الوحدة السادسة: حلول التمارين

المصفوفات Matrices

تمارين ٦-١

١) أ) رتبة أ = ٢ × ٤

رتبة ب = ٣ × ٣

رتبة ج = ٣ × ١

ب) قيم $\text{أ}_{٢٢}$ = ١١، $\text{ب}_{١٢}$ = ٦، $\text{ج}_{٢١}$ = −١٢

ج) $-٤\text{ج} = -٤ \times \begin{pmatrix} ٧ \\ -١٢ \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢٨ \\ ٤٨ \\ -١٦ \end{pmatrix}$

$-٢\text{أ} = -٢ \begin{pmatrix} ٥ & ٧ & -٣ & ٠ \\ -٢ & ٨ & ١١ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١٠ & -١٤ & ٦ & ٠ \\ ٤ & -١٦ & -٢٢ & -١٢ \end{pmatrix}$

$\frac{١}{٢}\text{ب} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٤ & ٦ & ٢ \\ -٦ & ٢ & ٥٢ \\ ٦ & ٨ & ٧٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ -٣ & ١ & ٢٦ \\ ٣ & ٤ & ٣٦ \end{pmatrix}$

٢) أ) نعم، يساوي عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى عدد الصفوف في المصفوفة الثانية، ∴ يمكن ضربهما.

$\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠ \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ \\ ٢٠ \end{pmatrix}$

ب) كلا، في المصفوفة الأولى عمود واحد بينما في المصفوفة الثانية صفان.

ج) نعم، في المصفوفة الأولى ثلاثة أعمدة وفي المصفوفة الثانية ثلاثة صفوف.

$\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & ٠ \\ ٣ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢١ & ٣٨ \end{pmatrix}$

د) كلا، في المصفوفة الأولى أربعة أعمدة بينما في المصفوفة الثانية صفان، لذا لا يمكن إجراء عملية الضرب.

٣) أ) $\begin{pmatrix} -٦ & ٥ \\ \text{س}+١٢ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢\text{ص}+٥ & ٥ \\ ١٤ & ٤ \end{pmatrix}$ المدخلات المتساوية مرتبطة بها، لذا

−٦ = ٢ ص + ٥ و ص = −٥,٥

س + ١٢ = ١٤، ∴ س = ٢

ب $\begin{pmatrix} ٦ & س+٣ \\ -٤ & \frac{١}{٢}ص+٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & \frac{٢}{٣}س \\ -٤ & ص+١ \end{pmatrix}$

$\frac{٢}{٣}$س = س + ٣ فنحصل على $-\frac{١}{٣}$س = ٣، ∴ س = −٩

ص + ١ = $\frac{١}{٢}$ص + ٥ فنحصل على $\frac{١}{٢}$ص = ٤، ∴ ص = ٨

٤) $\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ٧ \\ -٩ & ٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ ٤ & ١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٤ & ٧٤ \\ -١١ & ٩٣ \end{pmatrix}$

$\underline{ب} \times \underline{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ ٤ & ١٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ٧ \\ -٩ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥١ & ١ \\ -١٠٠ & ٧٦ \end{pmatrix}$

$\therefore \underline{أ} \times \underline{ب} \neq \underline{ب} \times \underline{أ}$

٥) **أ** أولًا، $\underline{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤٣ & ٥٦ \\ ٨ & ١١ \end{pmatrix}$

ثم، $٢ \underline{أ} \times \underline{ب} = ٢ \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix} = ٢ \begin{pmatrix} ١٩ & -٢٨ \\ ٤ & -٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٨ & -٥٦ \\ ٨ & -١٦ \end{pmatrix}$

$\therefore \underline{أ}^{٢} + ٢ \underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{pmatrix} ٤٣ & ٥٦ \\ ٨ & ١١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣٨ & -٥٦ \\ ٨ & -١٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨١ & ٠ \\ ١٦ & -٥ \end{pmatrix}$

ب أولًا، $\underline{ب}^{٢} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١٦ \end{pmatrix}$

ثم، $\underline{ب}^{٢} \times \underline{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١٦ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٤ & ٢٨ \\ ٤ & ١٨ \end{pmatrix}$

ج أولًا، $\underline{أ}^{٣} = \underline{أ}^{٢}\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٤٣ & ٥٦ \\ ٨ & ١١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣١٤ & ٤١٣ \\ ٥٩ & ٧٨ \end{pmatrix}$

ثم $\underline{ب} \times \underline{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ١٤ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

$\therefore \underline{أ}^{٣} - \underline{ب} \times \underline{أ} = \begin{pmatrix} ٣١٤ & ٤١٣ \\ ٥٩ & ٧٨ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١٢ & ١٤ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٠٢ & ٣٩٩ \\ ٥٧ & ٧٩ \end{pmatrix}$

٦) أ) أولًا، $\underline{\text{ب}}^{2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & -1 \\ 0 & 16 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ثم $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}^{2} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -10 & -1 \\ 0 & 16 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -100 & -58 \\ 6 & -44 & 6 \\ 3 & -30 & -11 \end{pmatrix}$

كان يمكننا حساب $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}$ أولًا، بما أن $(\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}})\,\underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}}\,(\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ب}})$

ب) ليكن $\underline{\text{أ}}^{2} - \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}} \times (\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}})$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$\therefore\ \underline{\text{أ}}^{2} - \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & 9 & 6 \\ 12 & -21 & -2 \\ -3 & -9 & 8 \end{pmatrix}$

يمكننا القيام بهذا لأن $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} + \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ج}} = \underline{\text{أ}}\,(\underline{\text{ب}} + \underline{\text{ج}})$

٧) أ) أولًا، $2\underline{\text{أ}} + 5\underline{\text{ب}} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ -1 & -5 & 10 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

نجمعهما فنحصل على:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 \\ 0 & 18 & 6 \\ -2 & -10 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 20 \\ 25 & -15 & -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 & -20 \\ 0 & 18 & 26 \\ 23 & -25 & -10 \end{pmatrix}$$

ب) $\underline{\text{ب}}^{2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 10 \\ 20 & -12 & -24 \\ -15 & 23 & 14 \end{pmatrix}$

$\therefore\ \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ -1 & -5 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 9 & 10 \\ 20 & -12 & -24 \\ -15 & 23 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 114 & -130 & -108 \\ 135 & -39 & -174 \\ -249 & 281 & 250 \end{pmatrix}$

ج $\underline{\text{أ}}^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ -1 & -5 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ -1 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 45 & -49 \\ -3 & 66 & 57 \\ -11 & -97 & 90 \end{pmatrix}$

$\therefore \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}^{2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 45 & -49 \\ -3 & 66 & 57 \\ -11 & -97 & 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 395 & -270 \\ -44 & -388 & 360 \\ 105 & 609 & -956 \end{pmatrix}$

د باستخدام نتيجة $\underline{\text{أ}}^{2}$ من الفرع ج،

$2\underline{\text{أ}} + 3\underline{\text{أ}}^{2} = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ -1 & -5 & 10 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 6 & 45 & -49 \\ -3 & 66 & 57 \\ -11 & -97 & 90 \end{pmatrix}$

نضرب المصفوفتين في العدد القياسي الخاص بكل واحدة، ثم نجمع الحاصل:

$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 \\ 0 & 18 & 6 \\ -2 & -10 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 135 & -147 \\ -9 & 198 & 171 \\ -33 & -291 & 270 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 139 & -157 \\ -9 & 216 & 177 \\ -35 & -301 & 290 \end{pmatrix}$

٨) أ أولًا، $\underline{\text{أ}}^{2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ثم $\underline{\text{أ}}^{3} = \underline{\text{أ}}^{2} \times \underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

يمكن ملاحظة العنصر $\underline{\text{أ}}^{12} = -\text{ن}$ في $\underline{\text{أ}}^{\text{ن}}$

٩) نحسب $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{م}} \times \underline{\text{ج}} \times \underline{\text{م}} \times \underline{\text{أ}}$ على شكل $(\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{م}}) \times (\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{م}}) \times \underline{\text{أ}}$ وهو ما يساوي $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}} \times \underline{\text{أ}}$

لأن $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{م}} = \underline{\text{ب}}$ ، $\underline{\text{ج}} \times \underline{\text{م}} = \underline{\text{ج}}$

نحسب أولًا $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 9 & -3 \\ -2 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -21 \\ 4 & 1 & -7 \\ 16 & 35 & -5 \end{pmatrix}$

$\therefore (\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{ج}}) \times \underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -21 \\ 4 & 1 & -7 \\ 16 & 35 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 18 \\ 12 & 17 & 12 \\ 172 & 231 & 48 \end{pmatrix}$

١٠) أ أولًا، $\underline{\text{أ}}^{2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ثم $\underline{\text{أ}}^{3} = \underline{\text{أ}}^{2} \times \underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ب أولًا، $\underline{ا}^{٤} = \underline{ا}^{٢} \times \underline{ا} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٨ \\ -١ & ٠ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٧ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ -١ & ٠ & -١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١٦ \\ -١ & ٠ & -١٥ \\ ١ & ٠ & ١٥ \end{pmatrix}$

لدينا أربع مصفوفات، الأمر الذي يسهّل علينا قليلًا رؤية النمط.

$$\underline{ا}^{٢} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢^{٢} \\ -١ & ٠ & ١-٢^{٢} \\ ١ & ٠ & ٢^{٢}-١ \end{pmatrix}$$

$$\underline{ا}^{٣} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢^{٣} \\ -١ & ٠ & ١-٢^{٣} \\ ١ & ٠ & ٢^{٣}-١ \end{pmatrix}$$

$$\underline{ا}^{٤} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢^{٤} \\ -١ & ٠ & ١-٢^{٤} \\ ١ & ٠ & ٢^{٤}-١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \underline{ا}^{ن} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢^{ن} \\ -١ & ٠ & ١-٢^{ن} \\ ١ & ٠ & ٢^{ن}-١ \end{pmatrix}$$

يبدو لنا أن صيغة العنصر الأول في المصفوفة هي $٢^{ن}$. يقودنا ذلك إلى معرفة النمط الذي سيظهر في العناصر الأخرى من العمود الأول للمصفوفة $\underline{ا}^{ن}$.

تمارين ٦-٢

١) أ ليكن $ا = \begin{pmatrix} ٨ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

$\Delta = ٥ \times ٢ - ٨ \times ٤ = -٢٢ \neq ٠$

$\therefore$ $\underline{ا}$ غير منفردة.

ب ليكن $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ -١٤ & -٦ \end{pmatrix}$

$\Delta = ٣ \times (-١٤) - (-٦) \times ٧ = ٠$

$\therefore$ $\underline{ب}$ منفردة.

ج ليكن $\underline{ج} = \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$

$\Delta = ١ \times ٠ - (-١) \times ٤ = ٤ \neq ٠$

$\therefore$ $\underline{ج}$ غير منفردة.

٢) حتى تكون $\underline{ا}$ منفردة، وجب أن يكون $\Delta = ٠$.

نستنتج من صيغة $\underline{ا}$ أن:

$\Delta = س \times (س - ٣) - ٤ \times ١ = س^{٢} - ٣س - ٤$

نحلل $س^{٢} - ٣س - ٤ = ٠$ إلى عوامل لنكتب

$(س - ٤)(س + ١) = ٠$

$\therefore$ $س = -١$ أو $س = ٤$ هما بالضبط قيمتا س لتكون المصفوفة ا منفردة.

٣) أولًا، $\Delta = س \times (س + ١) - (-٢) \times ٥ = س^{٢} + س + ١٠$

نلاحظ بعد ذلك أن $س^{٢} + س + ١٠ =$

$\left(س + \frac{١}{٢}\right)^{٢} + ١٠ - \frac{١}{٤}$