استخدم فيثاغورث لتحصل على:

$(١ + س)^{٢} + (١ + س)^{٢} = ٢^{٢}$

$٢(١ + س)^{٢} = ٤$

$(١ + س)^{٢} = ٢$

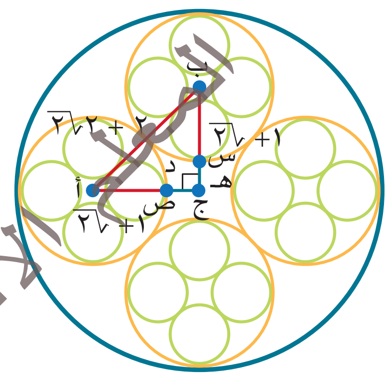
$١ + س = \pm\sqrt{٢}$

$س = \sqrt{٢} - ١$ أو $س = -\sqrt{٢} - ١$ (حل مرفوض)

نصف قطر الدائرة البرتقالية هو $١ + ١ + س$

أو: $١ + ١ + \sqrt{٢} - ١ = ١ + \sqrt{٢}$

ب ١)



$أب^{٢} = أهـ^{٢} + ب هـ^{٢}$

$(٢ + ٢\sqrt{٢})^{٢} = (١ + \sqrt{٢} + ص)^{٢} + (١ + \sqrt{٢} + ص)^{٢}$

$(٢ + ٢\sqrt{٢})^{٢} = ٢(١ + \sqrt{٢} + ص)^{٢}$

$٢ + ٢\sqrt{٢} = \pm\sqrt{٢}(١ + \sqrt{٢} + ص)$

إما $\sqrt{٢} + ٢ = ١ + \sqrt{٢} + ص$

أو $\sqrt{٢} + ٢ = -١ - \sqrt{٢} - ص$

$ص = ١$ أو $ص = -٣ - ٢\sqrt{٢}$ (مرفوض لأن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا).

نصف قطر الدائرة الزرقاء يساوي:

$١ + \sqrt{٢} + ١ + \sqrt{٢} + ١$ أو $٣ + ٢\sqrt{٢}$

تمارين ٥-٥

١) عوّض عن قيمة $ص = س - ٣$ في $(س - ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٠$

$(س - ٣)^{٢} + (س - ١)^{٢} = ٢٠$

$٢س^{٢} - ٨س + ١٠ = ٢٠$

$٢س^{٢} - ٨س - ١٠ = ٠$

$س^{٢} - ٤س - ٥ = ٠$

$(س - ٥)(س + ١) = ٠$

$س = ٥$ أو $س = -١$

عوّض عن $س = ٥$ في $ص = س - ٣$

تحصل على: $ص = ٢$

عوّض عن $س = -١$ في $ص = س - ٣$

تحصل على: $ص = -٤$

نقاط التقاطع هي (٥ ، ٢) و (−١، −٤)

٣) حلّ بشكل آني المعادلتَين $٣س + ص = ٦$ .... (١)

و $س^{٢} + ص^{٢} + ٤س + ١٦ص + ٢٨ = ٠$ ..... (٢)

لتجد نقطة التقاطهما.

أوجد ص بدلالة س في المعادلة (١) وعوّض القيمة في المعادلة (٢):

$س^{٢} + (٦ - ٣س)^{٢} + ٤س + ١٦(٦ - ٣س) + ٢٨ = ٠$

$س^{٢} + ٣٦ - ٣٦س + ٩س^{٢} + ٤س + ٩٦ - ٤٨س + ٢٨ = ٠$

$١٠س^{٢} - ٨٠س + ١٦٠ = ٠$

$س^{٢} - ٨س + ١٦ = ٠$

$(س - ٤)^{٢} = ٠$

$س = ٤$

عوّض في المعادلة الخطية (١) لتحصل على:

$ص = -٦$

نقطة التقاطع (٤، −٦)

يوجد حلّ وحيد (جذر مكرر)، لذا وجب أن يكون المستقيم مماسًا للدائرة.

٤) ص = م س + ١ ...... (١)

(س − ٧)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٠ .... (٢)

عوّض بدل ص من المعادلة (١) في المعادلة (٢) لتحصل على:

(س − ٧)^{٢} + (م س + ١ − ٥)^{٢} = ٢٠

(س − ٧)^{٢} + (م س − ٤)^{٢} = ٢٠

س^{٢} − ١٤س + ٤٩ + م^{٢}س^{٢} − ٨م س + ١٦ = ٢٠

(١+ م^{٢}) س^{٢} + س (−١٤ − ٨ م) + ٤٥ = ٠

قارن المعادلة مع أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، لتحصل على:

أ = ١ + م^{٢}، ب = −١٤ − ٨ م، جـ = ٤٥

ليكون للمعادلة جذران حقيقيان يكون ب^{٢} − ٤أجـ > ٠

(−١٤ − ٨ م)^{٢} −٤(١ + م^{٢}) (٤٥) > ٠

١٩٦ + ٢٢٤م + ٦٤م^{٢} − ١٨٠ − ١٨٠م^{٢} > ٠

−١١٦م^{٢} + ٢٢٤م + ١٦ > ٠

منحنى ص = −١١٦م^{٢} + ٢٢٤م + ١٦ شكله ∩

لتجد المقطع من المحور −م وباستخدام الصيغة التربيعية مرة ثانية:

$$م = \frac{-٢٢٤ \pm \sqrt{٢٢٤^{٢} - ٤(-١١٦)(١٦)}}{٢(-١١٦)}$$

م = $-\frac{٢}{٢٩}$ أو م = ٢

وحيث يتطلب الأمر أن يكون −١١٦م^{٢} + ٢٢٤م + ١٦ > ٠، فإننا نريد جزء المنحنى ص= −١١٦م^{٢} + ٢٢٤م + ١٦ الذي يقع فوق المحور −م

وعليه، يكون $-\frac{٢}{٢٩}$ < م < ٢

٥) ٢ص − س = ١٢ ..... (١)

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠س − ١٢ص + ٣٦ = ٠ .... (٢)

أ لتجد النقطتَين ا، ب، أعد ترتيب المعادلة (١) لتجد أن س = ٢ص − ١٢ وعوّض في المعادلة (٢):

(٢ص−١٢)^{٢} + ص^{٢} −١٠(٢ص−١٢)−١٢ص+ ٣٦ = ٠

٤ص^{٢} − ٤٨ص + ١٤٤ + ص^{٢} − ٢٠ص + ١٢٠ − ١٢ص + ٣٦ = ٠

٥ص^{٢} − ٨٠ ص + ٣٠٠ = ٠

ص^{٢} − ١٦ص + ٦٠ = ٠

(ص − ١٠) (ص − ٦) = ٠

ص = ١٠ أو ص = ٦ عوّض كلًا من الحلَّين في المعادلة (٢) لتحصل على:

س = ٨ أو س = ٠

إحداثيات ا (٠، ٦)، ب (٨، ١٠) أو بالعكس.

ب نقطة منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ = $\left(\frac{٠ + ٨}{٢}, \frac{٦ + ١٠}{٢}\right)$ أو (٤، ٨)

ميل $\overline{\text{ا ب}}$ = $\frac{١٠ - ٦}{٨ - ٠}$ أو $\frac{١}{٢}$

للمستقيمَين المتعامدَين: م$_{١}$ × م$_{٢}$ = −١، إذًا ميل العمود المنصف للقطعة $\overline{\text{ا ب}}$ = −٢

معادلة العمود المنصف للقطعة $\overline{\text{ا ب}}$ هي

ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)، م = −٢،

ويمر في النقطة (٤، ٨)

ص − ٨ = −٢(س − ٤)

ص − ٨ = −٢س + ٨

ص = −٢س + ١٦

ج يمكن أن نجد النقطتَين ى، ل من خلال المعادلتَين الآتيتَين آنيًا:

ص = −٢س + ١٦.......... (١)

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠س − ١٢ص + ٣٦ = ٠ ..... (٢)

استخدم المعادلة (١) للتعويض في (٢) لتحصل على:

س^{٢} + (−٢س + ١٦)^{٢} − ١٠س − ١٢(−٢س + ١٦) + ٣٦ = ٠

س^{٢} + ٤س^{٢} − ٦٤س + ٢٥٦ − ١٠س + ٢٤س − ١٩٢ + ٣٦ = ٠

٥س^{٢} − ٥٠س + ١٠٠ = ٠

س^{٢} − ١٠س + ٢٠ = ٠

استخدم الصيغة التربيعية حيث أ = ١، ب = −١٠، جـ = ٢٠ لتحصل على:

س = $\dfrac{-(-١٠) \pm \sqrt{(-١٠)^{٢} - ٤(١)(٢٠)}}{٢(١)}$

س = $\dfrac{١٠ \pm \sqrt{٢٠}}{٢}$

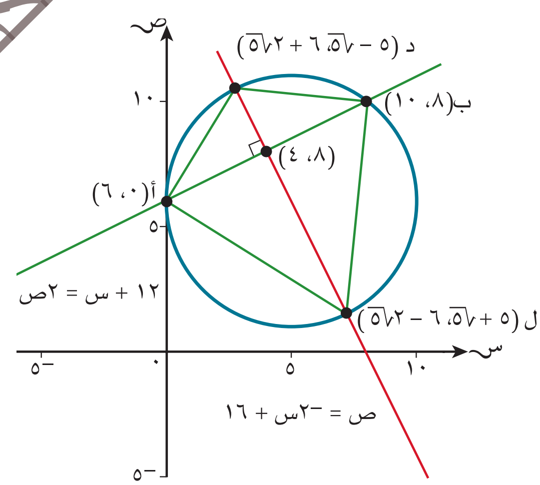
س = ٥ + $\sqrt{٥}$ و ٥ − $\sqrt{٥}$

عوّض بدلًا عن س = ٥ + $\sqrt{٥}$ في المعادلة (١) لتحصل على ص = ٦ − ٢$\sqrt{٥}$

عوّض بدلًا عن س = ٥ − $\sqrt{٥}$ في المعادلة (١) لتحصل على ص = ٦ + ٢$\sqrt{٥}$

إحداثيات ى (٥ − $\sqrt{٥}$، ٦ + ٢$\sqrt{٥}$)، ل (٥ + $\sqrt{٥}$، ٦ − ٢$\sqrt{٥}$) والعكس صحيح.

د



يأخذ أ ى ب ل شكل طائرة ورقية.

مساحة الطائرة الورقية = $\frac{١}{٢}$ ($\overline{\text{أ ب}}$ × $\overline{\text{ى ل}}$)

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{\text{أ ب}}$ = $\sqrt{(٨ - ٠)^{٢} + (١٠ - ٦)^{٢}}$

$\overline{\text{أ ب}}$ = $\sqrt{٨٠}$

$\overline{\text{ى ل}}$ = $\sqrt{[(٥ + \sqrt{٥}) - (٥ - \sqrt{٥})]^{٢} + [(٦ - ٢\sqrt{٥}) - (٦ + ٢\sqrt{٥})]^{٢}}$

$\overline{\text{ى ل}}$ = ١٠

مساحة ا ى ب ل = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٨٠}$ × ١٠

مساحة ا ى ب ل = ٢٠$\sqrt{٥}$

٦) مركز الدائرة الأولى (٠، ٠) ونصف قطرها = ٥

مركز الدائرة الثانية (١٢، ٩) ونصف قطرها = ١٠

المسافة بين المركزين = $\sqrt{١٢^{٢} + ٩^{٢}}$

= $\sqrt{١٤٤ + ٨١}$

= $\sqrt{٢٢٥}$

= ١٥

بما ان مجموع نصفي القطر = ٥ + ١٠ = المسافة بين المركزين، فإن الدائرتين متماستان.

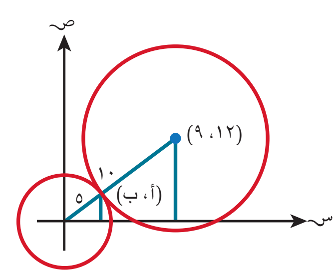
لإيجاد إحداثيات نقطة المماس، استخدم المثلّثات المتشابهة:

نسبة المثلّث الصغير هي أ: ب: ٥

نسبة المثلّث الكبير هي ١٥: ٩: ١٢

بما أن النسبتين متساويتين، فإن أ: ب: ٥ = ٥: ٣: ٤

∴ إحداثيات نقطة المماس هي (٤، ٣)



٧) معادلة الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٤

عوض عن ص = س + جـ في س^{٢} + ص^{٢} = ٤

س^{٢} + (س + جـ)^{٢} = ٤

فك الأقواس:

س^{٢} + س^{٢} + ٢جـ س + جـ^{٢} = ٤

٢س^{٢} + ٢س جـ + (س٢ − ٤) = ٠

يدلنا المميز على عدد الجذور :

المميز = (٢جـ)^{٢}− ٤ × ٢ × (ج^{٢} − ٤)

= ٤جـ^{٢} − ٨جـ^{٢} + ٣٢

= −٤جـ^{٢} + ٣٢

عندما يساوي هذا المقدار صفرًا، نحصل على ٤جـ^{٢} + ٣٢ = ٠

أي أن جـ = ± $\sqrt{٨}$

المميز يساوي −٤جـ^{٢} + ٣٢ وهو تربيعي سالب، وهذا التربيع يساوي صفرًا عندما جـ = $\sqrt{٨}$ أو عندما جـ = −$\sqrt{٨}$ ويكون موجبًا عندما −$\sqrt{٨}$ جـ − $\sqrt{٨}$ ، ويكون سالبًا عندما جـ < −$\sqrt{٨}$ أو عندما جـ > $\sqrt{٨}$

أ هو مماس عندما جـ = $\sqrt{٨}$ أو عندما جـ = −$\sqrt{٨}$

ب يتقاطعان مرتين عندما −$\sqrt{٨}$ < جـ < $\sqrt{٨}$

ج لا يتقاطعان عندما جـ < −$\sqrt{٨}$ أو عندما جـ > $\sqrt{٨}$

٢٤٨