و $\text{د(س)} = \text{س} - ٢\sqrt{\text{س} + ١} + ١$

$(\text{ل} \circ \text{ي})(\text{س}) = \text{ل}(\sqrt{\text{س} + ١} - ١)$

$= (\sqrt{\text{س} + ١} - ١)^{٢} - ١$

$= \text{س} + ١ - ٢\sqrt{\text{س} + ١} + ١ - ١$

$= \text{س} - ٢\sqrt{\text{س} + ١}$

فيكون، $\text{د(س)} = (\text{ل} \circ \text{ي})(\text{س})$

الإجابة هي $(\text{ل} \circ \text{ي})(\text{س})$

المجال: س $\in$ ع، س $\neq$ −١،

المدى د(س) $\in$ ع، د(س) $\neq$ −١

تمارين ٢-٣

١) ب $\text{د(س)} = \text{س}^{٢} + ٣$ حيث س $\in$ ع، س $\geqslant$ ٠

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٣$

$\text{س} = \text{ص}^{٢} + ٣$

$\text{ص}^{٢} = \text{س} - ٣$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س} - ٣}$

$\text{د}^{-١}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٣}$

هـ $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س} + ٧}{\text{س} + ٢}$

$\text{ص} = \dfrac{\text{س} + ٧}{\text{س} + ٢}$

$\text{س} = \dfrac{\text{ص} + ٧}{\text{ص} + ٢}$

$\text{س}(\text{ص} + ٢) = \text{ص} + ٧$

$\text{س ص} + ٢\text{س} = \text{ص} + ٧$

$\text{س ص} - \text{ص} = ٧ - ٢\text{س}$

$\text{ص} = \dfrac{٧ - ٢\text{س}}{\text{س} - ١}$

$\text{د}^{-١}(\text{س}) = \dfrac{٧ + ٢\text{س}}{\text{س} - ١}$

٢) أ $\text{د}: \text{س} \longmapsto \text{س}^{٢} + ٤\text{س}$، س $\in$ ع، س $\geqslant$ −٢

$\text{د}: \text{س} \longmapsto (\text{س} + ٢)^{٢} - ٤\text{س}$

منحنى الدالة تربيعي على النحو $\cup$

رأس المنحنى (أدنى نقطة) عند (−٢، −٤)

مدى د(س) هو د(س) $\geqslant$ −٤

مجال $\text{د}^{-١}(\text{س})$ هو مدى د(س) نفسه

مدى $\text{د}^{-١}(\text{س})$ هو مدى د(س) نفسه

وعليه، يكون مدى $\text{د}^{-١}(\text{س}) \geqslant -٢$

- ليس ضروريًا أن تجد الدالة العكسية قبل تحديد المجال والمدى. مجال $\text{د}^{-١}(\text{س})$ هو مدى د(س). مدى $\text{د}^{-١}(\text{س})$ هو مجال د(س)
- تتواجد الدالة العكسية $\text{د}^{-١}(\text{س})$ إذا كانت الدالة واحدًا إلى واحد حصرًا.

ب $\text{د}: \text{س} \longmapsto \text{س}^{٢} + ٤\text{س}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٤\text{س}$

$\text{س} = \text{ص}^{٢} + ٤\text{ص}$

أكمل المربّع للطرف الأيسر من المعادلة:

$\text{س} = (\text{ص} + ٢)^{٢} - ٤$

$(\text{ص} + ٢)^{٢} = \text{س} + ٤$

$\text{ص} + ٢ = \sqrt{\text{س} + ٤}$

$\text{ص} = -٢ + \sqrt{\text{س} + ٤}$

$\text{د}^{-١}(\text{س}) = -٢ + \sqrt{\text{س} + ٤}$

(خذ الجذر الموجب لأن مجال الدالة العكسية س $\geqslant$ −٤).

٣) أ $\text{د}: \text{س} \longmapsto \dfrac{٥}{٢\text{س} + ١}$

$\text{ص} = \dfrac{٥}{٢\text{س} + ١}$

$\text{س} = \dfrac{٥}{٢\text{ص} + ١}$

$\text{س}(٢\text{س} + ١) = ٥$

$٢\text{س ص} + \text{س} = ٥$

$٢\text{س ص} + \text{س} = ٥ - \text{س}$

$\text{ص} = \dfrac{٥ - \text{س}}{٢\text{س}}$

$\text{د}^{-١}(\text{س}) - \dfrac{٥ - \text{س}}{٢\text{س}}$

ب) مجال د$^{-١}$(س) هو مدى د نفسه، أي س ≥ ١

٥) أ) هـ: س ↤ ٢س^{٢} − ٨س + ١٠

ص = ٢س^{٢} − ٨س + ١٠

ص = ٢(س^{٢} − ٤س) + ١٠

ص = ٢[(س − ٢)^{٢} − ٢^{٢}] + ١٠

ص = ٢(س − ٢)^{٢} − ٨ + ١٠

ص = ٢(س − ٢)^{٢} + ٢

منحنى ص = ٢(س − ٢)^{٢} + ٢ تربيعي على النحو ∪

رأس (أدنى نقطة) المنحنى (٢، ٢)

الدالة هـ: س ↤ ٢س^{٢} − ٨س + ١٠ حيث س ∈ ع، س ≥ ٣ هي دالة واحد إلى واحد في هذا المجال.

ب) ص = ٢(س − ٢)^{٢} + ٢

س = ٢(ص − ٢)^{٢} + ٢

$\frac{\text{س} - ٢}{٢}$ = (ص − ٢)^{٢}

$\sqrt{\frac{\text{س} - ٢}{٢}}$ = ص − ٢ أخذنا الجذر الموجب

حيث مجال الدالة العكسية هو س ≥ ٣

ص = ٢ + $\sqrt{\frac{\text{س} - ٢}{٢}}$

هـ$^{-١}$ (س) = ٢ + $\sqrt{\frac{\text{س} - ٢}{٢}}$

٦) أ) د: س ↤ ٢س^{٢} + ١٢س − ١٤ يمكن كتابة الدالة في صورة ص = ٢(س − ٣)^{٢} − ٣٢ منحنى الدالة تربيعي على النحو ∪.

رأس (أدنى نقطة) المنحنى هو (−٣، −٣٢)

إذا كانت د: س ↤ ٢س^{٢} + ١٢س − ١٤ واحدًا إلى واحد فإن د$^{-١}$(س) يجب أن تكون دالة. لذا علينا وضع قيود على مجال

د: س ↤ ٢س^{٢} + ١٢س − ١٤، س ∈ ع، س ≥ ك لتصبح:

د: س ↤ ٢س^{٢} + ١٢س − ١٤، س ∈ ع، س ≥ −٣، أقل قيمة لـ ك هي −٣

ب) ص = ٢س^{٢} + ١٢س − ١٤

س = ٢ص^{٢} + ١٢ص − ١٤

س = ٢(ص^{٢} + ٦ص) − ١٤

س = ٢[(ص + ٣)^{٢} − ٣^{٢}] − ١٤

س = ٢(ص + ٣)^{٢} − ٣٢

٢(ص + ٣)^{٢} = س + ٣٢

(ص + ٣)^{٢} = $\frac{\text{س} + ٣٢}{٢}$

ص + ٣ = $\sqrt{\frac{\text{س} + ٣٢}{٢}}$ أخذنا الجذر الموجب لأن مجال الدالة العكسيّة س ≥ −٣٢

د$^{-١}$(س) = ص = −٣ + $\sqrt{\frac{\text{س} + ٣٢}{٢}}$

٨) أ) د(س) = ٩ − (س − ٣)^{٢} حيث س ∈ ع، ل ≤ س ≤ ٧

منحنى د(س) = ٩ − (س − ٣)^{٢} حيث س ∈ ع تربيعي على النحو ∩

نعرف ذلك لأن معامل س^{٢} سالب.

الرأس (٣، ٩). إذا كانت د(س) = ٩ − (س − ٣)^{٢} دالة واحد إلى واحد فإن ك = ٣

ب) ١) د(س) = ٩ − (س − ٣)^{٢}

ص = ٩ − (س − ٣)^{٢}

س = ٩ − (ص − ٣)^{٢}

(ص − ٣)^{٢} = ٩ − س

ص − ٣ = $\sqrt{٩ - \text{س}}$

أخذنا الجذر التربيعي الموجب لأن مجال الدالة العكسية هو س ≤ ٩

د$^{-١}$(س) = ٣ + $\sqrt{٩ - \text{س}}$

٢) مجال د$^{-١}$(س) هو مدى د(س) نفسه، أي س ≤ ٩

المدى هو مجال د(س) نفسه، أي ٣ ≤ د$^{-١}$(س) ≤ ٧

٩) أ د(س) هي دالة عكسيّة لـ $\text{د}^{-١}(\text{س})$ فقط إذا كانت كل منهما واحدًا إلى واحد.

$\text{د}^{-١}(\text{س}) = \frac{\text{٥س} - ١}{\text{س}}$ ، س ∈ ح، ٠ < س ≤ ٣

$\text{ص} = \frac{\text{٥س} - ١}{\text{س}}$

$\text{س} = \frac{\text{٥ص} - ١}{\text{ص}}$

س ص = ٥ص − ١

٥ص − س ص = ١

ص(٥ − س) = ١

$\text{ص} = \frac{١}{٥ - \text{س}}$

$\text{د(س)} = \frac{١}{٥ - \text{س}}$

لتكون د(س) موجودة يجب أن تكون واحدًا إلى واحد.

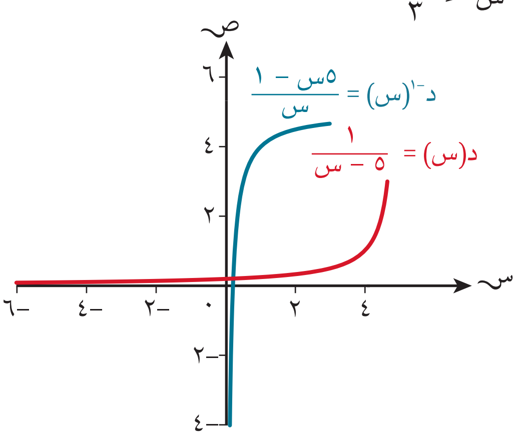
مدى $\text{د}^{-١}(\text{س}) = \frac{\text{٥س} - ١}{\text{س}}$ هو $\text{د}^{-١}(\text{س}) \leqslant \frac{١٤}{٣}$

(ينتج ذلك من تعويض قيم المجال

٠ ≤ س ≤ ٣ في $\text{د}^{-١}(\text{س}) = \frac{\text{٥س} - ١}{\text{س}}$).

ب مجال $\text{د(س)} = \frac{١}{٥ - \text{س}}$ يجب أن يكون

$\text{س} \leqslant \frac{١٤}{٣}$



لدالة واحد إلى واحد تكون $\text{د}^{-١}(\text{س})$ انعكاسًا لـ د(س) حول المستقيم ص = س.

١٠) أ د(س) = ٣س + أ

(هـ ∘ د)(−١) = هـ(−٣ + أ)

= ب − ٥ (−٣ + أ)

= ب + ١٥ − ٥أ

٢ = ب + ١٥ − ٥أ

٥أ − ب = ١٣ ....(١)

أوجِد الدالة العكسيّة لـ هـ (س)

هـ(س) = ب − ٥س

ص = ب − ٥س

س = ب − ٥ص

$\text{ص} = \frac{\text{ب} - \text{س}}{٥}$

$\text{هـ}^{-١}(\text{س}) = \frac{\text{ب} - ٧}{٥}$

$\text{هـ}^{-١}(٧) = \frac{\text{ب} - \text{س}}{٥}$

ب = ١٢

عوّض عن ب في معادلة (١) لتحصل على:

٥أ − ١٢ = ١٣

أ = ٥

الحلّ هو أ = ٥، ب = ١٢

١١) أ د(س) = ٣س − ١

ص = ٣س − ١

س = ٣ص − ١

$\text{ص} = \frac{\text{س} + ١}{٣}$

$\text{د}^{-١}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ١}{٣}$

$\text{هـ(س)} = \frac{٣}{\text{٢س} - ٤}$

$\text{ص} = \frac{٣}{\text{٢س} - ٤}$

$\text{س} = \frac{٣}{\text{٢ص} - ٤}$

س(٢ص − ٤) = ٣

٢س ص − ٤س = ٣

$\text{ص} = \frac{\text{٤س} + ٣}{\text{٢س}}$

$\text{هـ}^{-١}(\text{س}) = \frac{\text{٤س} + ٣}{\text{٢س}}$

ب $\frac{\text{س} + ١}{٣} = \frac{٤\text{س} + ٣}{٢\text{س}}$

$٢\text{س}(\text{س} + ١) = ٣(٤\text{س} + ٣)$

$٢\text{س}^٢ + ٢\text{س} = ١٢\text{س} + ٩$

$٢\text{س}^٢ - ١٠\text{س} - ٩ = ٠$

$\text{أ} = ٢$، $\text{ب} = -١٠$، $\text{جـ} = -٩$

حتى يكون لهذه المعادلة جذران حقيقيان سيكون

$\text{ب}^٢ - ٤\text{أ جـ} \geqslant ٠$

$\text{ب}^٢ - ٤\text{أ جـ} = (-١٠)^٢ - ٤(٢)(-٩)$

$= ١٧٢$

$١٧٢ \geqslant ٠$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان.

١٢) أ $\text{د}: \text{س} \mapsto (٢\text{س} - ١)^٣ - ٣$، $\text{س} \in \text{ع}$، لكل

$١ \leqslant \text{س} \leqslant ٣$

$\text{ص} = (٢\text{س} - ١)^٣ - ٣$

$\text{س} = (٢\text{ص} - ١)^٣ - ٣$

$(٢\text{ص} - ١)^٣ = \text{س} + ٣$

$٢\text{ص} - ١ = \sqrt[٣]{\text{س} + ٣}$

$\text{ص} = \frac{١ + \sqrt[٣]{\text{س} + ٣}}{٢}$

$\text{د}^{-١}(\text{س}) = \frac{١ + \sqrt[٣]{\text{س} + ٣}}{٢}$

أو $\frac{١}{٢}(١ + \sqrt[٣]{\text{س} + ٣})$

ب مجال $\text{د}^{-١}(\text{س})$ مدى $\text{د}(\text{س})$ نفسه. ومدى $\text{د}(\text{س})$ هو $-٢ \leqslant \text{د}(\text{س}) \leqslant ١٢٢$ (من تعويض قيم المجال* في $\text{د}(\text{س})$). مجال $\text{د}(\text{س})$ هو $-٢ \leqslant \text{س} \leqslant ١٢٢$

١٤) أ $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ١}$

$\text{ص} = \frac{١}{\text{س} - ١}$

$\text{س} = \frac{١}{\text{ص} - ١}$

$\text{س}(\text{ص} - ١) = ١$

$\text{س ص} - \text{س} = ١$

$\text{س ص} = \text{س} + ١$

$\text{ص} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س}}$

$\text{د}^{-١}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ١}{\text{س}}$

ب $\text{د}(\text{س}) = \text{د}^{-١}(\text{س})$

$\frac{١}{\text{س} - ١} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س}}$

$\text{س} = (\text{س} + ١)(\text{س} - ١)$

$\text{س} = \text{س}^٢ - ١$

$\text{س}^٢ - \text{س} - ١ = ٠$

ج حلّ المعادلة $\text{س}^٢ - \text{س} - ١ = ٠$

باستخدام الصيغة التربيعية؛ $\text{أ} = ١$، $\text{ب} = -١$، $\text{جـ} = -١$

$\text{س} = \frac{--١ \pm \sqrt{(-١)^٢ - ٤(١)(-١)}}{٢(١)}$

$\text{س} = \frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

١٥) أ $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٣ - \text{س}}$

$\text{ص} = \frac{١}{٣ - \text{س}}$

$\text{س} = \frac{١}{٣ - \text{ص}}$

$\text{س}(٣ - \text{ص}) = ١$

$٣\text{س} - \text{س ص} = ١$

$\text{س ص} = ٣\text{س} - ١$

$\text{ص} = \frac{٣\text{س} - ١}{\text{س}}$

$\text{د}^{-١}(\text{س}) = \frac{٣\text{س} - ١}{\text{س}}$

$\text{د}(\text{س}) \neq \text{د}^{-١}(\text{س})$ لذا فهي ليست عكسيّة لنفسها

ب $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ١}{\text{س} - ٢}$

$\text{ص} = \frac{٢\text{س} + ١}{\text{س} - ٢}$

$\text{س} = \frac{٢\text{ص} + ١}{\text{ص} - ٢}$

$\text{س}(\text{ص} - ٢) = ٢\text{ص} + ١$

س ص − ٢ س = ٢ص + ١

س ص − ٢ ص = ٢س + ١

ص(س − ٢) = ٢س + ١

$\text{ص} = \frac{\text{٢س + ١}}{\text{س − ٢}}$

$\text{د}^{-١}\text{(س)} = \frac{\text{٢س + ١}}{\text{س − ٢}}$

د(س) = د$^{-١}$(س)، لذا تكون د(س) عكسيّة لنفسها.

ج) $\text{د(س)} = \frac{\text{٣س + ٥}}{\text{٤س − ٣}}$

$\text{ص} = \frac{\text{٣س + ٥}}{\text{٤س − ٣}}$

$\text{س} = \frac{\text{٣ص + ٥}}{\text{٤ص − ٣}}$

س(٤ص − ٣) = ٣ص + ٥

٤س ص − ٣ س = ٣ص + ٥

٤س ص − ٣ ص = ٣س + ٥

ص(٤س − ٣) = ٣س + ٥

$\text{ص} = \frac{\text{٣س + ٥}}{\text{٤س − ٣}}$

$\text{د}^{-١}\text{(س)} = \frac{\text{٣س + ٥}}{\text{٤س − ٣}}$

د(س) = د$^{-١}$(س)، لذا تكون د(س) عكسيّة لنفسها.

١٦) أ) (د ∘ هـ)(س) = د(٤ − ٢س)

(د ∘ هـ)(س) = ٣(٤ − ٢س) − ٥

(د ∘ هـ)(س) = ٧ − ٦س

أوجد (د ∘ هـ)$^{-١}$(س)

ص = ٧ − ٦س

س = ٧ − ٦ص

$\text{ص} = \frac{\text{٧ − س}}{\text{٦}}$

$\text{(د ∘ هـ)}^{-١}\text{(س)} = \frac{\text{٧ − س}}{\text{٦}}$

ب) ١) أوجد د$^{-١}$(س)

ص = ٣س − ٥

س = ٣ص − ٥

٣ص = س + ٥

$\text{ص} = \frac{\text{س + ٥}}{\text{٣}}$

$\text{د}^{-١}\text{(س)} = \frac{\text{س + ٥}}{\text{٣}}$

أوجد هـ$^{-١}$(س)

ص = ٤ − ٢س

س = ٤ − ٢ص

٢ص = ٤ − س

$\text{ص} = \text{٤} - \frac{\text{س}}{\text{٢}}$

$\text{هـ}^{-١}\text{(س)} = \frac{\text{٤ − س}}{\text{٢}}$

$\text{(د}^{-١}\text{ ∘ هـ}^{-١}\text{)(س)} = \text{د}^{-١}\left(\frac{\text{٤ − س}}{\text{٢}}\right)$

$= \frac{\frac{\text{٤ − س}}{\text{٢}} + \text{٥}}{\text{٣}}$

اضرب البسط والمقام في ٢ لتحصل على:

$\text{(د}^{-١}\text{ ∘ هـ}^{-١}\text{)(س)} = \frac{\text{٤ − س + ١٠}}{\text{٦}}$

$\text{(د}^{-١}\text{ ∘ هـ}^{-١}\text{)(س)} = \frac{\text{١٤ − س}}{\text{٦}}$

٢) $\text{(هـ}^{-١}\text{ ∘ د}^{-١}\text{)(س)} = \text{هـ}^{-١}\left(\frac{\text{س + ٥}}{\text{٣}}\right)$

$= \frac{\text{٤} - \left(\frac{\text{س + ٥}}{\text{٣}}\right)}{\text{٢}}$

اضرب البسط والمقام في ٣ لتحصل على:

$\text{(هـ}^{-١}\text{ ∘ د}^{-١}\text{)(س)} = \frac{\text{١٢ − (س + ٥)}}{\text{٦}}$

$\text{(هـ}^{-١}\text{ ∘ د}^{-١}\text{)(س)} = \frac{\text{٧ − س}}{\text{٦}}$

ج) (د ∘ هـ)$^{-١}$(س) = (هـ$^{-١}$ ∘ د$^{-١}$)(س)

هذه النتيجة صحيحة دائمًا بافتراض أن الدوال العكسية وتركيب الدوال متحقق دائمًا ولا توجد مشاكل مع المجال والمدى.