

د مساحة المنطقة المظلّلة

= مساحة القطاع ف م ر − مساحة ف م ع

مساحة ف م ع = مساحة القطاع الدائري

ف ر ع − مساحة المثلث ر م ف

= ٥١,٧٣٣٢١ − ٢٢,٦٣٥٧

= ٢٢,٦٣٥٧ سم^{٢}

مساحة المنطقة المظلّلة

= ٣٦,٥٣٠٩٦ − ٢٢,٦٣٥٧

= ١٣,٨٩٥٢٦

= ١٣,٩ سم^{٢} (لأقرب ٣ أرقام معنوية)

١٠) أ الزاوية م ر و قائمة (قياس الزاوية بين نصف قطر الدائرة والمماس ٩٠˚)

م ع = ع و

استخدم المثلث م ر و مع نظرية فيثاغورث لتجد أن:

(ر و)^{٢} = (٢ نق)^{٢} − نق^{٢}

(ر و)^{٢} = ٣ نق^{٢}

(ر و) = $\sqrt{٣}$ نق سم

استخدم المثلث ر م و، ثم أوجد جيب تمام الزاوية

جتا (∠ر م و) = $\frac{\text{نق}}{٢\text{نق}}$ = $\frac{١}{٢}$

ق (∠ر م و) = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = $\frac{\pi}{٣}$

المحيط ل = طول القوس ع ر + ع و + ر و

ل = نق × $\frac{\pi}{٣}$ + نق + $\sqrt{٣}$ نق

ل = $\frac{\text{نق}}{٣}$ (٣ + ٣$\sqrt{٣}$ + π)

ب استخدم مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث م ر و = $\frac{١}{٢}$ × ر و × م ر

= $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٣}$ نق × نق

= $\frac{\sqrt{٣}\text{نق}^{٢}}{٢}$ سم^{٢}

مساحة القطاع الدائري م ر ع = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × هـ˚

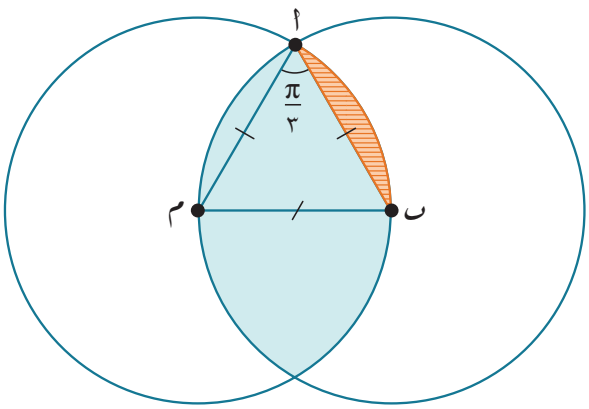
= $\frac{١}{٢}$ × نق^{٢} × $\frac{\pi}{٣}$

= $\frac{\pi\text{نق}^{٢}}{٦}$

مساحة المنطقة المظلّلة = $\frac{\pi\text{نق}^{٢}}{٦}$ − $\frac{\sqrt{٣}\text{نق}^{٢}}{٢}$

= $\frac{\text{نق}^{٢}}{٦}$ (π − ٣$\sqrt{٣}$)

١١) سمّ الشكل م ب أ:



المثلث م أ ب متطابق الأضلاع حيث

المعلم الإلكتروني الشامل

م أ = أ ب = م ب

ق(م أ ب) = $\frac{\pi}{٣}$

مساحة المثلث م أ ب

= $\frac{١}{٢}$ × ب أ × م أ × جا (م أ ب)

= $\frac{١}{٢}$ × نق × نق × $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

= $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ نق^{٢}

مساحة القطاع الدائري أ م ب = $\frac{١}{٢}$ × نق^{٢} × هـ

= $\frac{١}{٢}$ × نق^{٢} × $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{\pi نق^{٢}}{٦}$

مساحة القطعة الدائرية

= مساحة القطاع الدائري (أ م ب) − مساحة المثلث م أ ب

= $\frac{\pi نق^{٢}}{٦}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ نق^{٢} سم^{٢}

(مبيّنة في المنطقة المظللة بالبرتقالي في الرسم)

لا تخلط بين القطاع الدائري والقطعة الدائرية.

المنطقة المظلّلة المطلوبة

= ٢ × مساحة Δ م أ ب + ٤ × مساحة القطعة الدائرية

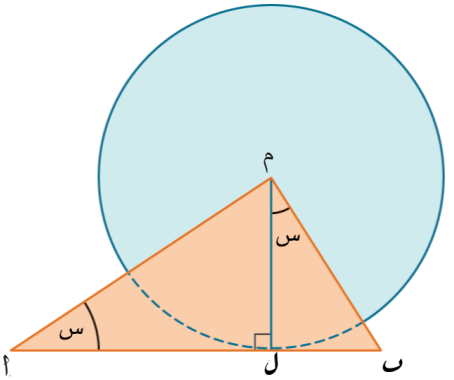
= ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ نق^{٢} + ٤ × $\left(\frac{\pi نق^{٢}}{٦} - \frac{\sqrt{٣}}{٤} نق^{٢}\right)$

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نق^{٢} + $\frac{٢\pi نق^{٢}}{٣}$ − $\sqrt{٣}$ نق^{٢}

= $\frac{٢\pi نق^{٢}}{٣}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نق^{٢} سم^{٢}

١٢) أ الزاوية م ل أ قائمة (لأنها زاوية محصورة بين مماس ونصف قطر دائرة).

ق(ل م ب) = س



من Δ أ م ل، ظا س = $\frac{١}{أ ل}$

أ ل = $\frac{١}{ظا س}$

باستخدام المثلث ب م ل، ظا س = $\frac{ب ل}{١}$

ب ل = ظا س

وحيث إن، أ ب = أ ل + ل ب

فإن أ ب = ظا س + $\frac{١}{ظا س}$ سم

ب مساحة المنطقة المظلّلة باللون الأزرق

= $\frac{١}{٢}$ × ١^{٢} × $\frac{\pi ٣}{٢}$

= $\frac{\pi ٣}{٤}$ سم^{٢}

مساحة المنطقة المظلّلة باللون البرتقالي

= $\frac{١}{٢}$ × أ ب × م ل

= $\frac{١}{٢}$ $\left(ظا س + \frac{١}{ظا س}\right)$ × ١

= $\frac{١}{٢}$ $\left(ظا س + \frac{١}{ظا س}\right)$

وحيث إن مساحتَي المنطقتَين متساويتان فإن:

$\frac{١}{٢}$ $\left(ظا س + \frac{١}{ظا س}\right)$ = $\frac{\pi ٣}{٤}$

المعلم الإلكتروني الشامل

$$٢ \text{ ظا س} + \frac{٢}{\text{ظا س}} = ٣\pi$$

$$٢ \text{ ظا}^{٢}\text{س} + ٢ = ٣\pi \text{ ظا س}$$

$$٢ \text{ ظا}^{٢}\text{س} - ٣\pi \text{ ظا س} + ٢ = ٠$$

افترض ص = ظا س

فيكون، $٢\text{ص}^{٢} - ٣\pi\text{ص} + ٢ = ٠$

بالمقارنة مع $أ\text{ص}^{٢} + ب\text{ص} + ج = ٠$،

يكون أ = ٢، $ب = -٣\pi$، ج = ٢

$$\text{ص} = \frac{-(-٣\pi) \pm \sqrt{(-٣\pi)^{٢} - ٤(٢)(٢)}}{(٢)٢}$$

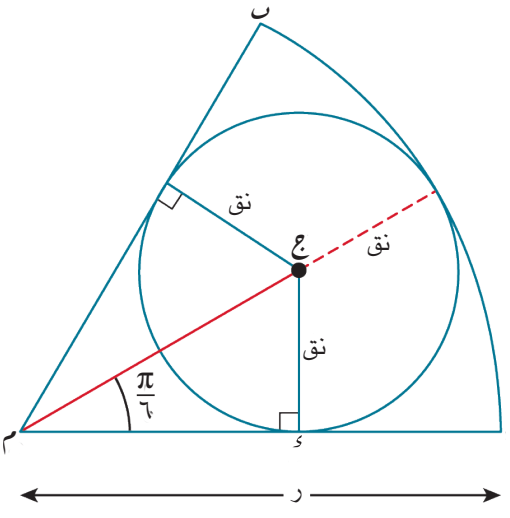
ص = ٤,٤٨٩٦٥ أو ٠,٢٢٢٧٣

ويكون ظا س = ٤,٤٨٩٦٥ أو ظا س = ٠,٢٢٢٧٣

وعليه، س = ١,٣٥١٦٤°

أو س = ٠,٢١٩١٥°

(١٣) أ



الزاوية م ء ج قائمة (لأنها محصورة بين مماس ونصف قطر الدائرة).

باستخدام المثلث م ج ء نجد أن:

$$\text{جا}\left(\frac{\pi}{٦}\right) = \frac{\text{نق}}{\text{م ج}}$$

$$\text{م ج} = \frac{\text{نق}}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٦}\right)}$$

م ج = ٢نق سم

ر = م ج + نق

ر = ٢نق + نق

ر = ٣نق

ب مساحة الدائرة الداخلية = π نق^{٢}

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ ر^{٢}هـ^{ء}

وعليه، مساحة القطاع الدائري =

$$\frac{١}{٢} \times (٣\text{نق})^{٢} \times \frac{\pi}{٣} = \frac{٣\pi\text{نق}^{٢}}{٢}$$

فيكون، $\frac{\text{مساحة الدائرة الداخلية}}{\text{مساحة الدائرة الخارجية}} = \frac{\pi\text{نق}^{٢}}{\frac{٣\pi\text{نق}^{٢}}{٢}}$

$= \frac{٢}{٣}$

المعلم الإلكتروني الشامل