تمارين ٦-٣

١) $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{م}}$، اضرب الجهتين بـ $\underline{\text{أ}}^{-1}$ لتحصل على

$\underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{م}}$

إلّا أن $\underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{م}}$ ∴ لدينا $\underline{\text{م}} \times \underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{م}}$

ونحن نعلم أنه لأي مصفوفة $\underline{\text{س}}$:

$\underline{\text{س}} \times \underline{\text{م}} = \underline{\text{م}} \times \underline{\text{س}} = \underline{\text{س}}$

∴ $\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}}^{-1}$

اضرب الجهتين في $\underline{\text{ب}}^{-1}$ لتحصل على

$\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ب}}^{-1} = \underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{ب}}^{-1}$

ولكن $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ب}}^{-1} = \underline{\text{م}}$ ∴ $\underline{\text{ج}} = \underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{ب}}^{-1}$

نجد معكوس المصفوفة $\underline{\text{س}}$ من خلال تبديل العنصرين في الخط المائل الأساسي، وضرب العنصرين المتبقيين في -١، والقسمة على محددة $\underline{\text{س}}$. بالنسبة إلى المصفوفتين $\underline{\text{أ}}$ و $\underline{\text{ب}}$:

$$\underline{\text{أ}}^{-1} = \frac{١}{١٥ - ٠}\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \underline{\text{ب}}^{-1} = \frac{١}{٢ - ٣}\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$∴ \underline{\text{ج}} = \frac{١}{١٥} \times \frac{١}{-١} \times \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{١}{١٥}\begin{pmatrix} ٨ & -٧ \\ -٩ & ٦ \end{pmatrix}$$

يمكننا أيضًا كتابة $\underline{\text{ج}} = \frac{١}{١٥}\begin{pmatrix} -٨ & ٧ \\ ٩ & -٦ \end{pmatrix}$

> تأكد من فهمك للمعادلات الجبرية للمصفوفات،
> لأنها ستكون مفيدة لاحقًا.

٢) أ حتى لا تكون للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$ معكوس يجب أن يكون $\Delta = ٠$

نكتب من صيغة أ، $\Delta = ٢ك - ١٥$

∴ حتى يتحقق شرط $\Delta = ٠$، وجب أن يكون $٢ك - ١٥ = ٠$، أي $ك = \frac{١٥}{٢}$

ب في هذه الحالة، $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$

أولًا $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{م}}$، ثم $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}^{-1}$

$= \underline{\text{م}} \times \underline{\text{أ}}^{-1}$

بما أن $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}^{-1} = \underline{\text{م}}$ ولكل مصفوفة $\underline{\text{س}}$:

$\underline{\text{س}} \times \underline{\text{م}} = \underline{\text{م}} \times \underline{\text{س}} = \underline{\text{م}}$

∴ $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{أ}}^{-1}$، الأمر الذي يعني

أن $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}^{-1} = \underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{أ}}^{-1}$

∴ $\underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}}^{-1} \times \underline{\text{أ}}^{-1}$

نحسب $\underline{\text{أ}}^{-1} = \frac{١}{١٦ - ١٥}\begin{pmatrix} ٨ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$

$$∴ \underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٨ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٨ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧٩ & -٣٠ \\ -٥٠ & ١٩ \end{pmatrix}$$

٣) لتكن المصفوفة المعززة

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٣ & -٢ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ١ & ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ١ & ٢ & ٠ & ٠ & ١ \end{array}\right)$$

ثم باستخدام عمليات الصف التالية

$ص_٣ \leftarrow ص_٣ - ص_١$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٣ & -٢ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ١ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & -٢ & ٤ & -١ & ٠ & ١ \end{array}\right)$$

$ص_٣ \leftarrow ٢ص_٣ + ص_٢$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٣ & -٢ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ١ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٩ & -٢ & ١ & ٢ \end{array}\right)$$

$ص_١ \leftarrow ٤ص_١ - ٣ص_٢$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٤ & ٠ & -١١ & ٤ & -٣ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ١ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٩ & -٢ & ١ & ٢ \end{array}\right)$$

$ص_١ \leftarrow ٩ص_١ + ١١ص_٣$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٣٦ & ٠ & ٠ & ١٤ & -١٦ & ٢٢ \\ ٠ & ٤ & ١ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٩ & -٢ & ١ & ٢ \end{array}\right)$$

ص٢ ← ٩ص٢ − ص٣

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٢٢ & ١٦- & ١٤ & ٠ & ٠ & ٣٦ \\ ٢- & ٨ & ٢ & ٠ & ٣٦ & ٠ \\ ٢ & ١ & ٢- & ٩ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

$ص_١ \frac{١}{٣٦} \leftarrow ص_١$

$ص_٢ \frac{١}{٣٦} \leftarrow ص_٢$

$ص_٣ \frac{١}{٩} \leftarrow ص_٣$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{١١}{١٨} & \frac{٨}{١٨}- & \frac{٧}{١٨} & ٠ & ٠ & ١ \\ \frac{١}{١٨}- & \frac{٤}{١٨} & \frac{١}{١٨} & ٠ & ١ & ٠ \\ \frac{٤}{١٨} & \frac{٢}{١٨} & \frac{٤}{١٨}- & ١ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$ فنحصل على

∴ معكوس المصفوفة هي $\begin{pmatrix} ١١ & ٨- & ٧ \\ ١- & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٤- \end{pmatrix} \frac{١}{١٨} = {}^{١-}أ$

حل آخر:

قاعدة الشطرنج في المصفوفة تقضي بأن تضرب المدخلات بالإشارة الموجبة أو السالبة بالتتالي بدءًا بالموجب في الصف الأول من جهة اليمين، ثم تعكس إلى السالب في الصف الثاني، وهكذا على الشكل:

.... − + − +

.... + − + −

$\begin{pmatrix} ٢- & ٣ & ١ \\ ١ & ٤ & ٠ \\ ٢ & ١ & ١ \end{pmatrix} = أ$ نجد محدد المصفوفة باستخدام

العمود الأول لأنه يحتوي على صفر فتقل العمليات والحسابات.

$(١١) \times ١ + (١ - ٨) \times ١ = |أ|$

$١٨ = ١١ + ٧ =$

نجد المحددات المربعة الصغيرة المناظرة لكل عنصر من عناصر المصفوفة وهي المصفوفة المساند

$$\left|\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} \oplus & \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} \ominus & \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} \oplus \\ \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} \ominus & \begin{vmatrix} ٢- & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} \oplus & \begin{vmatrix} ٢- & ٣ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} \ominus \\ \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} \oplus & \begin{vmatrix} ٢- & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} \ominus & \begin{vmatrix} ٢- & ٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} \oplus \end{array}\right|$$

(المصفوفة المساندة) $\begin{pmatrix} ٤- & ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ & ٨- \\ ٤ & ١- & ١١ \end{pmatrix} =$

تقلب الصفوف إلى أعمدة لتصبح المصفوفة المساندة

$$\begin{pmatrix} ١١ & ٨- & ٧ \\ ١- & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٤- \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ١١ & ٨- & ٧ \\ ١- & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٤- \end{pmatrix} \frac{١}{١٨} = {}^{١-}أ \therefore$$

٤) أ $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٥- & ٢- \end{pmatrix} = أ$

$$\begin{pmatrix} ٧- & ٥- \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \frac{١}{٩} = \begin{pmatrix} ٧- & ٥- \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \frac{١}{١٤ + ٥-} = {}^{١-}أ \therefore$$

ب $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١٢ & ٨- \end{pmatrix} = ب$

$$\begin{pmatrix} ٢- & ١٢ \\ ٣ & ٨ \end{pmatrix} \frac{١}{٥٢} = \begin{pmatrix} ٢- & ١٢ \\ ٣ & ٨ \end{pmatrix} \frac{١}{١٦ + ٣٦} = {}^{١-}ب \therefore$$

ج $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٤- & ٣ \end{pmatrix} = ج$

$$\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٤- & ٣ \end{pmatrix} \frac{١}{٣١} = \begin{pmatrix} ٥- & ٤- \\ ٤ & ٣- \end{pmatrix} \frac{١}{١٥ - ١٦-} = {}^{١-}ج \therefore$$

د $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ١١ & ٨ \end{pmatrix} = د$

$$\begin{pmatrix} ٣ & ١١- \\ ٠ & ٨ \end{pmatrix} \frac{١}{٢٤} = \begin{pmatrix} ٣- & ١١ \\ ٠ & ٨- \end{pmatrix} \frac{١}{٢٤ - ٠} = {}^{١-}د \therefore$$

٥) $\underline{\text{ا}}^{٢} = \begin{pmatrix}١ & ٢\\ ٣ & ٤\end{pmatrix}\begin{pmatrix}١ & ٢\\ ٣ & ٤\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٧ & ١٠\\ ١٥ & ٢٢\end{pmatrix}$

ليكن $\text{ا}^{٢} - \text{ك ا} = \text{ث م}$

أو $\begin{pmatrix}٧ & ١٠\\ ١٥ & ٢٢\end{pmatrix} - \text{ك}\begin{pmatrix}١ & ٢\\ ٣ & ٤\end{pmatrix} = \text{ث}\begin{pmatrix}١ & ٠\\ ٠ & ١\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}٧ & ١٠\\ ١٥ & ٢٢\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{ك} & ٢\text{ك}\\ ٣\text{ك} & ٤\text{ك}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{ث} & ٠\\ ٠ & \text{ث}\end{pmatrix}$

إذا نظرنا إلى العنصر الأول في العمود الثاني، نحصل على الشرط ١٠ − ٢ك = ٠ ما يعني أن ك = ٥

$\therefore \underline{\text{ا}}^{٢} - ٥\underline{\text{ا}} = \begin{pmatrix}٧ & ١٠\\ ١٥ & ٢٢\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}٥ & ١٠\\ ١٥ & ٢٠\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٢ & ٠\\ ٠ & ٢\end{pmatrix} = ٢\begin{pmatrix}١ & ٠\\ ٠ & ١\end{pmatrix}$

ما يعني $\underline{\text{ا}}\,(\underline{\text{ا}} - ٥\underline{\text{م}}) = ٢\,\underline{\text{م}}$

$\therefore \underline{\text{ا}}^{-١} \times \underline{\text{ا}} \times (\underline{\text{ا}} - ٥\underline{\text{م}}) = ٢\underline{\text{ا}}^{-١}\,\text{م}$، لكن بما أن $\underline{\text{ا}}^{-١} \times \underline{\text{ا}} = \underline{\text{م}}$

و $\underline{\text{س}} \times \underline{\text{م}} = \underline{\text{م}} \times \underline{\text{س}} = \underline{\text{س}}$ لأي مصفوفة $\underline{\text{س}}$،

$\underline{\text{ا}} - ٥\underline{\text{م}} = ٢\,\underline{\text{ا}}^{-١}$ أو $\underline{\text{ا}}^{-١} = \frac{١}{٢}(\underline{\text{ا}} - ٥\underline{\text{م}})$

$\therefore \underline{\text{ا}}^{-١} = \frac{١}{٢}\left[\begin{pmatrix}١ & ٢\\ ٣ & ٤\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}٥ & ٠\\ ٠ & ٥\end{pmatrix}\right] = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix}-٤ & ٢\\ ٣ & -١\end{pmatrix} = -\frac{١}{٢}\begin{pmatrix}٤ & -٢\\ -٣ & ١\end{pmatrix}$

عند التفكيك إلى عوامل في المصفوفات، تذكّر أنه يجب كتابة $\underline{\text{ا}}^{٢} + \underline{\text{ك}} \times \underline{\text{ا}}$ على الشكل $\underline{\text{ا}}\,(\underline{\text{ا}} + \underline{\text{ك}} \times \underline{\text{م}})$ بما أن $\underline{\text{ك}}$ هي الوحيدة التي ليست مصفوفة.

٦) أ أولًا، $\underline{\text{ا}}^{٢} = \begin{pmatrix}١ & ٠ & ٢\\ ٢ & ١ & ١\\ ٠ & ١ & ١\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}١ & ٠ & ٢\\ ٢ & ١ & ١\\ ٠ & ١ & ١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١ & ٢ & ٤\\ ٤ & ٢ & ٦\\ ٢ & ٢ & ٢\end{pmatrix}$

ثم $\underline{\text{ا}}^{٣} = \underline{\text{ا}}^{٢}\,\underline{\text{ا}} = \begin{pmatrix}١ & ٢ & ٤\\ ٤ & ٢ & ٦\\ ٢ & ٢ & ٢\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}١ & ٠ & ٢\\ ٢ & ١ & ١\\ ٠ & ١ & ١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٥ & ٦ & ٨\\ ٨ & ٨ & ١٦\\ ٦ & ٤ & ٨\end{pmatrix}$

ب ليكن $\underline{\text{ا}}^{٣} + ٢\underline{\text{ا}} - ٤\,\underline{\text{م}} = \underline{\text{ك}}\,\underline{\text{ا}}^{٢}$
نحسب جهة اليمين من المعادلة،

$\begin{pmatrix}٥ & ٦ & ٨\\ ٨ & ٨ & ١٦\\ ٦ & ٤ & ٨\end{pmatrix} + ٢\begin{pmatrix}١ & ٠ & ٢\\ ٢ & ١ & ١\\ ٠ & ١ & ١\end{pmatrix} - ٤\begin{pmatrix}١ & ٠ & ٠\\ ٠ & ١ & ٠\\ ٠ & ٠ & ١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٣ & ٦ & ١٢\\ ١٢ & ٦ & ١٨\\ ٦ & ٦ & ٦\end{pmatrix}$

بالطريقة نفسها، نرى أن جهة اليسار من هذه المعادلة هي

$$\underline{ك}\,\underline{ا}^{٢} = \begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ١٢ \\ ١٢ & ٦ & ١٨ \\ ٦ & ٦ & ٦ \end{pmatrix} = \underline{ك} \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٢ & ٦ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$$

حتى تصح قيمة العناصر في العمود الأول، نحتاج $\underline{ك} = ٣$

نعوض ك = ٣، فنرى أن $٣\,\underline{ا}^{٢} = \begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ١٢ \\ ١٢ & ٦ & ١٨ \\ ٠ & ٦ & ٦ \end{pmatrix}$

وهو يساوي $\underline{ا}^{٣} + ٢\underline{ا} - ٤\,\underline{م}$

$\therefore \underline{ك} = ٣$

ج) لدينا من الجزء ($\underline{ب}$) أن $\underline{ا}^{٣} - ٣\underline{ا}^{٢} + ٢\underline{ا} - ٤\,\underline{م} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

نعيد كتابتها على الشكل $\underline{ا}\,(\underline{ا}^{٢} - ٣\underline{ا} + ٢\,\underline{م}) = ٤\,\underline{م}$

نكتب $\underline{ا}^{-١}\,\underline{ا}\,(\underline{ا}^{٢} - ٣\underline{ا} + ٢\underline{م}) = ٤\,\underline{ا}^{-١}\,\underline{م}$

باستخدام $\underline{ا}^{-١} \times \underline{ا} = \underline{م}$ و $\underline{س} \times \underline{م} = \underline{م} \times \underline{س} = \underline{س}$ لأي مصفوفة $\underline{س}$، يكون لدينا

$(\underline{ا}^{٢} - ٣\underline{ا} + ٢\underline{م}) = ٤\underline{ا}^{-١}$

$\therefore \underline{ا}^{-١} = \frac{١}{٤}\,(\underline{ا}^{٢} - ٣\underline{ا} + ٢\underline{م})$

عوضًا من حساب الجهة اليسرى مباشرة، سنحلل أولًا إلى عوامل:

$\frac{١}{٤}(\underline{ا}^{٢} - ٣\,\underline{ا} + ٢\,\underline{م}) = \frac{١}{٤}\,(\underline{ا} - \underline{م})\,(\underline{ا} - ٢\,\underline{م})$

$$\underline{ا} - \underline{م} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$$

بالطريقة نفسها $\underline{ا} - ٢\,\underline{م}$

$$= \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٠ & ١ & -١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \underline{ا}^{-١} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٠ & ١ & -١ \end{pmatrix} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & -٢ \\ -٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & -١ & ١ \end{pmatrix}$$

٧) المعطى هو $\underline{ا} \times \underline{ج} \times \underline{ب} = \underline{م}$، سنعيد الترتيب لإيجاد $\underline{ج}$.

نكتب أولًا $\underline{ا}^{-١} = \underline{ا} \times \underline{ج} \times \underline{ب} = \underline{ا}^{-١} \times \underline{م}$

باستخدام $\underline{ا}^{-١} \times \underline{ا} = \underline{م}$ و $\underline{س} \times \underline{م} = \underline{م} \times \underline{س} = \underline{س}$ لأي مصفوفة $\underline{س}$، يكون لدينا $\underline{ج} \times \underline{ب} = \underline{ا}^{-١}$

ثم نكتب $\underline{ج} \times \underline{ب} \times \underline{ب}^{-١} = \underline{ا}^{-١} \times \underline{ب}^{-١}$، والتي يمكن تبسيطها بالطريقة نفسها إلى $\underline{ج} = \underline{ا}^{-١} \times \underline{ب}^{-١}$

لاحظ أنه يمكننا كتابتها على الشكل $\underline{ج} = (\underline{ب} \times \underline{أ})^{-١}$

نحسب $\underline{ب} \times \underline{أ} =$

$$\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & -١ & -١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ٢ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ -٢ & -٢ & -٣ \\ ٤ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$$

باستخدام
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & -٢ & -٢ & -٣ \\ ١ & ٠ & ٠ & ٤ & ٠ & ٢ \end{array}\right)$$

وعمليات الصف التالية: $ص_١ \leftrightarrow ص_٣$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٠ & ٠ & ١ & ٤ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٠ & -٢ & -٢ & -٣ \\ ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٢ & ٠ \end{array}\right)$$

ثم $ص_٢ \leftarrow ٢ص_٢ + ٣ص_١$ فنحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & ٤ & ٠ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٠ & ٨ & -٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٢ & ٠ \end{array}\right)$$

ثم $ص_٣ \leftarrow ٢ص_٣ + ص_٢$ فنحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & ٤ & ٠ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٠ & ٨ & -٤ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ & ١٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

ثم $ص_١ \leftarrow ٥ص_١ - ٢ص_٣$ فنحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -١ & -٤ & -٤ & ٠ & ٠ & ١٠ \\ ٣ & ٢ & ٠ & ٨ & -٤ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ & ١٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

ثم $ص_٢ \leftarrow ٥ص_٢ - ٤ص_٣$ فنحصل على:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -١ & -٤ & -٤ & ٠ & ٠ & ١٠ \\ ٣ & ٢ & -٨ & ٠ & -٢٠ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ & ١٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

بعد ذلك نقسم كل صف لتعطي المصفوفة المحايدة من الجهة اليسرى، فنحصل على:

$$ص_١ \leftarrow \frac{١}{١٠} ص_١$$

$$ص_٢ \leftarrow -\frac{١}{٢٠} ص_٢$$

$$ص_٣ \leftarrow \frac{١}{١٠} ص_٣$$

ونحصل على النتيجة
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{٢}{٢٠} & -\frac{٨}{٢٠} & -\frac{٨}{٢٠} & ٠ & ٠ & ١ \\ -\frac{٣}{٢٠} & -\frac{٢}{٢٠} & \frac{٨}{٢٠} & ٠ & ١ & ٠ \\ \frac{٦}{٢٠} & \frac{٤}{٢٠} & \frac{٤}{٢٠} & ١ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

فتكون النتيجة النهائية

$$\underline{ج} = (\underline{ب} \times \underline{أ})^{-١} = \frac{١}{٢٠} \begin{pmatrix} -٢ & -٨ & -٨ \\ -٣ & -٢ & ٨ \\ ٦ & ٤ & ٤ \end{pmatrix}$$

بما أنه كان لدينا $\underline{ج} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{ب}^{-١}$، كان يمكننا حساب $\underline{أ}^{-١}$، $\underline{ب}^{-١}$ بشكل مستقل. لاحظ أن $\underline{أ}^{-١} \times \underline{ب}^{-١} = (\underline{ب} \times \underline{أ})^{-١}$ تعني أننا كنا بحاجة إلى حساب معكوس مصفوفة واحدة. انتبه جيدًا لرتبة مصفوفاتك عند اعتمادك هذه الملاحظة.

حل آخر:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & -٢ & -٢ & -٣ \\ ١ & ٠ & ٠ & ٤ & ٠ & ٢ \end{array}\right)$$ المصفوفة المعززة

ص$_{١}$ ← ص$_{٣}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & ٤ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٠ & -٢ & -٢ & -٣ \\ ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٢ & ٠ \end{array}\right)$$

ص$_{٢}$ ← ٢ص$_{٢}$ + ٣ص$_{١}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & ٤ & ٠ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٠ & ٨ & -٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ١ & ٢ & ٠ \end{array}\right)$$

ص$_{٣}$ ← ٢ص$_{٣}$ + ص$_{٢}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & ٤ & ٠ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٠ & ٨ & -٤ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ & ١٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

ص$_{١}$ ← ٥ص$_{١}$ − ٢ص$_{٣}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -١ & -٤ & -٤ & ٠ & ٠ & ١٠ \\ ٣ & ٢ & ٠ & ٨ & ٤ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ & ١٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

ص$_{٢}$ ← ٥ص$_{٢}$ − ٤ص$_{٣}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -١ & -٤ & -٤ & ٠ & ٠ & ١٠ \\ ٣ & ٢ & -٨ & ٠ & -٢٠ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ & ١٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

ص$_{١}$ ← $\frac{١}{١٠}$ ص$_{١}$

ص$_{٢}$ ← − $\frac{١}{٢٠}$ ص$_{٢}$

ص$_{٣}$ ← $\frac{١}{١٠}$ ص$_{٣}$

المصفوفة المحددة

$$أ^{-١} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{١}{١٠} & -\frac{٤}{١٠} & -\frac{٤}{١٠} & ٠ & ٠ & ١ \\ -\frac{٣}{٢٠} & -\frac{٢}{٢٠} & -\frac{٨}{٢٠} & ٠ & ١+ & ٠ \\ \frac{٣}{١٠} & \frac{٢}{١٠} & \frac{٢}{١٠} & ١ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{١}{١٠} & -\frac{٤}{١٠} & -\frac{٤}{١٠} & ٠ & ٠ & ١ \\ -\frac{٣}{٢٠} & -\frac{٢}{٢٠} & -\frac{٨}{٢٠} & ٠ & ١ & ٠ \\ \frac{٣}{١٠} & \frac{٢}{١٠} & \frac{٢}{١٠} & ١ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{١}{١٠} & -\frac{٤}{١٠} & -\frac{٤}{١٠} \\ -\frac{٣}{٢٠} & -\frac{٢}{٢٠} & -\frac{٨}{٢٠} \\ \frac{٣}{١٠} & \frac{٢}{١٠} & \frac{٢}{١٠} \end{pmatrix} = أ^{-١} \Leftarrow$$

نأخذ $\frac{١}{٢٠}$ عامل مشترك

$$\begin{pmatrix} -٢ & -٨ & -٨ \\ -٣ & -٢ & ٨ \\ ٦ & ٤ & ٤ \end{pmatrix} \frac{١}{٢٠} = أ^{-١}$$