تمارين ٥-٤

١) ب ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} = ٩

اقسم طرفَي المعادلة على ٢ لتحصل على:

س^{٢} + ص^{٢} = $\frac{٩}{٢}$

قارن المعادلة مع الصورة

(س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢}، وهي معادلة دائرة مركزها (أ، ب) ونصف قطرها نق.

(س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢}، أ = ٠، ب = ٠،

نق^{٢} = $\frac{٩}{٢}$

نق = $\sqrt{\frac{٩}{٢}}$ أو $\frac{\sqrt{٣}\sqrt{٢}}{٢}$

المركز (٠ ، ٠)، نصف القطر

ز س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س + ٢٠ص + ١١٠ = ٠

أعد كتابة المعادلة في الصورة:

س^{٢} − ٨ س + ص^{٢} + ٢٠ص + ١١٠ = ٠

أوجِد المربعات الكاملة:

(س − ٤)^{٢} − ٤^{٢} + (ص + ١٠)^{٢} − ١٠^{٢} + ١١٠ = ٠

(س − ٤)^{٢} + (ص + ١٠)^{٢} = ٦

قارن مع المعادلة (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢}

أ = ٤، ب = −١٠، نق^{٢} = ٦

المركز (٤، −١٠) ، ونصف القطر = $\sqrt{٦}$

٢) ب المركز (٥، −٢) ، نق = ٤

معادلة الدائرة هي (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢}، حيث أ = ٥، ب = −٢ ، نق = ٤

(س − ٥)^{٢} + (ص − (−٢))^{٢} = ٤^{٢}

(س − ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ١٦

٣) حيث إن (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢}

عوّض أ = ٢، ب = ٥ لتحصل على:

(س − ٢)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = نق^{٢} ..... (١)

بما أن النقطة (٨،٦) تقع على الدائرة، عوّض س = ٦، ص = ٨ في المعادلة (١) لتجد قيمة نق.

(٦ − ٢)^{٢} + (٨ − ٥)^{٢} = نق^{٢}

نق^{٢} = ١٦ + ٩

نق^{٢} = ٢٥

(س − ٢)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٥

٤) مركز الدائرة ج هي نقطة منتصف $\overline{أ ب}$.

ج = $\left(\frac{-٦ + ٢}{٢}، \frac{٨ + (-٤)}{٢}\right)$ = (−٢، ٢)

نصف قطر الدائرة، نق، يساوي $\overline{ب ج}$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل:

نق = $\sqrt{[-٢ - ٢)^{٢} + (٢ - (-٤))^{٢}}$ = $\sqrt{٥٢}$

معادلة الدائرة هي (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢}

حيث أ = −٢، ب = ٢، نق = $\sqrt{٥٢}$

(س + ٢)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ($\sqrt{٥٢}$)^{٢}

(س + ٢)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٥٢

٥) تمس الدائرة المحور السيني ومركزها هو (٦، −٥)، فيكون نصف قطر الدائرة ٥ وحدات.

ليكن (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢}،

عوّض عن (نق) ر^{٢} = ٥ ٢، أ = ٦، ب = −٥ :

(س − ٦)^{٢} + (ص − (−٥))^{٢} = ٢٥

(س − ٦)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٥

٦) يقع مركز الدائرة على العمود المنصف للقطعة ك ل

نقطة منتصف القطعة

$\overline{ك ل}$ = $\left(\frac{١ + ٧}{٢}، \frac{-٢ + ١}{٢}\right)$ = (٤، $-\frac{١}{٢}$)

ميل $\overline{ك ل}$ = $\frac{١ - (-٢)}{١ - ٧}$ = $\frac{١}{٢}$

المعلم الإلكتروني الشامل

فيكون ميل العمود المنصف للقطعة $\overline{ك ل}$ = −٢، لأن للمستقيمَين المتعامدَين يكون $م_{١} \times م_{٢} = -١$

معادلة العمود المنصف للقطعة $\overline{ك ل}$ هي:

$(ص - (-\frac{١}{٢})) = -٢(س - ٤)$

$ص + \frac{١}{٢} = -٢س + ٨$

$٢ص + ١ = -٤س + ١٦$

$\therefore$ ٤س + ٢ص = ١٥، وهذا هو المطلوب.

٧) إذا كان نق = $٢\sqrt{٢}$ أو $\sqrt{٨}$ أو نق^{٢} = ٨

فاستخدم (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢}

عوّض بدلًا عن س = ٣، ص = ٢، نق^{٢} = ٨ لتحصل على: (٣ − أ)^{٢} + (٢ − ب)^{٢} = ٨ ..... (١)

عوّض بدلًا عن س = ٧، ص = ٢ ، نق^{٢} = ٨ لتحصل على: (٧ − أ)^{٢} + (٢ − ب)^{٢} = ٨ ..... (٢)

اطرح المعادلة (٢) من معادلة (١) لتحصل على:

(٣ − أ)^{٢} − (٧ − أ)^{٢} = ٠، بسّط المعادلة لتحصل على:

٩ − ٦أ + أ^{٢} − (٤٩ − ١٤أ + أ^{٢}) = ٠

٩ − ٦أ + أ^{٢} − ٤٩ + ١٤أ − أ^{٢} = ٠

٨أ − ٤٠ = ٠

أ = ٥

عوّض في المعادلة (١) لتحصل على:

(٣ − ٥)^{٢} + (٢ − ب)^{٢} = ٨

٤ + (٢ − ب)^{٢} = ٨

(٢ − ب)^{٢} = ٤

٢ − ب = ± ٢

ب = ٠ أو ب = ٤

عوّض عن أ = ٥، ب = ٠، نق^{٢} = ٨

في (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢} لتحصل على:

(س − ٥)^{٢} + (ص − ٠)^{٢} = ٨

أو (س − ٥)^{٢} + ص^{٢} = ٨

عوّض أ = ٥، ب = ٤، نق^{٢} = ٨

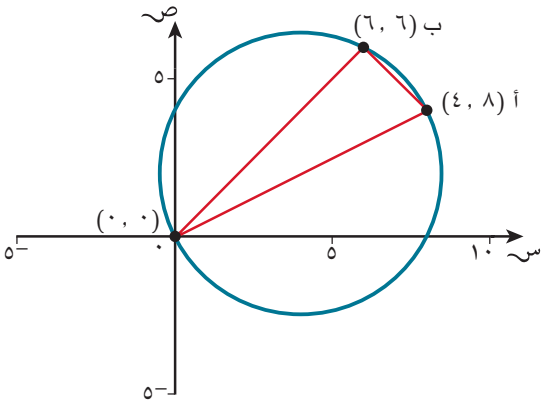
في (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢} لتحصل على:

(س − ٥)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٨

الحلان هما (س − ٥)^{٢} + ص^{٢} = ٨

و (س − ٥)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٨

٨) يُظهر الشكل:



إذا كان و ا قطرًا في الدائرة، فإن قياس الزاوية و ب ا يساوي ٩٠° (زاوية في نصف دائرة).

لذا يكون $\overline{و ب}$ عموديًا على $\overline{ا ب}$

ميل $\overline{و ب} = \frac{٠ - ٦}{٦ - ٠} = ١$

ميل $\overline{ا ب} = \frac{٤ - ٦}{٨ - ٦} = -١$

ميل $\overline{و ب}$ × ميل ب = ١ × −١ = −١

لذا، وجب أن يكون و ا قطرًا في الدائرة.

العواميد المنصفة لكل من $\overline{و ا}$، $\overline{ا ب}$، $\overline{و ب}$ تلتقي في مركز الدائرة، لكن يتطلب فقط اثنان منها لتحديد المركز.

نقطة منتصف $\overline{ا ب} = \left(\frac{٦ + ٨}{٢}، \frac{٦ + ٤}{٢}\right) = (٧، ٥)$

ميل $\overline{ا ب} = -١$

ميل العمود المنصف لـ $\overline{ا ب} = ١$ وذلك لأن للمستقيمَين المتعامدَين، يكون $م_{١} \times م_{٢} = -١$.

المعلم الإكتروني الشامل

معادلة العمود المنصف لـ $\overline{أ ب}$ هي:

$(ص - ٥) = ١ (س - ٧)$

$ص = س - ٢$ ..... (١)

نقطة منتصف $\overline{و ب} = \left(\frac{٠ + ٦}{٢}، \frac{٦ + ٠}{٢}\right) = (٣، ٣)$

ميل $\overline{و ب} = ١$

ميل العمود المنصف لـ $\overline{و ب} = -١$ وذلك لأن

للمستقيمَين المتعامدَين، يكون $م_١ \times م_٢ = -١$

معادلة العمود المنصف لـ $\overline{و ب}$ هي:

$(ص - ٣) = -١(س - ٣)$

$ص = -س + ٦$ ..... (٢)

حلّ المعادلتَين (١) و (٢) لتحصل على:

$س = ٤، ص = ٢$

مركز الدائرة ج (٤، ٢)

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

نصف القطر

$\overline{و ج} = \sqrt{(٤ - ٠)^٢ + (٢ - ٠)^٢} = \sqrt{٢٠}$

وعليه، معادلة الدائرة هي:

$(س - ٤)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٢٠$

٩) $(س - ٣)^٢ - ٩ + (ص + ١)^٢ - ١ = ٦$

$(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ = ١٦$

$(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٤^٢$

إحداثيات مركز الدائرة (٣، -١) ونصف قطرها ٤

١٠) أ إذا وقعت النقطة أ (٦، -٦) على الدائرة، إذا

عوضنا ص = -٦ و س = ٦ في معادلة الدائرة،

وجب أن يبقى طرفا المعادلة متساويَين.

$(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥$

$(٦ - ٣)^٢ + (-٦ + ٢)^٢ = ٢٥$

٩ + ١٦ = ٢٥ وهذا صحيح. لذا النقطة أ تقع بالفعل على الدائرة.

ب يجب أن يمر العمود على المماس من النقطة (٦، -٦) في مركز الدائرة ج (٣ ، -٢)

ميل $\overline{أ ج} = \frac{-٢ - (-٦)}{٣ - ٦}$ أو $-\frac{٤}{٣}$

ميل المماس عند النقطة أ يساوي $\frac{٣}{٤}$، لأن

للمستقيمَين المتعامدَين، يكون $م_١ \times م_٢ = -١$

استخدم $ص - ص_١ = م (س - س_١)$، أ (٦، -٦)، $م = \frac{٣}{٤}$ لتحصل على:

$ص - (-٦) = \frac{٣}{٤} (س - ٦)$

$ص + ٦ = \frac{٣}{٤} (س - ٦)$

$ص = \frac{٣}{٤} س - \frac{٢١}{٢}$

١١) أ يقطع المستقيم ٢س + ٥ص = ٢٠ المحور السيني عند النقطة أ (١٠، ٠)

(عوّض ص = ٠ في ٢س + ٥ص = ٢٠)

كما يقطع المحور الصادي في ب (٠، ٤)

(عوّض س = ٠ في ٢س + ٥ص = ٢٠)

إحداثيات ج مركز الدائرة هي $\left(\frac{١٠ + ٠}{٢}، \frac{٠ + ٤}{٢}\right)$

أو (٥، ٢)

نصف قطر الدائرة هو $\overline{أ ج}$ (أو $\overline{ج ب}$)

استخدم نظرية فيثاغورث لتجد نصف القطر $\overline{أ ج}$:

$\overline{أ ج} = \sqrt{(٥ - ١٠)^٢ + (٢ - ٠)^٢}$

نصف القطر $\overline{أ ج} = \sqrt{٢٩}$

عوّض بدلًا عن ب (٥، ٢) و نق^٢ = ٢٩

في $(س - أ)^٢ + (ص - ب)^٢ = نق^٢$ لتحصل على:

$(س - ٥)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٢٩$ ..... (١)

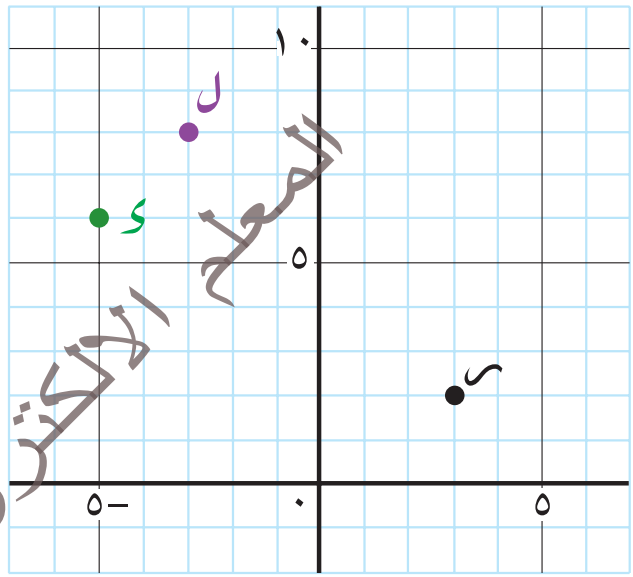
المعلم الإلكتروني الشامل

ب إذا وقعت النقطة (٠، ٠) على الدائرة، عندها وجب أن يُبقي تعويض س = ٠ و ص = ٠ في المعادلة طرفَي المعادلة متساويَين.

$(٠ - ٥)^{٢} + (٠ - ٢)^{٢} = ٢٩$

٢٥ + ٤ = ٢٩ وهذا صحيح. ∴ تمر الدائرة بالفعل في النقطة (٠، ٠)

١٢)



معادلة $\overline{ك ل}$ هي: ص = س + ١١

معادلة $\overline{ل ر}$ هي: ص = − س + ٥

ميل المستقيمين ١ ، −١، ∴ هما متعامدين وزاوية المثلث ك ل ر هي زاوية قائمة

ب $\overline{ك ر}$ قطر في الدائرة، وعليه يكون مركز الدائرة هو نقطة منتصف القطر،

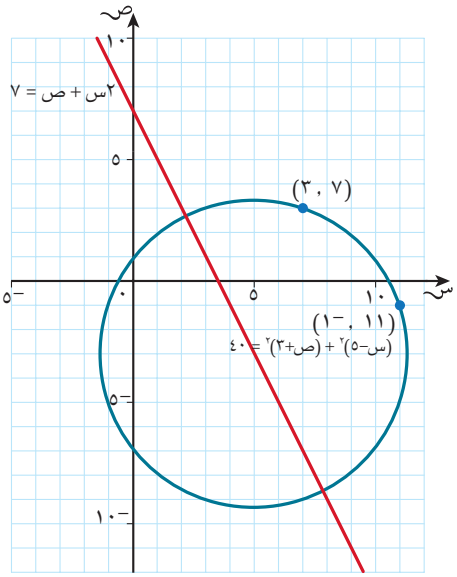
$\left(\frac{-٥ + ٣}{٢}، \frac{٦ + ٢}{٢}\right) = (-١، ٤)$

نصف قطر الدائرة هو المسافة من (−١، ٤) إلى ر، ويكون $\sqrt{٢٤^{٢} + ٢^{٢}} = \sqrt{٢٠}$

معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط ك، ل، ر هي:

$(س + ١)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٢٠$

١٣) يُظهر الشكل



يقع مركز الدائرة على العمود المنصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين (٧، ٣) و (١١، −١)

نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين (٧، ٣) و (١١، −١) هي:

$\left(\frac{٧ + ١١}{٢}، \frac{٣ + (-١)}{٢}\right)$ أو (٩، ١)

ميل المستقيم الواصل بين (٧، ٣) و (١١، −١) = $\frac{-١ - ٣}{١١ - ٧} = -١$

يكون ميل العمود المنصف ١ لأن للمستقيمَين المتعامدَين يكون $م_{١} \times م_{٢} = -١$

معادلة العمود المنصف باستخدام ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)، م = ١، ويمر بالنقطة (٩، ١) هي:

ص − ١ = ١(س − ٩)

ص = س − ٨ ..... (١)

ولدينا كذلك أن المركز يقع على المستقيم

٢س + ص = ٧ .... (٢)

حلّ المعادلتَين (١) و (٢) لتحصل على س = ٥، ص = −٣

المعلم الإلكتروني الشامل

وعليه، يكون مركز الدائرة هو (٥، −٣)

أوجِد نصف قطر الدائرة باستخدام نظرية فيثاغورث.

والنقاط ج (٥، −٣) و (٧، ٣) [أو (١١، −١)]:

$نق = \sqrt{(٧ - ٥)^{٢} + (٣ - (-٣))^{٢}}$

$= \sqrt{٤ + ٣٦}$

$نق = \sqrt{٤٠}$

فتكون معادلة الدائرة:

$(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = نق^{٢}$،

حيث أ = ٥، ب = −٣، $نق = \sqrt{٤٠}$

$(س - ٥)^{٢} + (ص - (-٣))^{٢} = ٤٠$

$(س - ٥)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٤٠$

١٤) لإيجاد مركز الدائرة علينا إيجاد العمودين المنصفين لضلعين ثم إيجاد نقطة تقاطعهما.

المنصف العمودي لـ وز هي: ص = −س + ١١

المنصف العمودي لـ ول هي: ص = $-\frac{١}{٣}$ س + جـ،

وتمر بنقطة منتصفها $(\frac{٣}{٢}، \frac{٩}{٢})$ وعليه تكون المعادلة

ص = $-\frac{١}{٣}$ س + ٥

يتقاطع المستقيمين المتعامدين عندما تكون

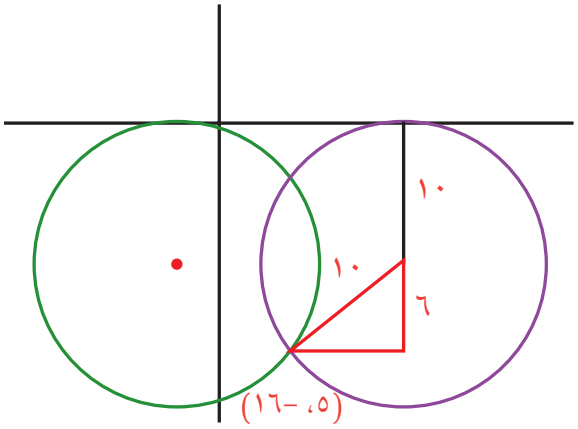
$-س + ١١ = -\frac{١}{٣}$ س + ٥

س = ٩ و ص = ٢

قطر الدائرة هو المسافة من و إلى (٩، ٢) أي $\sqrt{٨٥}$

∴ تكون معادلة الدائرة $(س - ٩)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٨٥$

١٥)



يوضح الشكل أعلاه دائرتين محتملتين، وتم توضيح بعض الأطوال المفيدة على إحداهما.

طول الجزء الأفقي من المثلث القائم الزاوية هو $\sqrt{١٠^{٢} - ٦^{٢}} = ٨$، لذا فإن مركز تلك الدائرة يقع عند (١٣، −١٠) فنحصل على المعادلة

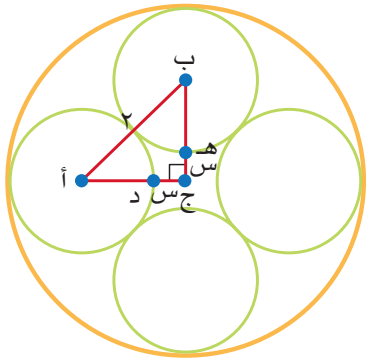
$(س - ١٣)^{٢} + (ص + ١٠)^{٢} = ١٠^{٢}$

بالنسبة للدائرة الأخرى، يكون المركز ٨ وحدات على يسار (٥، −١٦) ، ويقع عند (−٣ ، −١٠)

للحصول على المعادلة

$(س + ٣)^{٢} + (ص + ١٠)^{٢} = ١٠^{٢}$

١٦)



أ (١) نصف قطر كل دائرة خضراء ١ وحدة

قياس الزاوية ب ج ا هو ٩٠°، $\overline{ا ب}$ = ٢ وحدة

ليكن $\overline{ز ج} = \overline{هـ ج}$ = س

المعلم الإلكتروني الشامل

استخدم فيثاغورث لتحصل على:

$(١ + س)^{٢} + (١ + س)^{٢} = ٢^{٢}$

$٢(١ + س)^{٢} = ٤$

$(١ + س)^{٢} = ٢$

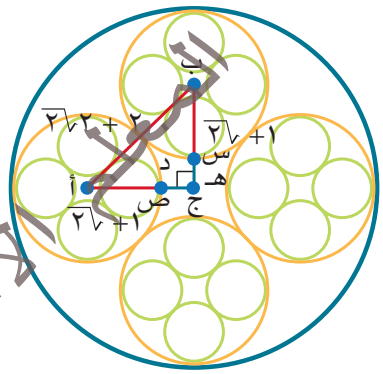
$١ + س = \pm \sqrt{٢}$

$س = \sqrt{٢} - ١$ أو $س = -\sqrt{٢} - ١$ (حل مرفوض)

نصف قطر الدائرة البرتقالية هو $١ + ١ + س$

أو: $١ + ١ + \sqrt{٢} - ١ = ١ + \sqrt{٢}$

ب ١)



$أ ب^{٢} = أ هـ^{٢} + ب هـ^{٢}$

$(٢ + \sqrt{٢}٢)^{٢} = (١ + \sqrt{٢} + ص)^{٢} + (١ + \sqrt{٢} + ص)^{٢}$

$(٢ + \sqrt{٢}٢)^{٢} = ٢(١ + \sqrt{٢} + ص)^{٢}$

$٢ + \sqrt{٢}٢ = \pm \sqrt{٢}(١ + \sqrt{٢} + ص)$

إما $٢ + \sqrt{٢} = ١ + \sqrt{٢} + ص$

أو $٢ + \sqrt{٢} = -١ - \sqrt{٢} - ص$

ص = ١ أو ص = $-٣ - \sqrt{٢}٢$ (مرفوض لأن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا).

نصف قطر الدائرة الزرقاء يساوي:

$١ + \sqrt{٢} + ١ + \sqrt{٢}$ أو $٣ + \sqrt{٢}٢$

تمارين ٥-٥

١) عوّض عن قيمة ص = س − ٣ في $(س - ٣)^{٢}$

$+ (ص + ٢)^{٢} = ٢٠$

$(س - ٣)^{٢} + (س - ١)^{٢} = ٢٠$

$٢س^{٢} - ٨س + ١٠ = ٢٠$

$٢س^{٢} - ٨س - ١٠ = ٠$

$س^{٢} - ٤س - ٥ = ٠$

$(س - ٥)(س + ١) = ٠$

س = ٥ أو س = −١

عوّض عن س = ٥ في ص = س − ٣

تحصل على: ص = ٢

عوّض عن س = −١ في ص = س − ٣

تحصل على: ص = −٤

نقاط التقاطع هي (٥ ، ٢) و (−١، −٤)

٣) حلّ بشكل آني المعادلتَين ٣س + ص = ٦ ..... (١)

و $س^{٢} + ص^{٢} + ٤س + ١٦ص + ٢٨ = ٠$ ..... (٢)

لتجد نقطة التقائهما.

أوجد ص بدلالة س في المعادلة (١) وعوّض القيمة في المعادلة (٢):

$س^{٢} + (٦ - ٣س)^{٢} + ٤س + ١٦(٦ - ٣س) + ٢٨ = ٠$

$س^{٢} + ٣٦ - ٣٦س + ٩س^{٢} + ٤س + ٩٦ - ٤٨س + ٢٨ = ٠$

$١٠س^{٢} - ٨٠س + ١٦٠ = ٠$

$س^{٢} - ٨س + ١٦ = ٠$

$(س - ٤)^{٢} = ٠$

س = ٤

عوّض في المعادلة الخطية (١) لتحصل على:

ص = −٦

النشر الإلكتروني للتداول