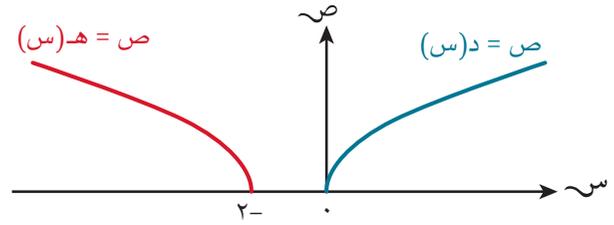


أُتبع بـ:

$$\overline{انسحاب\ بالمتجه\ (2^-)}\ يعطي\ د(س) = \sqrt{-(س + 2)}$$

$$\overline{د(س) = \sqrt{2 - س}}$$



(11) إذا علمت أن $ص = د(س)$ حولت منحنى

$$ص = د(2س + 10)$$

$$\overline{انسحاب\ بالمتجه\ (10^-)}\ يعطي\ ص = د(س + 10)$$

أُتبع بـ:

$$\overline{تمدد\ مواز\ لمحور\ السينات\ معامله\ \frac{1}{4}}\ يعطي$$

$$ص = د(2س + 10)$$

أو

$$\overline{تمدد\ مواز\ لمحور\ السينات\ معامله\ \frac{1}{4}}\ يعطي$$

$$ص = د(2س)$$

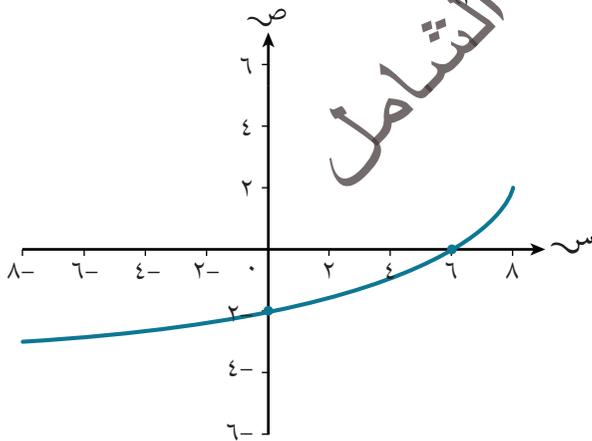
أُتبع بـ:

$$\overline{انسحاب\ بالمتجه\ (0^-)}\ يعطي\ ص = د(2(س + 5))\ أو$$

$$ص = د(2س + 10)$$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية

- تحويل هندسي رأسي: انعكاس حول محور السينات ليعطي $ص = د(\frac{1}{4}س)$.
(ترتيب إجراء التحويلين الهندسيين غير مهم)



ب) $ص = د(س)$ تحول إلى $ص = د(س - 3)$

بإجراء تحويلين هندسيين:

- انسحاب أفقي بالمتجه (3^-) ليعطي:
- $ص = د(س + 3)$ ، يتبعه:

1) أ) د: $ص = س - 3$

$$هـ(د) = هـ(س - 3)$$

$$= 5(س - 3) - [2(1 - (س - 3))]$$

$$= 5س - 15 - [1 + 6س - 2س^2]$$

$$= 5س - 15 - 1 - 6س + 2س^2$$

$$= 2س^2 - س - 16$$

$$= 9 - 6 - (س - \frac{2}{3})$$

$$= 9 - 6 - [(\frac{7}{6} - س)]$$

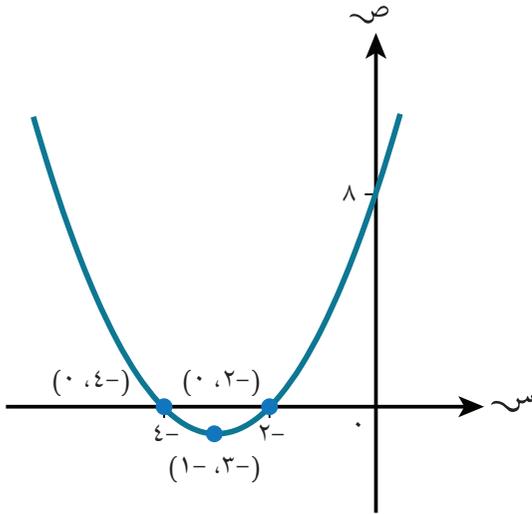
$$= 9 - 6 - (\frac{7}{6} - س) + \frac{49}{4}$$

$$= 9 - \frac{25}{4} - (\frac{7}{6} - س)$$

2) أ) تحويل التمثيل البياني $ص = د(س)$ إلى

$$ص = د(\frac{1}{4}س) \text{ بتحويلين هندسيين:}$$

- تحويل هندسي أفقي: تمدد موازي لمحور السينات معامله $\frac{1}{4}$ ليعطي $ص = د(\frac{1}{4}س)$



حلّ بديل؛

بعد أن تجد المقطعين من محور السينات،
يمكن أن تجد الإحداثي السيني لرأس المنحى
التربيعي بأن تجد إحداثيات نقطة المنتصف
لهما:

$$س = \frac{-4 - 2}{2} = -3، \text{ أو } س = -3$$

ثمّ عوّض عن $س = -3$ في الدالة $ص = د(س)$
لتجد الإحداثي الصادي لرأس المنحى
التربيعي.

$$ص = د(س) = (-3)^2 + 6(-3) + 8 = 9 - 18 + 8 = -1$$

$$ص = د(س) = 9 - 18 + 8 = -1$$

$$ص = د(س) = -1$$

فيكون رأس المنحى التربيعي هو النقطة
 $(-1، -3)$.

ب المعطى $ص = س^2 + 6س + 8$ ،

إجراء انسحاب بالمتجه (2) يمثل بتعويض

$س - 2$ بدل كل $س$ في الدالة:

$$ص = (س - 2)^2 + 6(س - 2) + 8$$

$$ص = س^2 - 4س + 4 + 6س - 12 + 8$$

$$ص = س^2 + 2س$$

أجر تمددًا رأسيًا معاملته 3 لتحصل على:

$$ص = 3(س^2 + 2س)$$

$$ص = 3س^2 + 6س$$

• انعكاس حول محور الصادات ليعطي:

$$ص = د(-س + 3)$$

أو

• انعكاس حول محور الصادات ليعطي:

$$ص = د(-س) \text{ يتبعه:}$$

• انسحاب بالمتجه (3) ليعطي:

$$ص = د(-س - 3) \text{ أو } ص = د(3 - س)$$

٣ ا ص = س² + 6س + 8

منحنى $د(س) = س^2 + 6س + 8$ هو تمثيل

بياني تربيعي شكله المأكمّل المربع لتجد

إحداثيات الرأس:

$$د(س) = س^2 + 6س + 8$$

$$د(س) = (س + 3)^2 - 1$$

$$د(س) = (س + 3)^2 - 1$$

رأس المنحى التربيعي $(-3، -1)$

لتجد نقطة تقاطع المنحى مع محور الصادات

عوّض عن $س = 0$ فيكون:

$$د(س) = 0^2 + 6(0) + 8 = 8$$

$$د(س) = 8$$

المقطع الصادي عند النقطة $(0، 8)$

لتجد المقطع من محور السينات عوّض عن

$د(س) = 0$ فيكون:

$$0 = س^2 + 6س + 8$$

$$0 = (س + 2)(س + 4)$$

وعليه فإن إما: $س + 2 = 0$ ومنها $س = -2$

أو: $س + 4 = 0$ ومنها $س = -4$

المقطع السيني عند النقطة $(-4، 0)$ والنقطة

$$(-2، 0)$$

الحلول الإلكترونية

٤ المعطى: د: $s \leftarrow s^2 - 4$ ، $s \leq 0$.

أ $s^2 - 4 = s$

$s = s^2 - 4$

$s^2 = s + 4$

ص $\sqrt{s+4} = s$ خذ الجذر الموجب حيث مجال

الدالة العكسية هو $s \leq -4$

د- $(s) = \sqrt{s+4}$

مجال الدالة د- (s) هو نفس مدى الدالة

د (س).

منحنى الدالة $s^2 - 4 = s$ هو منحنى تربيعي

شكله \cap ورأسه عند النقطة $(-4, 0)$ وتمثل

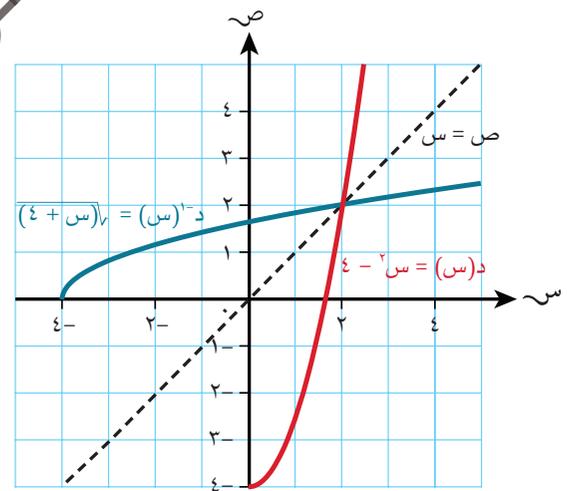
قيمة صغرى.

(وهي انسحاب للدالة $s^2 - 4 = s$ بالمتجه $(0, 4)$).

مدى الدالة د (س) $= s^2 - 4$ هو د (س) ≤ -4

مجال الدالة د- (s) هو $s \leq -4$

ب



٥ أ $s^2 - 4 = s - 6 \Rightarrow s^2 - s - 10 = 0$

$= -[(3 - s)^2 - 23]$

$= -23 + 2(3 - s) - 4$

$= -4 + 2(3 - s)$

ب منحنى الدالة د: $s \leftarrow s^2 - 4 + 6 = s - 2$ أو

د: $s \leftarrow s^2 - 4 + 6 = s - 2$ هو منحنى تربيعي

شكله \cap ورأسه عند النقطة $(2, 4)$ وتمثل قيمة

عظمى.

ومع ذلك، عندما تكون الدالة واحد إلى واحد،

$s \leq 3$ فيكون أقل قيمة ممكنة لـ m هي 3

ج د: $s \leftarrow s^2 - (3 - s) + 4$

$s = s^2 - (3 - s) + 4$

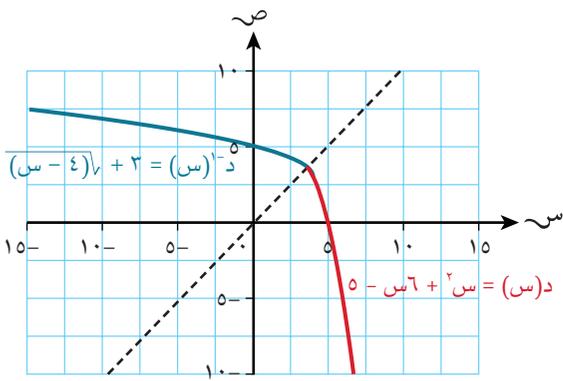
$s = s^2 - 3 + s + 4$

$0 = s^2 - 2s + 1$

$s - 1 = \sqrt{s - 4}$

$s - 1 + 3 = \sqrt{s - 4}$

د- $(s) = \sqrt{s - 4} + 3$



وحيث أن $m = 5$ فإن $s \leq 5$

تتحقق الدالة العكسية لأنها دالة واحد إلى واحد

لكل $s \leq 3$

من الشكل مدى د عندما $s \leq 5$ هو

د (س) ≥ 0

وعليه يكون، مجال د- (s) هو $s \geq 0$

٦ أ $s^2 - 4 = s + k$

د (س) $= (s - 2)^2 - 2 + k$

د (س) $= (s - 2)^2 - 2 + k + 4$

ب منحنى د (س) $= (s - 2)^2 - 2 + k - 4$ هو

منحنى تربيعي شكله \cup . ورأسه عند النقطة

$(2, k - 4)$ يمثل قيمة صغرى.

القيمة الصغرى للدالة د (س) هي $k - 4$

(عندما $s = 2$)

مدى د (س) هو د (س) $\leq k - 4$

ج (د) $(س) = ٣ - ٢$ لكل $١ - س \geq ١ \geq س$

ص $٣ - س = ٢$

س $٣ - ص = ٢$

ص $٣ + س = ٢$

ص $\frac{١}{٣} = (س + ٢)$

د $١^{-١} = (س) = \frac{١}{٣} = (س + ٢)$

د (س) $\frac{٤}{س - ٥} =$ لكل $١ > س \geq ٤$

ص $\frac{٤}{س - ٥} =$

س $\frac{٤}{س - ٥} =$

س $(٥ - ص) = ٤$

ص $٥ - ص = \frac{٤}{س}$

ص $\frac{٤}{س} - ٥ =$

د $١^{-١} = (س) = \frac{٤}{س} - ٥ =$

الحل:

د $١^{-١} = (س) = \frac{١}{٣} = (س + ٢)$ لكل $٥ - س \geq ١ \geq س$

د $١^{-١} = (س) = \frac{٤}{س} - ٥ =$ لكل $١ > س \geq ٤$

د (س) $\frac{٤}{س} - ٥ = ٢ - ٣$ لكل $١١ + س$ ، لكل $س \in \mathbb{C}$

$\frac{٤}{س} - ٥ = ٢ - ٣$

$\frac{٤}{س} - ٥ = ٢ - ٣$

$\frac{٤}{س} - ٥ = ٢ - ٣$

د (س) $\frac{٤}{س} - ٥ = ٢ - ٣$

منحنى الدالة د (س) $\frac{٤}{س} - ٥ = ٢ - ٣$

منحنى تربيعي شكله ل رأسه عند النقطة

(٣، -٢٥) وهي نقطة قيمة صغرى.

ب هـ (س) $\frac{٤}{س} - ٥ = ٢ - ٣$ لكل $١ \geq س$

هـ (س) $\frac{٤}{س} - ٥ = ٢ - ٣$

هـ (١) $\frac{٤}{١} - ٥ = ٢ - ٣$

هـ (١) $٩ =$

ج تكون الدالة واحد إلى واحد، عندما $س \leq ٢$

وأقل قيمة ممكنة ل هي ٢

د (س) $= (س - ٢)٤ + ك$ أو

ص $= (س - ٢)٤ + ك - ٤$

س $= (س - ٢)٤ + ك - ٤$

ص $= (س - ٢)٤ + ك - ٤$

ص $= ٢ - \sqrt{س - ٤} + ك$

ص $= ٢ - \sqrt{س - ٤} + ك$ (نأخذ الجذر الموجب

حيث مجال الدالة العكسية $س \leq ك - ٤$)

ص $= ٢ + \sqrt{س - ٤} + ك$

د $١^{-١} = (س) = ٢ + \sqrt{س - ٤} + ك$

الدالة العكسية موجودة (محققمة) لأنها دالة

واحد إلى واحد لكل $س \leq ٢$

مجال د $١^{-١}$ هو نفس مدى د (س)

فيكون مجال د $١^{-١}$ هو $س \leq ك - ٤$

د (س) $= ٣ - ٢$ لكل $١ - س \geq ١ \geq س$

عوض $س = ١ -$ في الدالة د (س) $= ٣ - ٢$

لتحصل على:

د $(١ -) = (١ -)٣ - (١ -)٢$ أو $٥ -$

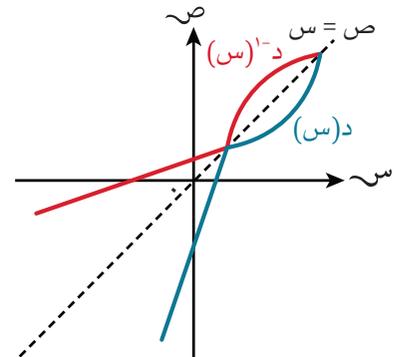
عوض عن $س = ٤$ في الدالة د (س) $= \frac{٤}{س - ٥}$

لتحصل على:

د $(٤) = \frac{٤}{٤ - ٥}$ أو ٤

مدى د (س) هو $٥ - \geq د (س) \geq ٤$

ب



٩) أ (د) $2 = 2s^2 - 12s + 13$ ، لكل $s \leq 3$.

$$\begin{aligned} 2 &= (2s^2 - 12s + 13) \\ 2 &= 2(s^2 - 6s + 6.5) \\ 2 &= 2[(s-3)^2 - 2.5] \\ 2 &= 2(s^2 - 6s + 18 - 2.5) \\ 2 &= 2(s^2 - 6s + 15.5) \\ 2 &= 2(s^2 - 6s + 9 - 2.5) \\ 2 &= 2(s-3)^2 - 5 \end{aligned}$$

ب) منحنى الدالة $d(s) = 2(s-3)^2 - 5$ منحنى

تربيعي شكله \cup ورأسه عند $(3, -5)$ وهي نقطة قيمة صغرى.

ومع ذلك للدالة واحد إلى واحد حيث $s \leq 3$ ، تكون أصغر قيمة ممكنة لـ k هي 3

ج) $s \leq 7$

$$5 - 2(3 - 7)^2 \leq d(s)$$

و يكون مدى $d(s)$ هو $d(s) \leq 27$

$$5 - 2(3 - s)^2 = d(s)$$

$$5 - 2(3 - s)^2 = s$$

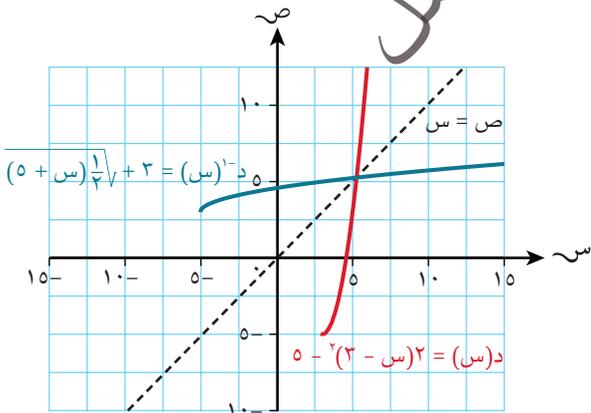
$$5 - 2(3 - s)^2 = s$$

$$5 + s = 2(3 - s)^2$$

$$(5 + s)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2(3 - s)}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(25 + s)} \pm 3 = \sqrt{2(3 - s)}$$

خذ الجذر الموجب (انظر الشكل أدناه).



$$\sqrt{\frac{1}{2}(25 + s)} + 3 = \sqrt{2(3 - s)}$$

مجال الدالة العكسية نفس مدى الدالة.

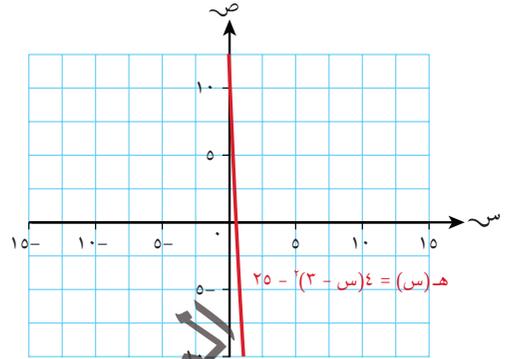
$$\text{مجال } d^{-1}(s) \text{ هو } s \leq 27$$

من منحنى هـ $4s^2 - 24s + 11 = 0$ ، لكل

$s \geq 1$ يكون المدى هـ $9 - (s)$

(يمكن التوصل لهذه الإجابة من تعويض قيم

أخرى لـ s أقل من 1 في هـ $((s))$).



$$25 - 2(3 - s)^2 = h(s)$$

$$25 - 2(3 - s)^2 = s$$

$$25 - 2(3 - s)^2 = s$$

$$25 + s = 2(3 - s)^2$$

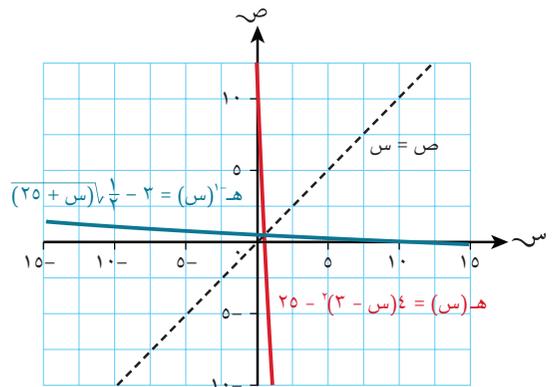
$$(25 + s)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2(3 - s)}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(25 + s)} \pm 3 = \sqrt{2(3 - s)}$$

خذ الجذر السالب (انظر

الشكل أدناه)

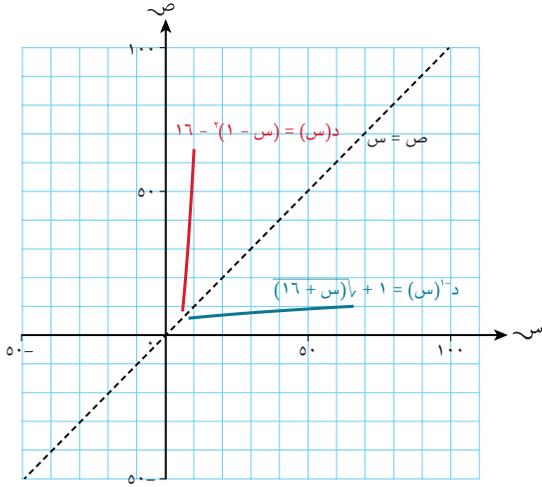
$$h^{-1}(s) = \sqrt{\frac{1}{2}(25 + s)} - 3 = s$$



مجال h^{-1} هو $s \leq 9$

خذ الجذر الموجب (انظر الشكل).

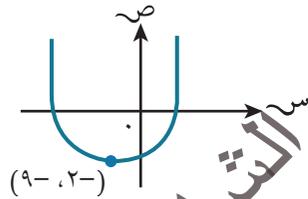
$$د^{-1} = (س) \sqrt{16 + س} \pm 1$$



$$(11) \text{ د(س) = س}^2 + 4س - 5$$

$$\text{أ} \quad \text{س}^2 + 4س - 5 = 0 \Rightarrow \text{س}^2 + 4س - 5 = 0$$

$$\text{ب} \quad \text{د(س)} \leq 9$$



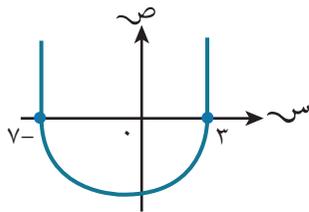
$$\text{ج} \quad \text{س}^2 + 4س - 5 > 0$$

$$\text{س}^2 + 4س - 5 > 0 \Rightarrow \text{س}^2 + 4س - 5 > 0$$

$$\text{س}^2 + 4س - 5 > 0 \Rightarrow \text{س}^2 + 4س - 5 > 0$$

$$\text{س}^2 + 4س - 5 > 0 \Rightarrow (\text{س} + 5)(\text{س} - 1) > 0$$

$$\text{س} = 3 \text{ أو } \text{س} = 7$$



$$3 > \text{س} > 7$$

$$(10) \text{ أ} \quad \text{س}^2 - 2س - 15 = 0$$

$$15 - 21 - 2(1 - س) =$$

$$16 - 2(1 - س) =$$

$$\text{ب} \quad \text{د: س} \leftarrow \text{س}^2 - 2س - 15 = 0$$

$$\text{د: س} \leftarrow 16 - 2(1 - س) =$$

منحنى الدالة د: س $\leftarrow 16 - 2(1 - س)$ هو

منحنى تربيعي شكله ل. رأسه عند (1, 16) وهي

نقطة قيمة عظمى.

لذا، إذا كان مدى الدالة د هو ج $\Rightarrow \text{د(س)} \geq 0$ ،

$$\text{فإن ج} = 16$$

ج إذا كان ج = 9، د = 65 عوض عن ج = 9 في

د(س) لتحصل على:

$$9 = 16 - 2(1 - ل)$$

$$25 = 2(1 - ل)$$

$$ل - 1 = 12.5$$

ل = -4 أو ل = 13.5، لكن ل قيمة موجبة لذا ل = 13.5

عوض د = 65 في الدالة د(س) لتحصل على:

$$65 = 16 - 2(1 - ك)$$

$$81 = 2(1 - ك)$$

$$ك - 1 = 40.5$$

ك = -39.5 أو ك = 41.5، لكن ك موجبة لذا ك = 41.5

مجال الدالة هو $6 \leq \text{س} \leq 10$

الحل هو ل = 6، ك = 10

$$\text{د: س} \leftarrow 16 - 2(1 - س) =$$

$$16 - 2(1 - س) =$$

$$16 - 2(1 - س) =$$

$$16 + س = 2(1 - س)$$

$$\text{ص} - 1 = \sqrt{16 + س}$$

$$\text{ص} = \sqrt{16 + س} \pm 1$$

$$\text{د}^{-1} = (س) \sqrt{16 + س} \pm 1$$

الحل الإلكتروني والشاكر

د أوجد أولاً د^{-١}(س):

$$ص = ١ + س^٢$$

$$ص = ١ + ٢ص$$

$$٢ص = س - ١$$

$$ص = \frac{١}{٢}(س - ١)$$

فيكون، د^{-١}(س) = $\frac{١}{٢}(س - ١)$

وعليه فإن، (د^{-١}هـ)(س) = د^{-١}(س^٢ - ٢)

$$\frac{١}{٢}(س^٢ - ٢ - ٢) =$$

$$\frac{١}{٢}(س^٢ - ٤) =$$

هـ ع: س ← س^٢ - ٢ لكل س ≥ ٠

$$ص = س^٢ - ٢$$

$$ص = ٢ - س^٢$$

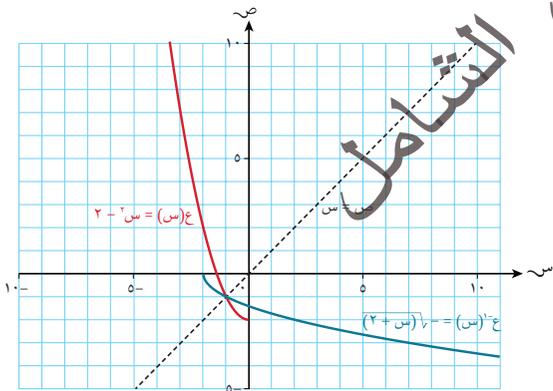
$$ص^٢ = س + ٢$$

$$ص = \pm \sqrt{س + ٢}$$

خذ الجذر السالب لأن مجال ح^{-١}(س) يساوي

مدى ح(س) (انظر الشكل أدناه)

$$إذن ح^{-١}(س) = -\sqrt{س + ٢}$$



١٣ ا د: س ← س^٢ - ٢س + ٨ + ١٠ لكل س ≥ ٠

$$د(س) = ١٠ + ٨س - ٢س^٢$$

$$١٠ + (س^٢ - ٢س) =$$

$$١٠ + [٢٢ - ٢(٢ - س)] =$$

$$١٠ + ٨ - ٢(٢ - س) =$$

$$٢ + ٢(٢ - س) =$$

د (هـ ○ د)(س) = هـ(س^٢ + ٢س - ٥)

$$٠ = ٢(س^٢ + ٢س - ٥) + ٥$$

$$٠ = ٢س^٢ + ٤س - ١٠ + ٥$$

$$٠ ≤ ٢س^٢ - ٤س + ٥$$

$$٠ ≤ (٢س - ١٠) × ٢ + ٤ - ٢٨$$

$$٠ ≤ ٤س - ٨٠ + ٦٤$$

$$٠ ≤ ٤س - ١٤$$

$$\frac{١٤٤ - ٤س}{٨} ≤ \frac{٤س - ١٤}{٨}$$

$$١٨ ≥ ٤س$$

١٢ د: س ← س^٢ + ١ لكل س ≥ ٠

هـ: س ← س^٢ - ٢ لكل س ≥ ٠

ا (د ○ هـ)(س) = د(س^٢ - ٢)

$$١ + (س^٢ - ٢) =$$

$$٣ - ٢س$$

هـ ○ د(س) = هـ(س^٢ + ١)

$$٢ - (س^٢ + ١) =$$

$$٢ - ١ + س^٢ =$$

$$١ + س^٢ =$$

ب (د ○ هـ)(أ) = (هـ ○ د)(أ)

$$١ - ٢أ = ٣ - ٢أ$$

$$٠ = ٢ + ٢أ - ٢أ$$

$$٠ = ٢ + ٢أ - ٢أ$$

$$٠ = ٢(١ + أ)$$

$$٠ = ١ + أ$$

$$١ - أ = أ$$

ج هـ(ب) = ب

$$ب = ٢ - ٢ب$$

$$٠ = ٢ - ٢ب$$

$$٠ = (٢ - ب)(١ + ب)$$

ب = ٢ أو ب = ١ (يرفض لأن ب ≠ ١)

$$٢ = ب$$

من المهم أن تعرف الفرق بين رسم المنحنى وتعيينه. رسم المنحنى يُظهر الأجزاء المهمة منه. ليس مهماً تحديد مقياس رسم دقيق عند رسم المنحنى لكن من المهم أن تُسمى الأجزاء بشكل صحيح. من الضروري عند رسم المنحنى أيضاً تحديد أي مستقيم أو نقطة بدقة نسبة لبعضها ونسبة للمحورين.

تعيين المنحنى يعني أن ترسم المحورين وتحدد إحداثيات النقاط بدقة وتمثلها على ورقة رسم بياني.

ب) منحنى الدالة د: $s \mapsto 2(2-s)^2 + 2$ منحنى تربيعي شكله ل رأس القطع عند (2, 2) وهي قيمة صغرى.

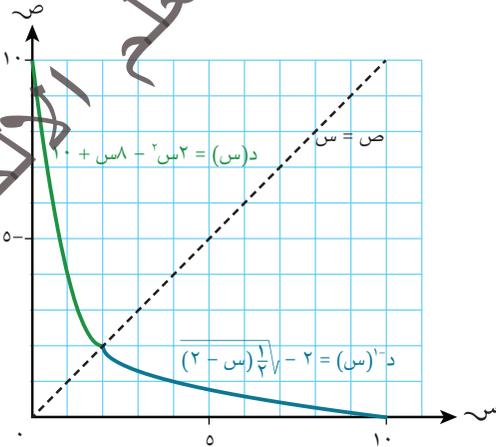
مدى الدالة د هو $2 \leq (s)$ ومع ذلك هناك قيد لأن مجال د(س) هو $0 \leq s \leq 2$

عوض قيم س في مدى د(س) لتحصل على مدى الدالة د(س).

مدى د(س) هو $2 \leq (s) \leq 10$

ج) مجال د⁻¹(س) نفس مدى د(س).

أي أنه: $2 \leq s \leq 10$



سمات المنحنى هي:

د(س): نصف منحنى تربيعي بين النقطة

(0, 10) والنقطة (2, 2).

هـ(س): مستقيم يمر بنقطة الأصل ويشكل

زاوية قياسها 45° مع محور السينات.

منحنى د⁻¹(س): انعكاس لمنحنى د(س) حول

المستقيم هـ(س).

ملاحظة: ليس ضرورياً أن تجد د⁻¹(س) لتكمل

الرسم. يمكنك أن تستخدم حقيقة أن منحنى

د⁻¹(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) في المستقيم

ص = س

هـ) $2 + 2(2-s)^2 = d(s)$

$$2 + 2(2-s)^2 = v$$

$$2 + 2(2-v)^2 = s$$

$$2 - s = 2(2-v)^2$$

$$(2-s) \frac{1}{2} = 2(2-v)^2$$

$$v - 2 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(2-s)} \quad \text{خذ الجذر السالب}$$

(انظر الشكل)

$$v - 2 = -\sqrt{\frac{1}{2}(2-s)}$$

$$d^{-1}(s) = \sqrt{\frac{1}{2}(2-s)} - 2$$

١٤) أ) $8 - 2s + s^2 = d(s)$

$$8 - (2s + s^2) = v$$

$$8 - [2(1+s) - 1] = s$$

$$10 - 2(1+s) = v$$

ب) منحنى د(س) $10 - 2(1+s) = v$

المنحنى التربيعي على النحو ل

نعرف ذلك لأن معامل س² في د(س) = 2س² +

٤س - ٨ موجب.

إحداثيات الرأس (-1, 10)

في الدالة واحد إلى واحد توجد مخرجة واحدة

لكل مدخلة والنعكس صحيح.

لتكون الدالة واحدًا إلى واحد فإن قيم $k \geq 1$

أقل قيمة $k = 1$

١٥ أ د(س) = $2s^2 - 2s + 4$

$$2s^2 - 2s + 4 \leq 7$$

$$2s^2 - 2s - 3 \leq 0$$

$$(s-3)(s+1) \leq 0$$

منحنى ص = $(s-3)(s+1)$ تربيعي على

النحو U

يتقاطع مع المحور السيني عند $s = 3$ ، $s = -1$

نريد $2s^2 - 2s + 4 \leq 7$ وهو جزء المنحنى من

المحور السيني وفوقه.

وعليه، $s \leq 3$ أو $s \geq -1$

ب $2s^2 - 2s + 4 = 2(1-s) + 2 = 4$

$$= 3 + 2(1-s)$$

ج منحنى د(س) = $3 + 2(1-s)$ تربيعي

على النحو U

رأس المنحنى (أدنى نقطة) (1، 3)

المدى هو د(س) ≤ 3

الحلول الإلكترونية الشامل