الوحدة الثالثة: حلول التمارين
المتتاليات والمتسلسلات

تمارين ٣-١

١) الحدّ النوني (الحدّ العام) = أ + (ن − ١)د

قيمة ن للحدّ الخامس هي ٥، فيكون الحدّ هو

أ + (٥ − ١)د أو أ + ٤د

قيمة ن للحدّ الرابع عشر هي ١٤، فيكون الحدّ هو أ + (١٤ − ١)د أو أ + ١٣د

٢) أ لا نعرف الحدّ الأخير ولكن يمكن أن نجد د بسهولة، ثم نستخدم الصيغة:

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن − ١)د]$

أ =٢، د = ٧، ن = ١٥ فيكون:

$جـ_{١٥} = \frac{١٥}{٢}[٢ \times ٢ + (١٥ − ١) \times ٧]$

$جـ_{١٥} = ٧٦٥$

ب أ = ٢٠، د = −٩، ن = ٢٠

$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}[٢ \times ٢٠ + (٢٠ − ١) \times −٩]$

$جـ_{٢٠} = −١٣١٠$

ج أ = ٨,٥، د = ١,٥، ن = ٣٠

$جـ_{٣٠} = \frac{٣٠}{٢}[٢ \times ٨,٥ + (٣٠ − ١) \times ١,٥]$

$جـ_{٣٠} = ٩٠٧,٥$

٣) أ أوجِد أولًا عدد الحدود مستخدمًا

$ح_ن$ = أ + (ن − ١) د، حيث

أ = ٢٣، د = ٤، ل (الحدّ الأخير) = ١٥٩

$ح_ن$ يساوي ١٥٩ لتجد قيمة ن، استخدم

١٥٩ = ٢٣ + (ن − ١) × ٤

حلّ المعادلة: ١٣٦ = (ن − ١) × ٤

ن − ١ = ٣٤

ن = ٣٥

ولأن قيمة الحدّ الأخير ل معروفة، استخدم الصيغة $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

(الصيغة الأخرى تؤدي إلى الحلّ إلّا أن هذه الصيغة أسرع)

أ = ٢٣، د = ٤، ل = ١٥٩، ن = ٣٥

$جـ_{٣٥} = \frac{٣٥}{٢}(٢٣ + ١٥٩) = ٣١٨٥$

ب أوجِد أولًا عدد الحدود مستخدمًا $ح_ن$ (الحد النوني) = أ + (ن − ١) د، حيث أ = ٢٨، د = −١٧، ل (الحدّ الأخير) = −٢١٠

$ح_ن$ يساوي −٢١٠ لتجد قيمة ن، استخدم

−٢١٠ = ٢٨ + (ن − ١) × (−١٧)

حلّ المعادلة: −٢٣٨ = (ن − ١)(−١٧)

١٤ = ن − ١

ن = ١٥

ولأن قيمة الحدّ الأخير ل معروفة استخدم الصيغة $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

أ = ٢٨، د = −١٧، ل = −٢١٠، ن = ١٥

$جـ_{١٥} = \frac{١٥}{٢}(٢٨ − ٢١٠) = −١٣٦٥$

٤) نعرف أن أ = ٢، ن = ١٢، حـ = ٦١٨

استخدم الصيغة $جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن − ١)د]$ لأنها تتضمن جميع المعطيات إضافة إلى المطلوب د

$٦١٨ = \frac{١٢}{٢}[٢ \times ٢ + ١١د]$

$١٠٣ = ٤ + ١١د$

$٩٩ = ١١د$

$د = ٩$

٥) أ نعرف أن $ح_ن$ (الحد النوني) = $أ + (ن - ١)د$،

والمعطيات هي:

$أ = -١٣$، $ح_{٢٠} = ٨٢$ ، فيكون:

$٨٢ = -١٣ + (ن - ١)د$

حلّ المعادلة: $٩٥ = ١٩د$

$د = ٥$

الآن أوجِد عدد الحدود مستخدمًا الحدّ الأخير

$= ١١٢$، $أ = -١٣$، $د = ٥$

$١١٢ = -١٣ + (ن - ١) \times ٥$

$٢٥ = ن - ١$

$ن = ٢٦$

ب لأن الحدّ الأخير معطى، استخدم الصيغة

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل)، حيث $أ = -١٣$

$د = ٥$، $ل = ١١٢$، $ن = ٢٦$

$جـ_{٢٦} = \frac{٢٦}{٢}$ (-١٣ + ١١٢)

$جـ_{٢٦} = ١٢٨٧$

٦) نعرف أن $أ = ٧٥$، $د = -٢٩$،

والحدّ النوني هو -٢١٥

المطلوب إيجاد عدد الحدود. استخدم الصيغة

$جـ_ن = أ + (ن - ١)د$

$-٢١٥ = ٧٥ + (ن - ١) \times (-٢٩)$

$-٢٩٠ = -٢٩ (ن - ١)$

$١٠ = ن - ١$

$ن = ١١$

ولأن الحدّ الأخير معروف، ولتجد مجموع الحدود

استخدم الصيغة $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

حيث $أ = ٧٥$، $ل = -٢١٥$، $ن = ١١$

$جـ_{١١} = \frac{١١}{٢}(٧٥ - ٢١٥)$

$جـ_{١١} = -٧٧٠$

٧) نعرف أن $أ = ٨$، الحدّ الأخير $= ٣٤$، $جـ_٦ = ٥٨$

$ن = ٦$

استخدم الصيغة $جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$

$جـ_٦ = \frac{٦}{٢}[٢ \times ٨ + (٦ - ١)د]$

$٥٨ = \frac{٦}{٢}[٢ \times ٨ + (٦ - ١)د]$

$\frac{٥٨}{٣} = ١٦ + ٥د$

$\frac{١٠}{٣} = ٥د$

$د = \frac{٢}{٣}$

لأن الحدّ الأخير معطى $= ٣٤$، استخدم صيغة الحدّ

الأخير $= أ + (ن - ١)د$

حيث $أ = ٨$، $د = \frac{٢}{٣}$

$٣٤ = ٨ + (ن - ١) \times \frac{٢}{٣}$

$٢٦ = (ن - ١) \times \frac{٢}{٣}$

$ن - ١ = ٣٩$

$ن = ٤٠$

٨) استخدم الحدّ العام $= أ + (ن - ١)د$، تعلم أن $أ = ٧$،

$ح_{١١} = ٣٢$، $ن = ١١$

$٣٢ = ٧ + (١١ - ١)د$

$٢٥ = ١٠د$

$د = ٢,٥$

الآن استخدم الصيغة $جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$،

حيث $جـ = ٢٧٩٠$، $ن = ؟$، $أ = ٧$، $د = ٢,٥$

$٢٧٩٠ = \frac{ن}{٢}[١٤ + (ن - ١) \times ٢,٥]$ اضرب طرفَي

المعادلة في ٢ وفكّ الأقواس لتحصل على:

$٥٥٨٠ = ن(١٤ + ٢٥ن - ٢,٥)$

٥٥٨٠ = ن(٥ , ١١ + ٢,٥ن) اضرب الطرفَين في ٢

وفكّ الأقواس لتحصل على: ١١١٦٠ = ٢٣ن + ٥ن^{٢}

حلّ المعادلة، لتحصل على ن = ٤٥ أو ن = −٤٩,٦.

الحلّ الثاني مرفوض لأن ن يجب أن يكون عددًا صحيحًا موجبًا.

وعليه ن = ٤٥

٩) أ الحدّ الثامن = −١٠، مجموع أول ٢٠ حدًّا هو −٣٥٠، والمطلوب إيجاد أ، د

استخدم صيغة الحد العام = أ + (ن − ١)د

−١٠ = أ + (٨ − ١)د لنحصل على المعادلة بدلالة أ، د

−١٠ = أ + ٧د ..... (١)

الآن استخدم صيغة المجموع

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د]،

نعلم أن جـ = −٣٩٠، ن = ٢٠

−٣٢٠ = $\frac{٢٠}{٢}$ (٢أ + ١٩د)

−٣٥ = ٢أ + ١٩د ..... (٢)

حلّ المعادلتَين −٣٥ = ٢أ + ١٩د،

−١٠ = أ + ٧د آنيًّا.

اضرب المعادلة (١) −١٠ = أ + ٧د في ٢، ثم اطرحها من (٢)

−٣٥ = ٢أ + ١٩د

− ٢٠ = ٢أ + ١٤د

تحصل على : −١٥ = ٥د

د = −٣

عوّض عن د = −٣ في المعادلة

−١٠ = أ + ٧(−٣)، فيكون أ = ١١

ب تعلم أن أ = ١١، د = −٣، الحد النوني هو −٩٧ والمطلوب إيجاد ن

استخدم صيغة الحد العام = أ + (ن − ١)د

−٩٧ = ١١ + (ن − ١) × (−٣)

−١٠٨ = −٣(ن − ١)

٣٦ = ن − ١

ن = ٣٧

١٠) جـ$_{ن}$ = ٤ ن^{٢} + ٢ن، وصيغة المجموع =

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د]

فكّ الأقواس في الصيغة العامة لتحصل على:

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د] = أن + $\frac{١}{٢}$دن^{٢} − $\frac{١}{٢}$دن

وهذه تساوي جـ$_{ن}$ = ٤ن^{٢} + ٢ن بمقارنة المقدارَين تحصل على: $\frac{١}{٢}$دن^{٢} = ٤ن^{٢}، $\frac{١}{٢}$د = ٤ أي أن د = ٨

قارن الأجزاء التي تتضمن ن لتحصل على:

أن − $\frac{١}{٢}$ × ٨ن = ٢ن، وعليه يكون أن = ٦ن،

ومنها أ = ٦

١١) جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د] = أن + $\frac{١}{٢}$دن^{٢} − $\frac{١}{٢}$دن

وهذا المقدار يساوي جـ$_{ن}$ = −٣ن^{٢} − ٢ن، قارن الأجزاء التي تتضمن ن^{٢} لتحصل على:

$\frac{١}{٢}$دن^{٢} = −٣ن^{٢}، ويكون $\frac{١}{٢}$د = −٣، ومنها د = −٦

قارن الأجزاء التي تتضمن ن لتحصل على:

$\frac{١}{٢}$ × (−٦)ن = −٢ن، فيكون أن = −٥ن، ومنها أ = −٥

١٢) جـ$_{١}$ = أ = $\frac{١}{١٢}$(٤ + ٥) = $\frac{٣}{٤}$

جـ$_{٣}$ = أ + أ + د = $\frac{٣}{٢}$ + د

جـ$_{٣}$ = $\frac{٢}{١٢}$(٨ + ٥) = $\frac{١٣}{٦}$، وبالتالي $\frac{٣}{٢}$ + د = $\frac{١٣}{٦}$، د = $\frac{٢}{٣}$

الحد النوني = أ + (ن − ١)د

$= \frac{٣}{٤} + \frac{٢}{٣}$(ن − ١)

$= \frac{٢}{٣}$ ن + $\frac{١}{١٢}$

١٣) قسّمت الدائرة إلى ١٢ قطاعًا فيكون ن = ١٢،

أ = قياس زاوية القطاع الأول، القطاع الثاني عشر يساوي ٦,٥أ، ومجموع قياسات الزوايا جميعها يساوي ٣٦٠

المطلوب إيجاد الحدّ الأول أ.

نعرف أن الحدّ الأخير ل بدلالة أ، لذا استخدم الصيغة

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$(أ + ل)

٣٦٠ = (٦,٥أ)

٦٠ = ٦,٥أ

أ = ٨

وعليه، قياس زاوية أصغر قطاع دائري هي °٨

١٤) أ جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د].

جـ$_{٢٥}$ = $\frac{٢٥}{٢}$ (٢أ + ٢٤د) = ٢٥أ + ٣٠٠د

جـ$_{٤}$ = $\frac{٤}{٢}$ (٢أ + ٣د) = ٤أ + ٦د

مُعطى، جـ$_{٢٥}$ = ٧ جـ$_{٤}$، فيكون

٢٥أ + ٣٠٠د = ٧(٤أ + ٦د)

٢٥٨ = ٣أ

أ = ٨٦د

ب أ = ٨٦ د

الحدّ النوني = أ + (ن − ١)د

ح$_{٥٥}$ = أ + ٥٤د = ٨٦د + ٥٤ × د = ١٤٠د

١٥) الحدّ النوني = أ + (ن − ١)د

ح$_{٨}$ = أ + ٧د

ح$_{٣}$ = أ + ٢د

أ + ٧د = ٣(أ + ٢د)

أ + ٧د = ٣أ + ٦د

د = ٢أ

الآن استخدم الصيغة جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د].

جـ$_{٨}$ = $\frac{٨}{٢}$(٢أ + ٧د) = ٨أ + ٢٨د، و كذلك

د = ٢أ، فيكون جـ$_{٨}$ = ٤د + ٢٨د = ٣٢د

جـ$_{٤}$ = $\frac{٤}{٢}$ (٢أ + ٣د) + ٤أ + ٦د، و كذلك د = ٢أ،

فيكون جـ$_{٤}$ = ٢د + ٦د = ٨د

جـ$_{٨}$ = ٣٢د = ٤ × ٨د

وبالتالي جـ$_{٨}$ = ٤ × جـ$_{٤}$ وهو المطلوب

١٦) جـ$_{٣١}$ = ١٥٥٠٠، أ = ١٤٠، ن = ٣١

جـ$_{٣١}$ = $\frac{٣١}{٢}$[٢ × ١٤٠ + (٣١ − ١)د]

١٥٥٠٠ = $\frac{٣١}{٢}$(٢ × ١٤٠ + (٣١ − ١)د)

٣١٠٠٠ = ٣١(٢ × ١٤٠ + (٣١ − ١)د)

١٠٠٠ = ٢٨٠ + ٣٠د

٧٢٠ = ٣٠د

د = ٢٤

بعد عشرة أشهر يكون إجمالي الإنفاق هو:

جـ$_{١٠}$ = $\frac{١٠}{٢}$(٢ × ١٤٠ + (١٠ − ١)٢٤) = ٢٤٨٠

إجمالي المبلغ المتبقي: ١٥٥٠٠ − ٢٤٨٠

= ١٣٠٢٠ ريالًا عُمانيًا

١٧) جـ$_{١٦}$ = ٨٠٠٠

الدفعة الأولى = ٢٠٠

الدفعة الخامسة = ٢٠٠ + ٤ د

استخدم جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د]

٨٠٠٠ = $\frac{١٦}{٢}$[٢ × ٢٠٠ + (١٦ − ١)د]

٨٠٠٠ = ٨[٤٠٠ + ١٥د]

٦٠٠ = ١٥د

د = ٤٠

الدفعة الخامسة = ٢٠٠ + ٤ × ٤٠

= ٣٦٠ ريالًا عُمانيًا

١٨) ٤٠٠، ٣٧٥، ٣٥٠، ٣٢٥،...

حدد نوع المتتالية التي تعمل عليها. حسابية: حدّها الأول ٤٠٠ وأساسها −٢٥.

أوجد الحدّ الذي يساوي صفرًا في المتتالية. عندما تصل إلى العدد صفر، توقف عن الإضافة إلى حساب التوفير الخاص بك.

٠ = ٤٠٠ + (ن − ١) × −٢٥

٢٥ (ن − ١) = ٤٠٠

ن − ١ = ١٦

ن = ١٧

جـ$_{١٧}$ = $\frac{١٧}{٢}$ [٢ × ٤٠٠ − (١٧ − ١) × ٢٥] = ٣٤٠٠

استخدم الحدّ الذي يساوي صفرًا في المتسلسلة لتجد المتتالية حتى تصل إليه.

لا لن يحققوا هدف التوفير الذي قرّروه.

علل الإجابة بالتوافق مع سياق المسألة.

١٩) أ ٢٥٠، ٣٠٠، ٣٥٠،...

حدد نوع المتسلسلة التي تعمل عليها. حسابية: حدّها الأول ٢٥٠ وأساسها ٥٠.

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٢٥٠ + (ن − ١) × ٥٠] = ١٥٧٥٠

٢٥٠ن + ٢٥ن^{٢} − ٢٥ن = ١٥٧٥٠

أوجِد معادلة باستخدام مجموع ن حدًّا. حدّها الأول ٢٥٠ وأساسها ٥٠.

٢٥ن^{٢} + ٢٢٥ن − ١٥٧٥٠ = ٠

ن^{٢} + ٩ن − ٦٣٠ = ٠

(ن − ٢١) (ن + ٣٠) = ٠

ن = ٢١ أو ن = −٣٠

أعد الترتيب لتجد معادلة تربيعية بالمتغير ن.

ن = ٢١

٢١ شهرًا

برر قيمة ن بالتوافق مع سياق المسألة.

ب تستغرق ٢١ شهرًا، لذا أوجِد الحدّ الحادي والعشرين (ح$_{٢١}$) في المتتالية.

استخدم إجابة الجزئية (أ) لتجد الحدّ الحادي والعشرين (ح$_{٢١}$).

ل = ٢٥٠ + (٢١ − ١) × ٥٠

ل = ١٢٥٠

١٢٥٠ ريالًا عُمانياً ستكون الدفعة الأخيرة.

برر الإجابة بالتوافق مع سياق المسألة.