تلخيص

أ ≥ س ≥ أ + ٣

١ ≥ س ≥ ٤

−٥ ≥ س ≥ −٢

الحل هو أ = ١، أ = −٥

١٦) أ د(س) = ٢س^{٢} − ٧س + ٥

د(س) = ٢(س^{٢} − $\frac{٧}{٢}$س) + ٥

د(س) = ٢[(س − $\frac{٧}{٤}$)^{٢} − $\frac{٧}{٤}$]^{٢} + ٥

د(س) = ٢(س − $\frac{٧}{٤}$)^{٢} − $\frac{٤٩}{٨}$ + ٥

د(س) = ٢(س − $\frac{٧}{٤}$)^{٢} − $\frac{٩}{٨}$

منحنى د(س) = ٢(س − $\frac{٧}{٤}$)^{٢} − $\frac{٩}{٨}$ تربيعي على النحو ∪ لأن معامل س^{٢} موجب

الرأس (أدنى نقطة) هي ($\frac{٧}{٤}$، −$\frac{٩}{٨}$)

ب س = $\frac{٧}{٤}$ معادلة محور التماثل لمنحنى

د(س) = ٢س^{٢} − ٧س + ٥ حيث س ∈ ع (من دون أيّة قيود على المجال).

وعليه، إذا كان د(س) = ٢س^{٢} − ٧س + ٥

حيث ٠ ≥ س ≥ ك، فإن ك = $\frac{٧}{٢}$

ج إذا كان ك = $\frac{٧}{٢}$، فإن تعويض س = $\frac{٧}{٢}$

في د(س) = ٢س^{٢} − ٧س + ٥ يعطي

د($\frac{٧}{٢}$) = ٢($\frac{٧}{٢}$)^{٢} − ٧($\frac{٧}{٢}$) + ٥

د($\frac{٧}{٤}$) = ٥ وكذلك للرأس عندما

د(٢) = $\frac{٩}{٨}$ فإن المدى هو $\frac{٩}{٨}$ ≥ س ≥ ٥

تمارين ٢-٢

١) أ (د ∘ هـ)(٦) = د(√(٦ + ٣) − ٢)

(د ∘ هـ)(٦) = د(١)

= ٦ + ٢١

= ٧

ثمّة أسلوب آخر مكافئ لإيجاد التركيب. أوجد (د ∘ هـ)(س) أولًا، ثم عوّض عن س = ٦، وحيث لم يطلب السؤال ذلك فلا ضرورة للقيام بهذا الأسلوب

٢) ب ع: س ↦ س + ٥ لكل قيم س ∈ ع، س > ٠

(الدالة هي 'زد ٥')

ل: س ↦ √س لكل قيم س ∈ ع، س > ٠

(الدالة هي الجذر التربيعي لـ س)

لذا، س ↦ √(س + ٥) هي الدالة 'طبّق أولًا ع(س)، ثم طبّق ل (س)'

أي (ك ∘ ل)

أي أن التركيب هو ل ∘ ع

تذكّر عند تركيب دالتَين د، هـ فإن د ∘ هـ لا يتحقق إلّا إذا كان مدى هـ متضمنًا في مجال د

٣) أ د(س) = أس + ب

تعويض س = ٥، د(٥) = ٣ يعطي:

٣ = ٥أ + ب ..... (١)

تعويض س = ٣، د(٣) = −٣ يعطي:

−٣ = ٣أ + ب ..... (٢)

اطرح المعادلة (٢) من (١) لتحصل على:

٦ = ٢أ، أي أ = ٣

تعويض أ = ٣ في المعادلة (١) يعطي:

٣ = ١٥ + ب، أي ب = −١٢

الحلّ هو أ = ٣، ب = −١٢

ب (د ∘ د)(س) = د(٣س − ١٢)

= ٣(٣س − ١٢) − ١٢

= ٩س − ٤٨

٩س − ٤٨ = ٤

س = ٥$\frac{٧}{٩}$

المعلم الإلكتروني للتأهيل

٤) أ (هـ ∘ د)(س) = لا يمكن ايجادها لأن مدى د(س) هو ح ليس مجموعة جزئية من مجال الدالة هـ(س) الذي هو ح − {١}

ب د(هـ(س))

$$د\left(\frac{١٢}{(١ - س)}\right) = ٢$$

$$٢ \times \left(\frac{١٢}{(١ - س)}\right) + ٣ = ٢$$

$$\left(\frac{٢٤}{(١ - س)}\right) + ٣ = ٢$$

$$س = ٢٥$$

٧) أ (ل ∘ هـ)(س) = ل$\left(\frac{٢}{س + ١}\right)$

$$= \left(\frac{٢}{س + ١} + ٢\right)^{٢} - ٥$$

$$= \left(\frac{٢س + ٤}{س + ١}\right)^{٢} - ٥$$

ب $$١١ = \left(\frac{٢س + ٤}{س + ١}\right)^{٢} - ٥$$

$$\left(\frac{٢س + ٤}{س + ١}\right)^{٢} = ١٦$$

$$\frac{٢س + ٤}{س + ١} = \pm ٤$$

٢س + ٤ = ٤(س + ١) أو

٢س + ٤ = −٤(س + ١)

س = ٠ أو س = $-\frac{٤}{٣}$

٨) (د ∘ هـ)(س) = ١

$$\frac{\frac{٢س + ٣}{س - ١} + ١}{٢} = ١$$

$$\frac{٢س + ٣ + س - ١}{٢س - ٢} = ١$$

$$\frac{٣س + ٢}{٢س - ٢} = ١ \Leftarrow ٣س + ٢ = ٢س - ٢$$

س = −٤

٩) (د ∘ د)(س) = د$\left(\frac{س + ١}{٢س + ٥}\right)$

$$= \frac{١ + \frac{س + ١}{٢س + ٥}}{٥ - ٢\left(\frac{س + ١}{٢س + ٥}\right)}$$

اضرب البسط والمقام في (٢س + ٥) فتحصل على:

$$= \frac{س + ١ + (٢س + ٥)}{٢(س + ١) + ٥ + (٢س + ٥)}$$

$$= \frac{٣س + ٦}{١٢س + ٢٧}$$

$$= \frac{س + ٢}{٤س + ٩}$$

١٠) أ (د ∘ هـ)(س) = د(س + ١)

$$= (س + ١)^{٢}$$

الحل هو (د ∘ هـ)

هـ يمكن كتابة $س^{٢} + ٢س + ٢$ في صورة

$س^{٢} + ٢س + ١ + ١$ أو $(س + ١)^{٢} + ١$

وبما أن (د ∘ هـ)(س) = $(س + ١)^{٢}$ فيكون

(هـ ∘ د ∘ هـ) (س) = هـ $(س + ١)^{٢}$

$$= (س + ١)^{٢} + ١$$

الحل هو (هـ ∘ د ∘ هـ)(س)

١١) (هـ ∘ د)(س) = هـ$(س^{٢} - ٣س)$

$$= ٢(س^{٢} - ٣س) + ٥$$

$٢(س^{٢} - ٣س) + ٥ = ٠$

$٢س^{٢} - ٦س + ٥ = ٠$

لا تحلل هذه المعادلة إلى العوامل. استخدم الصيغة التربيعية حيث أ = ٢، ب = −٦، جـ = ٥

$$س = \frac{-(-٦) \pm \sqrt{(-٦)^{٢} - ٤(٢)(٥)}}{(٢)٢}$$

$$س = \frac{٦ \pm \sqrt{-٤}}{٤}$$ وحيث إن $ب^{٢} - ٤$ أ جـ < ٠

فلا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

١٢) (د ∘ هـ)(س) = د$\left(\frac{٢}{س}\right)$، فإن:

$$= ك - ٢\left(\frac{٢}{س}\right)$$

المعلم الإلكتروني الشامل

إذا كان س = ك − ٢$\left(\frac{٢}{س}\right)$،

س^{٢} = ك س − ٤ أو س^{٢} − ك س + ٤ = ٠

ليكون الجذران متساويين، فإن ب^{٢} − ٤أ جـ = ٠

أ = ١، ب = −ك، جـ = ٤ فيكون:

(−ك)^{٢} − ٤(١)(٤) = ٠

ك^{٢} − ١٦ = ٠

أي ك = −٤ أو ك = ٤

١٤) (د ∘ د)(س) = د$\left(\frac{س + ٥}{١ − ٢س}\right)$

$$= \frac{\frac{س + ٥}{١ − ٢س} + ٥}{٢\left(\frac{س + ٥}{١ − ٢س}\right) − ١}$$

اضرب البسط والمقام في (٢س − ١) لتحصل على:

$$= \frac{س + ٥ + ٥(٢س − ١)}{٢(س + ٥) − ١(٢س − ١)}$$

$$= \frac{١١س}{١١}$$

= س

١٦) أ) د(س) = س^{٢} + ٤س + ٣

(ل ∘ ك)(س) = ل(س + ٢)

= (س + ٢)^{٢} − ١

= س^{٢} + ٤س + ٣

المجال: س ∈ ع

المدى: د(س) ⩾ −١

ب) د(س) = س^{٢} + ١

(ك ∘ ل)(س) = ك(س^{٢} − ١)

= (س^{٢} + ١) + ٢

= س^{٢} − ١

فيكون د(س) = (ك ∘ ل)(س)

الإجابة هي (ك ∘ ل)(س)

المجال: س ∈ ع، المدى د(س) ∈ ع، د(س) ⩽ ١

ج) د(س) = س

(ع ∘ ع)(س) = ع$\left(\frac{١}{س}\right)$

$$= \frac{١}{\frac{١}{س}}$$

= س

فيكون د(س) = (ع ∘ ع)(س)

الإجابة هي (ع ∘ ع)(س)

المجال: س ∈ ع، س ≠ صفر

المدى د(س) ∈ ع،

د(س) ≠ ٠

مجال تركيب دالتين هو إمّا مجال الدالة **الأولى** نفسه أو مجموعة جزئية منه.

مدى تركيب دالتين هو إمّا مدى الدالة **الثانية** نفسه أو مجموعة جزئية منه.

د) د(س) = $\frac{١}{س^{٢}}$ + ١

(ك ∘ ل ∘ ع)(س) = (ك ∘ ل)$\left(\frac{١}{س}\right)$

= ك $\left(\frac{١}{س^{٢}} − ١\right)$

= $\frac{١}{س^{٢}}$ − ١ + ٢

= $\frac{١}{س^{٢}}$ + ١

أي، د(س) = (ك ∘ ل ∘ ع)(س)

الإجابة هي (ك ∘ ل ∘ ع)(س)

المجال: س ∈ ع، س ≠ ٠، المدى د(س) ∈ ع،

د(س) > ١

هـ) د(س) = س + ٤

(ك ∘ ك)(س) = ك(ك(س))

= ك(س + ٢)

= س + ٤

المجال: س ∈ ع

المدى: س ∈ ع

المعلم الإلكتروني الشامل

و د(س) = س − ٢√(س + ١) + ١

(ل ∘ ي)(س) = ل(√(س + ١) − ١)

= (√(س + ١) − ١)^{٢} − ١

= س + ١ − ٢√(س + ١) + ١ − ١

= س − ٢√(س + ١)

فيكون، د(س) = (ل ∘ ي)(س)

الإجابة هي (ل ∘ ي)(س)

المجال: س ∈ ع، س ≠ −١،

المدى د(س) ∈ ع، د(س) ≠ −١

تمارين ٢-٣

١) ب د(س) = س^{٢} + ٣ حيث س ∈ ع، س ≤ ٠

ص = س^{٢} + ٣

س = ص^{٢} + ٣

ص^{٢} = س − ٣

ص = −√(س − ٣)

د$^{-١}$(س) = −√(س − ٣)

هـ د(س) = $\frac{س + ٧}{س + ٢}$

ص = $\frac{س + ٧}{س + ٢}$

س = $\frac{ص + ٧}{ص + ٢}$

س(ص + ٢) = ص + ٧

س ص + ٢س = ص + ٧

س ص − ص = ٧ − ٢س

ص = $\frac{٧ - ٢س}{س - ١}$

د$^{-١}$(س) = $\frac{٧ + ٢س}{س - ١}$

٢) أ د: س ↦ س^{٢} + ٤س، س ∈ ع، س ≤ −٢

د: س ↦ (س + ٢)^{٢} − ٤س

منحنى الدالة تربيعي على النحو ∪

رأس المنحنى (أدنى نقطة) عند (−٢، −٤)

مدى د(س) هو د(س) ≤ −٤

مجال د$^{-١}$(س) هو مدى د(س) نفسه

مدى د$^{-١}$(س) هو مدى د(س) نفسه

وعليه، يكون مدى د$^{-١}$(س) ≤ −٢

- ليس ضروريًا أن تجد الدالة العكسية قبل تحديد المجال والمدى. مجال د$^{-١}$(س) هو مدى د(س). مدى د$^{-١}$ (س) هو مجال د(س)
- تتواجد الدالة العكسية د$^{-١}$ (س) إذا كانت الدالة واحدًا إلى واحد حصرًا.

ب د: س ↦ س^{٢} + ٤س

ص = س^{٢} + ٤س

س = ص^{٢} + ٤ص

أكمل المربّع للطرف الأيسر من المعادلة:

س = (ص + ٢)^{٢} − ٤

(ص + ٢)^{٢} = س + ٤

ص + ٢ = √(س + ٤)

ص = −٢ + √(س + ٤)

د$^{-١}$ (س) = −٢ + √(س + ٤)

(خذ الجذر الموجب لأن مجال الدالة العكسية س ≤ −٤).

٣) أ د: س ↦ $\frac{٥}{٢س + ١}$

ص = $\frac{٥}{٢س + ١}$

س = $\frac{٥}{٢ص + ١}$

س(٢ص + ١) = ٥

٢س ص + س = ٥

٢س ص + س = ٥ − س

ص = $\frac{٥ - س}{٢س}$

د$^{-١}$(س) = $\frac{٥ - س}{٢س}$

المعلم الإلكتروني الشامل