الوحدة الخامسة : حلول التمارين
الهندسة الإحداثية

تمارين ٥-١

١) أ ى $(-٤، ٦)$، ل $(٦، ١)$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$ى ل = \sqrt{(٦ - (-٤))^٢ + (١ - ٦)^٢}$

$= \sqrt{(١٠)^٢ + (-٥)^٢}$

$= \sqrt{١٠٠ + ٢٥}$

$ى ل = \sqrt{١٢٥}$ أو $٥\sqrt{٥}$

ل $(٦، ١)$، م $(٢، ٩)$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$ل م = \sqrt{(٢ - ٦)^٢ + (٩ - ١)^٢}$

$= \sqrt{(-٤)^٢ + ٨^٢}$

$= \sqrt{١٦ + ٦٤}$

$ل م = \sqrt{٨٠}$ أو $٤\sqrt{٥}$

ى $(-٤، ٦)$، م $(٢، ٩)$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$ى م = \sqrt{(٢ - (-٤))^٢ + (٩ - ٦)^٢}$

$= \sqrt{٦^٢ + ٣^٢}$

$= \sqrt{٣٦ + ٩}$

$ى م = \sqrt{٤٥}$ أو $٣\sqrt{٥}$

باستخدام نظرية فيثاغورث، ليكون ى ل م مثلثًا

قائم الزاوية فيجب أن يكون:

$(٣\sqrt{٥})^٢ + (٤\sqrt{٥})^٢ = (٥\sqrt{٥})^٢$

عندما تريد اختبار ما إذا كان المثلث قائم الزاوية، اختر الضلع الأكبر ليكون الوتر

$٤٥ + ٨٠$ يجب أن يساوي ١٢٥

$١٢٥ = ١٢٥$

وعليه، يكون المثلث ى ل م قائم الزاوية.

٢) ى $(١، ٦)$، ل $(-٢، ١)$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$ى ل = \sqrt{(-٢ - ١)^٢ + (١ - ٦)^٢}$

$= \sqrt{(-٣)^٢ + (-٥)^٢}$

$= \sqrt{٩ + ٢٥}$

$ى ل = \sqrt{٣٤}$

ل $(-٢، ١)$ ، م $(٣، -٢)$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$ل م = \sqrt{(٣ - (-٢))^٢ + (-٢ - ١)^٢}$

$= \sqrt{٥^٢ + (-٣)^٢}$

$= \sqrt{٢٥ + ٩}$

$ل م = \sqrt{٣٤}$

ى $(١، ٦)$، م $(٣، -٢)$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$ى م = \sqrt{(٣ - ١)^٢ + (-٢ - ٦)^٢}$

$= \sqrt{٢^٢ + (-٨)^٢}$

$= \sqrt{٤ + ٦٤}$

$\overline{ءر} = \sqrt{٦٨}$

ولأن $\overline{ءل} = \overline{لر}$ فإن المثلث متطابق الضلعَين،

وحيث $\sqrt{٦٨} > \sqrt{٣٤}$، اختر $\overline{ءر}$ وترًا للمثلث.

باستخدام نظرية فيثاغورث، ليكون ء ل ر مثلثًا قائم الزاوية فيجب أن يكون:

$(\sqrt{٣٤})^٢ + (\sqrt{٣٤})^٢ = (\sqrt{٦٨})^٢$

أي ٣٤ + ٣٤ يجب أن يساوي ٦٨

$٦٨ = ٦٨$

وعليه، فإن المثلث قائم الزاوية في ل.

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٢} \times \sqrt{٣٤} \times \sqrt{٣٤}$

$= \frac{١}{٢} \times ٣٤$

= ١٧ وحدة مربعة.

٣) ء (أ، −١)، ل (−٥، أ)

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{ءل} = \sqrt{(-٥ - أ)^٢ + (أ - (-١))^٢}$

$= \sqrt{(-٥ - أ)^٢ + (أ + ١)^٢} = ٤\sqrt{٥}$

$\overline{ءل} = ٤\sqrt{٥}$

فيكون $٤\sqrt{٥} = \sqrt{(-٥ - أ)^٢ + (أ + ١)^٢}$

ربّع الطرفَين فتحصل على:

$٨٠ = (-٥ - أ)^٢ + (أ + ١)^٢$

$٨٠ = ٢٥ + ١٠أ + أ^٢ + أ^٢ + ٢أ + ١$

$٢أ^٢ + ١٢أ - ٥٤ = ٠$

$أ^٢ + ٦أ - ٢٧ = ٠$

$(أ + ٩)(أ - ٣) = ٠$

أ = −٩ أو أ = ٣

٥) ليكن ء (−٦، −٥)، ل (أ، ب)

نقطة منتصف القطعة المستقيمة هي:

$م = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

$م = \left(\frac{-٦ + أ}{٢}، \frac{-٥ + ب}{٢}\right)$ وهذا يساوي (−٢، −٣)

وعليه، يكون $\frac{-٦ + أ}{٢} = -٢$ و $\frac{-٥ + ب}{٢} = -٣$

$-٦ + أ = -٤$ و $-٥ + ب = -٦$

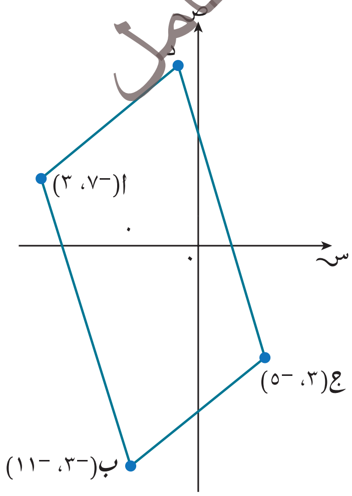
حل كل من المعادلتَين يعطي:

أ = ٢، ب = −١

عندما تحل مسائل تتعلق بالهندسة الإحداثية، استخدم الرسم دائمًا. تأكد من تسمية النقاط، ومن أنك وصلت بينها بالترتيب الصحيح كما هو منصوص عليه في السؤال.

٦) أ يبيّن الشكل المعلومات المتضمنة في السؤال.

تأكد من أن تصل بين النقاط بالترتيب الصحيح الآتي: ا ← ب ← ج ← د ← ا عكس اتجاه عقارب الساعة.



ا (−٧، ٣) ، ج (٣، −٥)

نقطة منتصف القطعة المستقيمة ا ج هي

$= \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢}\right)$

$= \left(\frac{-٧ + ٣}{٢} ، \frac{٣ + (-٥)}{٢}\right) = (-٢ ، -١)$

ب إحداثيات النقطة د هي (م، ن)

وحيث أن أ ب ج د متوازي أضلاع، فإن نقطة منتصف $\overline{\text{ب د}}$ هي النقطة نفسها لمنتصف $\overline{\text{أ ج}}$

إحداثيات نقطة منتصف $\overline{\text{ب د}}$ =

$\left(\frac{-٣ + \text{م}}{٢} ، \frac{-١١ + \text{ن}}{٢}\right) = (-٢ ، -١)$

المساواة بين الإحداثيات السينية يعطي:

$\frac{-٣ + \text{م}}{٢} = -٢$

$-٣ + \text{م} = -٤$

$\text{م} = -١$

المساواة بين الإحداثيات الصادية يعطي:

$\frac{-١١ + \text{ن}}{٢} = -١$

$-١١ + \text{ن} = -٢$

$\text{ن} = ٩$

فتكون إحداثيات د (−١، ٩).

ج أ(−٧، ٣)، ج (٣، −٥)

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\text{أ ج} = \sqrt{(٣ - (-٧))^٢ + (-٥ - ٣)^٢}$

$= \sqrt{١٠^٢ + (-٨)^٢}$

$= \sqrt{١٠٠ + ٦٤}$

$\text{أ ج} = \sqrt{١٦٤}$ أو $٢\sqrt{٤١}$

ب (−٣، −١١)، د (−١، ٩)

$\text{ب د} = \sqrt{(-١ - (-٣))^٢ + (٩ - (-١١))^٢}$

$= \sqrt{٢^٢ + ٢٠^٢}$

$= \sqrt{٤ + ٤٠٠}$

$\text{ب د} = \sqrt{٤٠٤}$ أو $٢\sqrt{١٠١}$

٧)

> انتبه! لم يذكر سؤال ٧ أن النقاط أ، د، ب تقع على خط مستقيم. إذا كان طول أ د يساوي طول د ب عندها تقع النقطة د في أي مكان على العمود المنصف للقطعة أ ب

المعطيات د (ك، ٢ك)، أ(٨، ١١) ، ب (١، ١٢)

وطول $\overline{\text{أ د}}$ يساوي طول $\overline{\text{ب د}}$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\text{أ د} = \sqrt{(٨ - \text{ك})^٢ + (١١ - ٢\text{ك})^٢}$

$\text{ب د} = \sqrt{(١ - \text{ك})^٢ + (١٢ - ٢\text{ك})^٢}$

$\sqrt{(٨ - \text{ك})^٢ + (١١ - ٢\text{ك})^٢} =$

$\sqrt{(١ - \text{ك})^٢ + (١٢ - ٢\text{ك})^٢}$

ربّع طرفَي المعادلة:

$(٨ - \text{ك})^٢ + (١١ - ٢\text{ك})^٢ =$

$(١ - \text{ك})^٢ + (١٢ - ٢\text{ك})^٢$

الطرف الأيمن يساوي:

$٦٤ - ١٦\text{ك} + \text{ك}^٢ + ١٢١ - ٤٤\text{ك} + ٤\text{ك}^٢$

$= ٥\text{ك}^٢ - ٦٠\text{ك} + ١٨٥$

الطرف الأيسر يساوي:

$١ - ٢\text{ك} + \text{ك}^٢ + ١٤٤ - ٤٨\text{ك} + ٤\text{ك}^٢$

$= ٥\text{ك}^٢ - ٥٠\text{ك} + ١٤٥$

$\therefore ٥\text{ك}^٢ - ٦٠\text{ك} + ١٨٥ = ٥\text{ك}^٢ - ٥٠\text{ك} + ١٤٥$

$١٠\text{ك} = ٤٠$

$\text{ك} = ٤$

٨) أ (−٦، ٣)، ب (٣، ٥)، ج (١، −٤)

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{\text{أ ج}} = \sqrt{(١ - (-٦))^٢ + (-٤ - ٣)^٢}$

$= \sqrt{٧^٢ + (-٧)^٢}$

$= \sqrt{٤٩ + ٤٩}$

$\overline{\text{أ ج}} = \sqrt{٩٨}$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{\text{أ ب}} = \sqrt{(٣ - (-٦))^٢ + (٥ - ٣)^٢}$

$= \sqrt{٩^٢ + ٢^٢}$

$= \sqrt{٨١ + ٤}$

$\overline{\text{أ ب}} = \sqrt{٨٥}$

استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

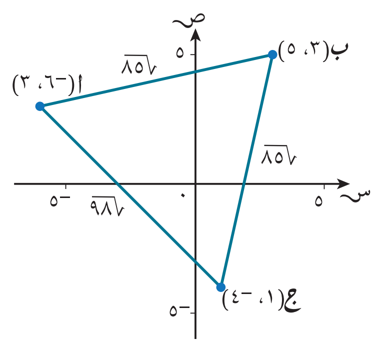
$\overline{\text{ب ج}} = \sqrt{(١ - ٣)^٢ + (-٤ - ٥)^٢}$

$= \sqrt{(-٢)^٢ + (-٩)^٢}$

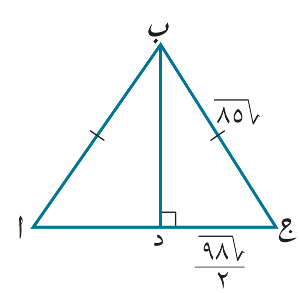
$= \sqrt{٤ + ٨١}$

$\overline{\text{ب ج}} = \sqrt{٨٥}$

إذًا $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{ب ج}}$ ، ويكون المثلث أ ب ج متطابق الضلعَين.



لا نعرف ما إذا كان هذا المثلث قائم الزاوية، ولكننا يمكن أن نحسب مساحته. لتكن ى نقطة منتصف القطعة $\overline{\text{أ ج}}$ فيكون $\overline{\text{ب ى}}$ هو ارتفاع المثلث.



استخدم نظرية فيثاغورث لتجد طول ب ى:

$\overline{\text{ب ى}} = \sqrt{(\sqrt{٨٥})^٢ - \left(\frac{\sqrt{٩٨}}{٢}\right)^٢}$

$= \sqrt{٨٥ - \frac{٩٨}{٤}}$

$\overline{\text{ب ى}} = \sqrt{\frac{١٢١}{٢}}$

مساحة المثلث أ ب ج = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٢}\left(\sqrt{\frac{١٢١}{٢}} \times \sqrt{٩٨}\right)$

= ٣٨,٥ وحدة مربعة

٩) استخدم نظرية فيثاغورث لتحصل على:

$\overline{\text{أ ب}} = \sqrt{(٣ - (-٧))^٢ + (\text{ك} - ٨)^٢}$

$= \sqrt{١٠^٢ + (\text{ك} - ٨)^٢}$

$= \sqrt{١٠٠ + \text{ك}^٢ - ١٦\text{ك} + ٦٤}$

$\overline{\text{أ ب}} = \sqrt{\text{ك}^٢ - ١٦\text{ك} + ١٦٤}$

$\overline{\text{ب ج}} = \sqrt{(٨ - ٣)^٢ + (٥ - \text{ك})^٢}$

$= \sqrt{٢٥ + ٢٥ - ١٠\text{ك} + \text{ك}^٢}$

$= \sqrt{\text{ك}^٢ - ١٠\text{ك} + ٥٠}$

لأن $\overline{\text{أ ب}} = ٢\,\overline{\text{ب ج}}$ فيكون:

$\sqrt{\text{ك}^٢ - ١٦\text{ك} + ١٦٤} = ٢\sqrt{\text{ك}^٢ - ١٠\text{ك} + ٥٠}$

ربّع الطرفَين لتحصل على:

$\text{ك}^٢ - ١٦\text{ك} + ١٦٤ = ٤(\text{ك}^٢ - ١٠\text{ك} + ٥٠)$

$\text{ك}^٢ - ١٦\text{ك} + ١٦٤ = ٤\text{ك}^٢ - ٤٠\text{ك} + ٢٠٠$

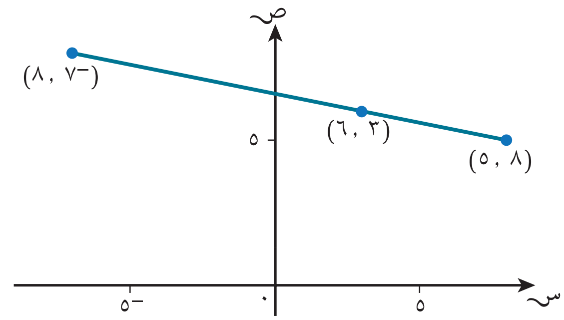
$٣\text{ك}^٢ - ٢٤\text{ك} + ٣٦ = ٠$

$\text{ك}^٢ - ٨\text{ك} + ١٢ = ٠$

$(\text{ك} - ٦)(\text{ك} - ٢) = ٠$

ك = ٢ أو ك = ٦

ك = ٦ حل مرفوض لأنها تجعل الشكل مستقيمًا وليس مثلثًا (لاحظ الرسم).



الحل، ك = ٢

١٠) س + ص = ٤ .... (١)

$ص = ٨ - \frac{٥}{س}$ .... (٢)

حلّ المعادلتَين (١) و(٢) بشكل آني يعطي النقطتَين ا، ب

من المعادلة (١) ص = ٤ − س

عوّض عن ص في المعادلة (٢) لتحصل على:

$٤ - س = ٨ - \frac{٥}{س}$

$٤س - س^{٢} = ٨س - ٥$

$س^{٢} + ٤س - ٥ = ٠$

(س − ١)(س + ٥) = ٠

س = ١ أو س = −٥

عوّض عن س = ١ في معادلة (١) لتحصل على:

١ + ص = ٤ ومنها ص = ٣

عوّض عن س = −٥ في معادلة (١) لتحصل على:

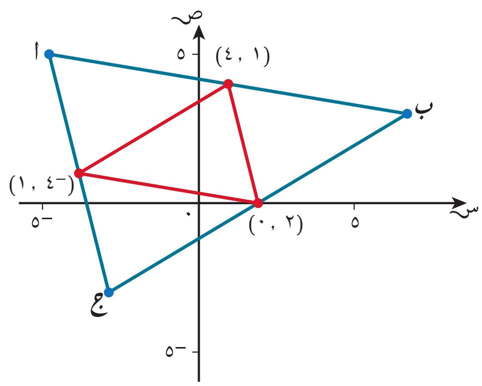
−٥ + ص = ٤ ومنها ص = ٩

النقطتان هما ا (١، ٣) ، ب (−٥، ٩)

نقطة منتصف $\overline{اب} = \left(\frac{١ + (-٥)}{٢} ، \frac{٣ + ٩}{٢}\right)$

أو (−٢، ٦)

١٢)



لتكن إحداثيات ا $(س_{١}، ص_{١})$

ب $(س_{٢}، ص_{٢})$

ج $(س_{٣}، ص_{٣})$

نقطة منتصف $\overline{اب} = \left(\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢} ، \frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢}\right)$

= (١، ٤)

$\therefore \frac{س_{١} + س_{٢}}{٢} = ١$ أو $س_{١} + س_{٢} = ٢$ .... (١)

$\frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢} = ٤$ أو $ص_{١} + ص_{٢} = ٨$

نقطة منتصف $\overline{بج} = \left(\frac{س_{٢} + س_{٣}}{٢} ، \frac{ص_{٢} + ص_{٣}}{٢}\right)$

= (٢، ٠)

$\therefore \frac{س_{٢} + س_{٣}}{٢} = ٢$ أو $س_{٢} + س_{٣} = ٤$

$\frac{ص_{٢} + ص_{٣}}{٢} = ٠$ أو $ص_{٢} + ص_{٣} = ٠$

نقطة منتصف $\overline{اج} = \left(\frac{س_{١} + س_{٣}}{٢} ، \frac{ص_{١} + ص_{٣}}{٢}\right)$

= (−٤، ١)

$\therefore \frac{س_{١} + س_{٣}}{٢} = -٤$ أو $س_{١} + س_{٣} = -٨$

$\frac{ص_{١} + ص_{٣}}{٢} = ١$ أو $ص_{١} + ص_{٣} = ٢$

أصبح لدينا:

$س_١ + س_٢ = ٢$ .... (١)

$س_٢ + س_٣ = ٤$ .... (٢)

$س_١ + س_٣ = -٨$ .... (٣)

اطرح (٢) من (١) لتحصل على:

$س_١ - س_٣ = -٢$ .... (٤)

أضف (٤) إلى (٣) لتحصل على:

$٢س_١ = -١٠$، فيكون $س_١ = -٥$

وحيث إن $س_١ + س_٢ = ٢$

$-٥ + س_٢ = ٢$، فيكون $س_٢ = ٧$

وحيث إن $س_١ + س_٣ = -٨$

$-٥ + س_٣ = -٨$، فيكون $س_٣ = -٣$

كما أن لدينا:

$ص_١ + ص_٢ = ٨$ .... (٥)

$ص_١ + ص_٣ = ٠$ .... (٦)

$ص_٢ + ص_٣ = ٢$ .... (٧)

اطرح (٦) من (٥) لتحصل على:

$ص_٢ - ص_٣ = ٨$ .... (٨)

ثم أضف (٨) إلى (٧) لتحصل على:

$٢ص_٢ = ١٠$، فيكون $ص_٢ = ٥$

وحيث إن $ص_١ + ص_٢ = ٨$

$٥ + ص_١ = ٨$ ، ∴ $ص_١ = ٣$

وحيث إن $ص_٢ + ص_٣ = ٢$

$٥ + ص_٣ = ٢$ فيكون $ص_٣ = -٣$

الحلّ هو أ (-٥، ٥) ، ب (٧، ٣)، ج (-٣، -٣)

تمارين ٥-٢

١) أ أ(-٦، ٤) ، ب (٤، ٦) ، ج (١٠، ٧)

ميل $\overline{أب}$ =

$= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{٦ - ٤}{٤ - (-٦)}$

$= \frac{١}{٥}$

ميل $\overline{ب ج}$ $= \frac{٧ - ٦}{١٠ - ٤}$

$= \frac{١}{٦}$

ب على الرغم من أن $\overline{أب}$ و $\overline{ب ج}$ يشتركان في النقطة ب فإن النقاط أ ، ب ، ج لا تقع على مستقيم واحد، لأن ميل $\overline{أب}$ لا يساوي ميل ب ج

٢) نقطة منتصف د(-٤، ٥) و ل (٦، ١) هي:

$م = \left(\frac{-٤ + ٦}{٢}، \frac{٥ + ١}{٢}\right)$

م = (١، ٣)

إحداثيات ر (-٣، -٧)

ميل $\overline{ر م}$ $= \frac{-٧ - ٣}{-٣ - ١}$، أو $\frac{٥}{٢}$

ميل $\overline{د ل}$ $= \frac{١ - ٥}{٦ - (-٤)}$ أو $-\frac{٢}{٥}$

إذا كان ميلا مستقيمَين متعامدَين هما $م_١$، $م_٢$ فإن

$م_١ \times م_٢ = -١$

$\frac{٥}{٢} \times \frac{٢}{٥} = -١$ فيكون $\overline{ر م}$ عموديًا على $\overline{د ل}$