ب أولًا، $\underline{أ}^{٤} = \underline{أ}^{٢} \times \underline{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٨ \\ -١ & ٠ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٧ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ -١ & ٠ & -١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١٦ \\ -١ & ٠ & -١٥ \\ ١ & ٠ & ١٥ \end{pmatrix}$

لدينا أربع مصفوفات، الأمر الذي يسهّل علينا قليلًا رؤية النمط.

$$\underline{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢^{٢} \\ -١ & ٠ & -١ \times ٢^{٢} \\ ١ & ٠ & ١ \times -٢^{٢} \end{pmatrix}$$

$$\underline{أ}^{٣} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢^{٣} \\ -١ & ٠ & -١ \times ٢^{٣} \\ ١ & ٠ & ١ \times -٢^{٣} \end{pmatrix}$$

$$\underline{أ}^{٤} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢^{٤} \\ -١ & ٠ & -١ \times ٢^{٤} \\ ١ & ٠ & ١ \times -٢^{٤} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \underline{أ}^{ن} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢^{ن} \\ -١ & ٠ & -١ \times ٢^{ن} \\ ١ & ٠ & ١ \times -٢^{ن} \end{pmatrix}$$

يبدو لنا أن صيغة العنصر الأول في المصفوفة هي $٢^{ن}$. يقودنا ذلك إلى معرفة النمط الذي سيظهر في العناصر الأخرى من العمود الأول للمصفوفة $\underline{أ}^{ن}$.

المعلم الإلكتروني الشامل

تمارين ٦-٢

١) أ ليكن $أ = \begin{pmatrix} ٥ & ٨ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

$\Delta = ٥ \times ٢ - ٨ \times ٤ = -٢٢ \neq ٠$

$\therefore \underline{أ}$ غير منفردة.

ب ليكن $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ -٦ & -١٤ \end{pmatrix}$

$\Delta = ٣ \times (-١٤) - (-٦) \times ٧ = ٠$

$\therefore \underline{ب}$ منفردة.

ج ليكن $\underline{ج} = \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$

$\Delta = ١ \times ٠ - (-١) \times ٤ = ٤ \neq ٠$

$\therefore \underline{ج}$ غير منفردة.

٢) حتى تكون $\underline{أ}$ منفردة، وجب أن يكون $\Delta = ٠$.

نستنتج من صيغة $\underline{أ}$ أن:

$\Delta = س \times (س - ٣) - ٤ \times ١ = س^{٢} - ٣س - ٤$

نحلل $س^{٢} - ٣س - ٤ = ٠$ إلى عوامل لنكتب

$(س - ٤)(س + ١) = ٠$

$\therefore$ س $= -١$ أو س $= ٤$ هما بالضبط قيمتا س لتكون المصفوفة أ منفردة.

٣) أولًا، $\Delta = س \times (س + ١) - (-٢) \times ٥ = س^{٢} + س + ١٠$

نلاحظ بعد ذلك أن $س^{٢} + س + ١٠ =$

$$\left(س + \frac{١}{٢}\right)^{٢} + ١٠ - \frac{١}{٤}$$

$\therefore |\underline{ب}| = \left(س + \frac{١}{٢}\right)^{٢} + \frac{٣٩}{٤}$

$\therefore |\underline{ب}| \geq \frac{٣٩}{٤}$ الأمر الذي يعني أن $|\underline{ب}| \neq ٠$ لأيّ قيمة للمتغير س.

٤) $|\underline{ا}| = ٣ \times ٥ - ١ \times ٤ = ١١$،

$|\underline{ب}| = (-١) \times (-٣) - ٢ \times ٦ = -٩$

$\therefore \underline{ا}\,\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٦ & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢١ & -٦ \\ ٢٩ & -١٣ \end{pmatrix}$

$\therefore \Delta(\underline{ا}\,\underline{ب}) = ٢١ \times (-١٣) - (-٦) \times ٢٩ = -٩٩$

$\therefore \Delta(\underline{ا}\,\underline{ب}) = \Delta(\underline{ا}) \times \Delta(\underline{ب})$

$\underline{ب} \times \underline{ا} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ -٣ & ٦ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٦ \\ ١٥ & ٩ \end{pmatrix}$

$\therefore |\underline{ب} \times \underline{ا}| = (-١) \times ٩ - ٦ \times ١٥ = -٩٩$

$\therefore |\underline{ب} \times \underline{ا}| = |\underline{ا}| \times |\underline{ب}|$

٥) أ) ليكن $\underline{ا} = \begin{pmatrix} ٣ & ٣ & ٥ \\ ٣ & ١ & ٤ \\ ٣ & -٥ & ٣ \end{pmatrix}$

$\therefore \Delta = ٣\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ -٥ & ٣ \end{vmatrix} - ٣\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix} + ٥\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix}$

$= ٣(٣ + ٢٠) - ٣(٩ - ١٢) + ٥(-١٥ - ٣) = -١٢$

ب) ليكن $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٧ \\ -٣ & ٠ & -١٣ \\ ٤ & ١١ & ٣٢ \end{pmatrix}$

$\therefore \Delta = ١\begin{vmatrix} ٠ & -١٣ \\ ١١ & ٣٢ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} -٣ & -١٣ \\ ٤ & ٣٢ \end{vmatrix} + ٧\begin{vmatrix} -٣ & ٠ \\ ٤ & ١١ \end{vmatrix}$

$= ١٤٣ - ٢(-٩٦ + ٥٢) + ٧(-٣٣) = ٠$

ج) ليكن $\underline{ج} = \begin{pmatrix} ١ & ٨ & ٦ \\ ٠ & -٨ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ١٢ \end{pmatrix}$

$\therefore \Delta = ١\begin{vmatrix} -٨ & ٠ \\ ٠ & ١٢ \end{vmatrix} - ٨\begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ١٢ \end{vmatrix} + ٦\begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & -٨ \end{vmatrix}$

$= -٩٦ - ٨(٠) + ٦(٠) = -٩٦$

بما أن لهذه المصفوفة أصفارًا فقط أسفل قطر المصفوفة، يصح أيضًا أن نكتب $\Delta = ١ \times (-٨) \times ١٢ = -٩٦$، وهو ضرب العناصر الموجودة على الخط المائل.

٦) نهدف إلى إيجاد قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} أ & أ^{٢} & أ \\ أ^{٣} & -أ & ٠ \\ أ^{٤} & أ^{٢} & أ \end{vmatrix} = أ\begin{vmatrix} -أ & ٠ \\ أ^{٢} & أ \end{vmatrix} - أ^{٣}\begin{vmatrix} ٠ & أ \\ أ^{٢} & أ \end{vmatrix} + أ^{٢}\begin{vmatrix} ٠ & -أ \\ أ^{٤} & أ^{٣} \end{vmatrix}$$

$= -أ^{٣} - أ^{٣} + ٢٠أ^{٣} = ١٦أ^{٣}$

$١٦أ^{٣} = ٢، أ^{٣} = \frac{١}{٨}$ و $أ = \frac{١}{٢}$

٧) أولًا $\Delta = ١\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$

$= ١(-٨) - ٢(-٤) + ٣(-١) = -٣$

بالطريقة نفسها نوجد محدد المصفوفة $\underline{ب}$

$\Delta = ١\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} - ٥\begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} ٠ & ٣ \\ ٠ & -١ \end{vmatrix}$

$= ٠ - ٠ + ٢(-٢-٣) = -١٠$

باستخدام $|\underline{ا} \times \underline{ب}| = |\underline{ا}| \times |\underline{ب}|$

$= (-٣) \times (-١٠) = ٣٠$

يمكنك بالطبع أن تجد أولًا المصفوفة $\underline{ا} \times \underline{ب}$ وبعد ذلك المحددة. سيتطلب ذلك ضرب مصفوفتَين من الرتبة ٣ × ٣، ولكنها مع ذلك طريقة جيدة.

المعلم الإلكتروني الشامل