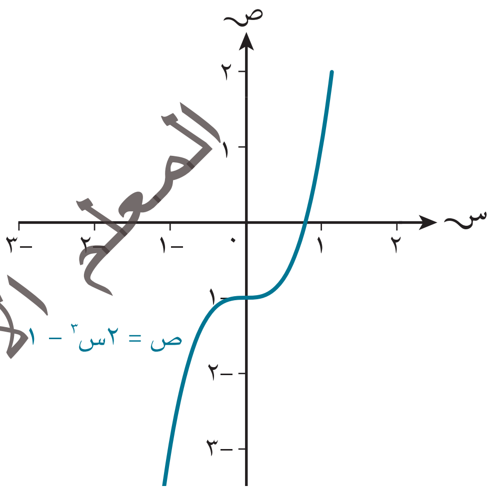
الوحدة الثانية: حلول التمارين

الدوال

تمارين ٢-١

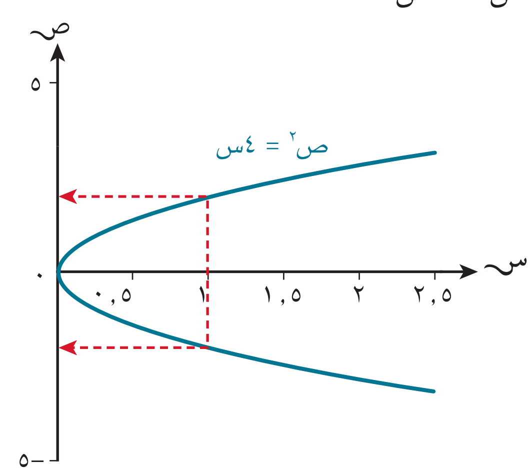
١) ج ص = ٢س^{٣} − ١



يمثّل المنحنى دالة، حيث كل قيمة من المجال ترتبط في قيمة واحدة من المدى والعكس صحيح:

أن ص = ٢س^{٣} − ١ دالة واحد إلى واحد.

٢) د ص^{٢} = ٤س

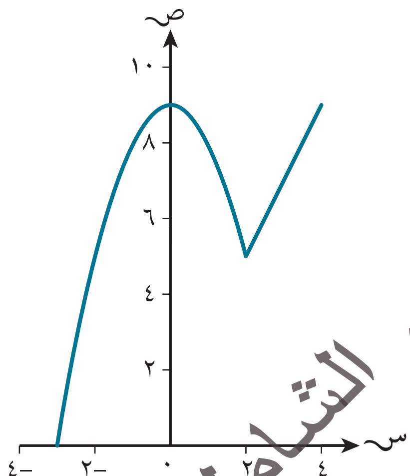


لا يمثّل المنحنى دالة لأن كل قيمة في المجال ترتبط مع قيمتَين في المدى.

إذا رسمنا جميع المستقيمات الرأسية الممكنة على المنحنى، يكون المنحنى:

- دالة إذا قطع كل مستقيم المنحنى مرة واحدة على الأكثر.
- ليس دالة إذا قطع مستقيم واحد المنحنى أكثر من مرة.

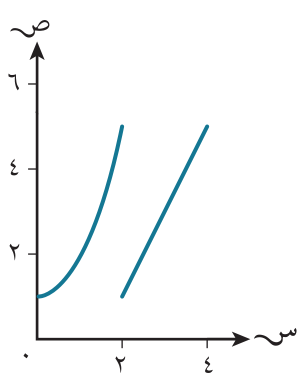
٣) أ



ب هذه دالة متعدد إلى واحد.

العلاقة واحد إلى واحد والمتعدد إلى واحد تسمى **دالة**. في دالة المتعدد إلى واحد توجد مخرجة واحدة لكل مدخلة، لكن كل مخرجة يمكن أن يكون لها أكثر من مدخلة.

٤) أ



ب لا يمثل المنحنى دالة، فهو يمثل علاقة متعدد إلى متعدد لأنه عندما س = ٢ توجد قيمتان لـ ص وبالمثل عندما ص= ٣ مثلًا، فتوجد قيمتان ممكنتان لـ س

تذكير: المجال هو مجموعة **المدخلات**، والمدى هو مجموعة **المخرجات** في الدالة. استخدم دائمًا صيغة المجموعة لتصفهما.

٥) **أ** المجال: س ∈ ع حيث −١ ⩽ س ⩽ ٥
المدى: د(س) ∈ ع حيث −٨ ⩽ د(س) ⩽ ٨

ب المجال: س ∈ ع حيث −٢ ⩽ س ⩽ ٢
المدى: د(س) ∈ ع حيث −٧ ⩽ د(س) ⩽ ٢٠

٦) **أ** د(س) = س + ٤ حيث س > ٨ تمثّلت في منحنى خطي متصل ميله موجب.

عوّض عن س = ٨ في الدالة لتحصل على د(س) = ١٢

وحيث إن المجال س > ٨ فإن المدى د(س) > ١٢

هـ د(س) = ٢^{س} تمثلت في منحنى أسيّ متزايد متصل.

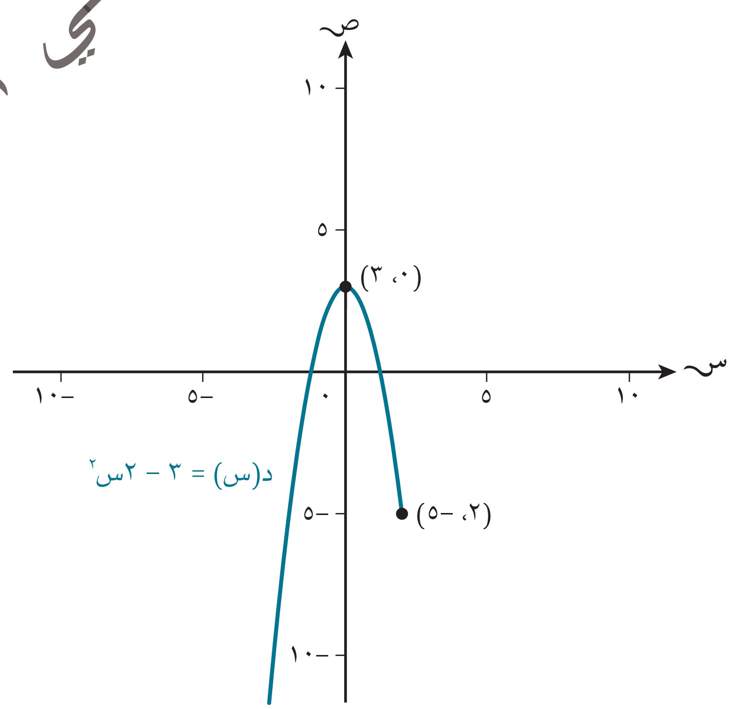
عوّض عن س = −٥ تحصل على د(س) = $\frac{١}{٣٢}$

عوّض عن س = ٤ تحصل على د(س) = ١٦

الحلّ هو $\frac{١}{٣٢}$ ⩽ د(س) ⩽ ١٦

لتحدد مدى دالة ما، من المفيد غالبًا رسمه ضمن المجال المعطى كما يظهر في السؤال ٦

٧) **ج** يأخذ المنحنى د(س) = ٣ − ٢س^{٢} حيث س شكل المنحنى التربيعي ∩. سيظهر المنحنى كالآتي:

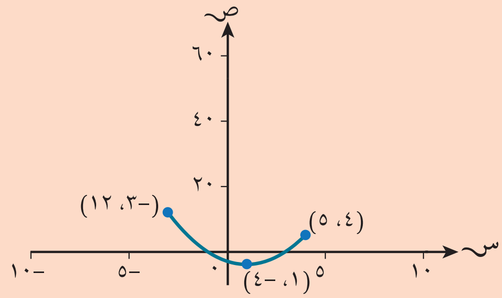


القيمة العظمى هي د(س) = ٣ عندما س = ٠

لا توجد قيمة صغرى في هذا المجال.

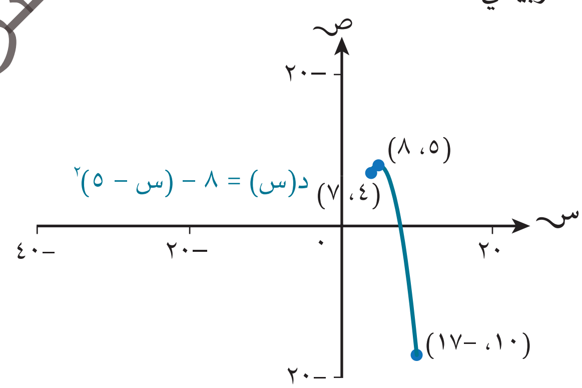
الحل هو د(س) ⩽ ٣

عند إيجاد مدى منحنى خطّي، مثل، د(س) = ٢س + ١، س ∈ ح
حيث $^{-}$١ ⩽ س ⩽ ٢، نحتاج فقط إلى تعويض س = $^{-}$١، س = ٢
في د(س) = ٢س + ١
فيكون المدى $^{-}$١ ⩽ د(س) ⩽ ٥.
من جهة أخرى، لرسم منحنى الدالة التربيعية، نحتاج إلى
التفكير في موقع الرأس عندما نبحث عن المدى. مثلاً:
د(س) = (س − ١)^{٢} − ٤، حيث −٣ ⩽ س ⩽ ٤. عوّض عن
س = $^{-}$٣ في د(س) = (س − ١)^{٢} − ٤ لتحصل على د(س) = ١٢.
عوّض عن س = ٤ في د(س) = (س − ١)^{٢} − ٤ لتحصل على د(س) = ٥
لكن المدى ليس ٥ ⩽ س ⩽ ١٢ لأن الرأس (أدنى نقطة) على المنحنى عند (١، $^{-}$٤) وعليه، فإن القيمة الصغرى
هي − ٤
المدى هو −٤ ⩽ س ⩽ ١٢



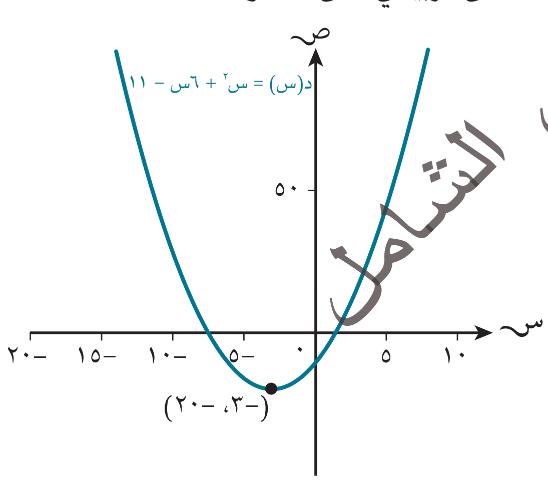
---

٨) ج منحنى د: س ↤ ٨ − (س − ٥)^{٢} حيث
٤ ⩽ س ⩽ ١٠ له الشكل على النحو ∪ المنحنى
التربيعي.



لهذا المجال نجد القيمة العظمى للدالة
د(س) بتعويض س = ٥ في
د(س) = ٨ − (س − ٥)^{٢} (لأن س = ٥ هي
الإحداثي السيني للرأس):
د(٥) = ٨ − (٥ − ٥)^{٢} = ٨
نجد القيمة الصغرى للدالة د(س) بتعويض
س = ١٠ في د(س) = ٨ − (س − ٥)^{٢}
لنحصل على د(١٠) = ٨ − (١٠ − ٥)^{٢}
د(١٠) = −١٧
الحلّ هو −١٧ ⩽ د(س) ⩽ ٨

٩) أ د(س) = س^{٢} + ٦س − ١١
د(س) = (س + ٣)^{٢} − ٢٠
شكل منحنى د(س) = س^{٢} + ٦س − ١١ هو
منحنى تربيعي على النحو ∪



الرأس (−٣، − ٢٠).
المدى د(س) ⩾ −٢٠.

تذكير: للدالة التربيعية في الصورة:
د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ يكون المنحنى
على النحو ∪ إذا كانت أ > ٠، ويكون على
النحو ∩ إذا كانت أ < ٠

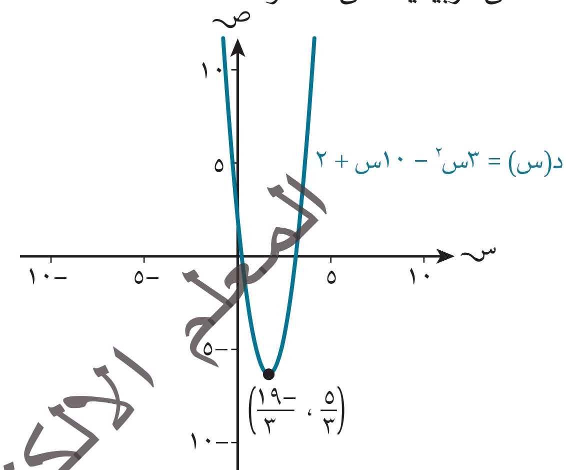
ب $د(س) = ٣\left(س - \frac{١٠}{٦}\right)^{٢} - \frac{١٠٠}{٣٦} + ٢$

$د(س) = ٣\left[\left(س - \frac{١٠}{٦}\right)^{٢} - \frac{١٠٠}{١٢}\right] + ٢$

$د(س) = ٣\left(س - \frac{٥}{٣}\right)^{٢} - \frac{١٩}{٣}$

يكون منحنى $د(س) = \left(س - \frac{٥}{٣}\right)^{٢} - \frac{١٩}{٣}$

منحنى تربيعيًّا على النحو $\cup$



الرأس (نقطة القيمة الصغرى) هو $\left(\frac{٥}{٣}، \frac{-١٩}{٣}\right)$

مدى الدالة $د(س) \geqslant -٦\frac{١}{٣}$

١٠) أ $د(س) = ٧ - ٨س - س^{٢}$

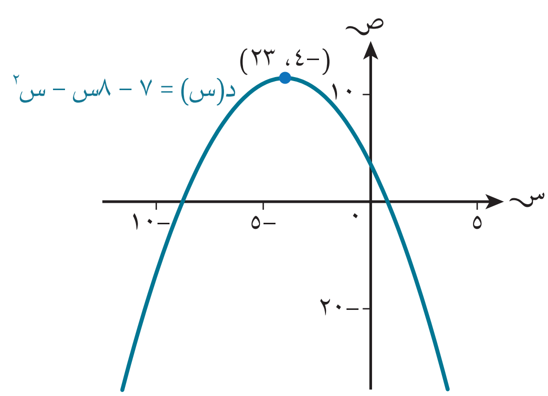
$د(س) = ٧ - (س^{٢} + ٨\,س)$

$د(س) = ٧ - [(س + ٤)^{٢} - ١٦]$

$د(س) = ٢٣ - (س + ٤)^{٢}$

يكون منحنى $د(س) = ٢٣ - (س + ٤)^{٢}$

منحنى تربيعيًّا على النحو $\cap$



الرأس (نقطة القيمة العظمى) هو (−٤، ٢٣)

مدى الدالة $د(س) \leqslant ٢٣$

ب $د(س) = ٢ - ٦س - ٣س^{٢}$

$د(س) = ٢ - (٣س^{٢} + ٦س)$

$د(س) = ٢ - ٣(س^{٢} + ٢س)$

$د(س) = ٢ - ٣[(س + ١)^{٢} - ١]$

$د(س) = ٥ - ٣(س + ١)^{٢}$

يكون منحنى $د(س) = ٥ - ٣(س + ١)^{٢}$

منحنى تربيعيًّا على النحو $\cap$

نعرف ذلك لأن معامل $س^{٢}$ سالب.

الرأس (نقطة القيمة العظمى) هي (−١، ٥)

مدى الدالة $د(س) \leqslant ٥$

١٢) $د: س \mapsto س^{٢} + ٦س + ك$

$د: س \mapsto (س + ٣)^{٢} - ٣^{٢} + ك$

$د: س \mapsto (س + ٣)^{٢} + (ك - ٩)$

يكون منحنى $د: س \mapsto (س + ٣)^{٢} + (ك - ٩)$

منحنى تربيعيًّا على النحو $\cup$

نعرف ذلك لأن معامل $س^{٢}$ موجب.

الرأس (نقطة القيمة الصغرى) هو (−٣، (ك − ٩))

مدى الدالة $د(س) \geqslant ك - ٩$

١٣) $هـ: س \mapsto ٥ - أس + ٢س^{٢}$

$هـ: س \mapsto ٥ + (٢س^{٢} - أ\,س)$

$هـ: س \mapsto ٥ + ٢\left(س^{٢} - \frac{أ}{٢}\,س\right)$

$هـ: س \mapsto ٥ + ٢ = \left[\left(س - \frac{أ}{٤}\right)^{٢} - \frac{أ^{٢}}{١٦}\right]$

$هـ: س \mapsto ٥ + ٢\left(س - \frac{أ}{٤}\right)^{٢} - \frac{أ^{٢}}{8}$

$هـ: س \mapsto \left(\frac{-أ^{٢}}{٨} + ٥\right)^{٢} + ٢\left(س - \frac{أ}{٤}\right)^{٢}$

يكون منحنى $هـ: س \mapsto \left(\frac{-أ^{٢}}{٨} + ٥\right) + ٢\left(س - \frac{أ}{٤}\right)^{٢}$

منحنى تربيعيًّا على النحو $\cup$

نعرف ذلك لأن معامل $س^{٢}$ في هـ:

$س \mapsto ٥ - أس + ٢س^{٢}$ موجب.

الرأس (نقطة القيمة الصغرى) هو

$\left(-\frac{أ}{٤}، -\frac{أ^{٢}}{٨} + ٥\right)$

مدى الدالة هـ(س) ≥ $-\frac{\text{أ}^{٢}}{٨}+٥$

١٤) إذا علمت أن د(س) = س^{٢} − ٢س − ٣، س ∈ ع،

حيث − ٤ ≤ د(س) ≤ ٥

د(س) = س^{٢} − ٢س − ٣

د(س) = − ٤

فحلّ المعادلة س^{٢} − ٢س − ٣ = −٤ يعطي:

س^{٢} − ٢س + ١ = ٠

(س − ١)^{٢} = ٠

س = ١

نقطة القيمة الصغرى لهذا المجال هي (١، −٤)

د(س) = س^{٢} − ٢س − ٣

د(س) = ٥

حل المعادلة س^{٢} − ٢س − ٣ = ٥ يعطي:

س^{٢} − ٢س − ٨ = ٠

(س − ٤)(س + ٢) = ٠

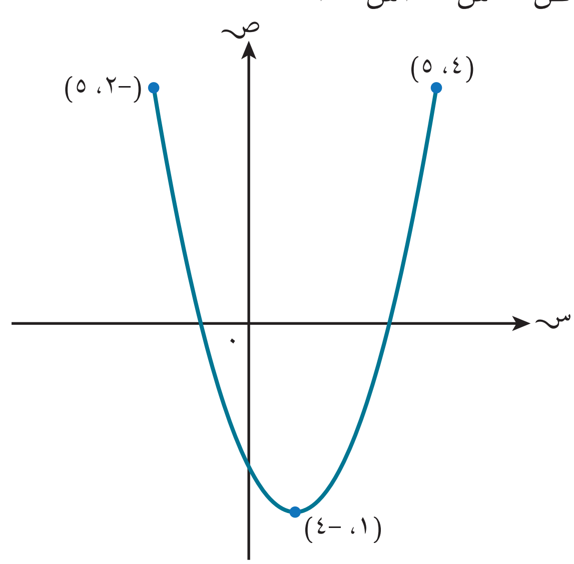
س = ٤ أو س = −٢

نقطتا القيمة العظمى لهذا المجال هما

(٤، ٥)، (−٢، ٥)

المنحنى الذي يظهر هذه النتائج هو

ص = س^{٢} − ٢س − ٣



المطلوب إيجاد قيمة أ حيث −أ ≤ س ≤ أ

تلخيص:

أ = ٢، حيث −أ ≤ س ≤ أ

فإن −٢ ≤ س ≤ ٢

[أ ≠ ٤، حيث −٤ ≤ س ≤ ٤ لأنها تعطي المجال

٥ ≤ د(س) ≤ ٢١

الحل هو أ = ٢

١٥) د(س) = س^{٢} + س − ٤، حيث أ ≤ س ≤ أ + ٣

أي −٢ ≤ د(س) ≤ ١٦

د(س) = س^{٢} + س − ٤

د(س) = −٢

حلّ المعادلة س^{٢} + س − ٤ = −٢ يعطي:

س^{٢} + س − ٢ = ٠

(س + ٢)(س − ١) = ٠

س = −٢ أو س = ١

فتكون نقطتا القيمة الصغرى لهذا المجال هما

(−٢، −٢) و (١، −٢)

د(س) = س^{٢} + س − ٤

د(س) = ١٦

حلّ المعادلة س^{٢} + س − ٤ = ١٦ يعطي:

س^{٢} + س − ٢٠ = ٠

(س + ٥)(س − ٤) = ٠

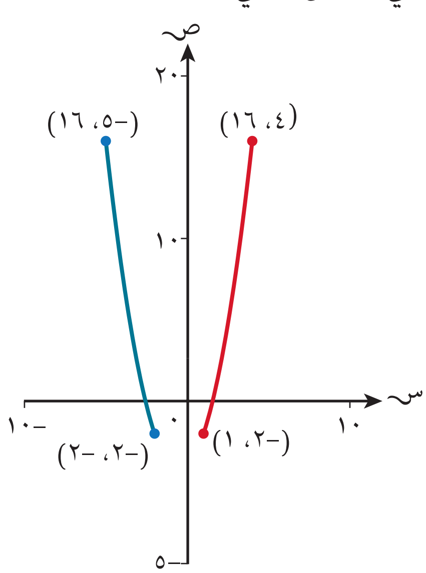
س = −٥ أو س = ٤

فتكون نقطتا القيمة العظمى لهذا المجال عند

النقطتَين (−٥، ١٦)، (٤، ١٦)

منحنى د(س) = س^{٢} + س − ٤ مع هذه النتائج مبيّن

في الشكل الآتي:



تلخيص

أ ⩽ س ⩽ أ + ٣

١ ⩽ س ⩽ ٤

−٥ ⩽ س ⩽ −٢

الحل هو أ = ١، أ = −٥

١٦) أ د(س) = ٢س^{٢} − ٧س + ٥

د(س) = ٢(س^{٢} − $\frac{٧}{٢}$س) + ٥

د(س) = ٢[(س − $\frac{٧}{٤}$)^{٢} − $\frac{٧}{٤}$] + ٥

د(س) = ٢(س − $\frac{٧}{٤}$)^{٢} − $\frac{٤٩}{٨}$ + ٥

د(س) = ٢(س − $\frac{٧}{٤}$)^{٢} − $\frac{٩}{٨}$

منحنى د(س) = ٢(س − $\frac{٧}{٤}$)^{٢} − $\frac{٩}{٨}$ تربيعي على النحو ∪ لأن معامل س^{٢} موجب

الرأس (أدنى نقطة) هي ($\frac{٧}{٤}$، −$\frac{٩}{٨}$)

ب س = $\frac{٧}{٤}$ معادلة محور التماثل لمنحنى د(س) = ٢س^{٢} − ٧س + ٥ حيث س ∈ ع (من دون أيّة قيود على المجال).

وعليه، إذا كان د(س) = ٢س^{٢} − ٧س + ٥ حيث ٠ ⩽ س ⩽ ك، فإن ك = $\frac{٧}{٢}$

ج إذا كان ك = $\frac{٧}{٢}$، فإن تعويض س = $\frac{٧}{٢}$ في د(س) = ٢س^{٢} − ٧س + ٥ يعطي

د($\frac{٧}{٢}$) = ٢($\frac{٧}{٢}$)^{٢} − ٧($\frac{٧}{٢}$) + ٥

د($\frac{٧}{٤}$) = ٥ وكذلك للرأس عندما

د(٢) = $\frac{٩}{٨}$ فإن المدى هو $\frac{٩}{٨}$ ⩽ س ⩽ ٥

تمارين ٢-٢

١) أ (د ∘ هـ)(٦) = د($\sqrt{٦ + ٣}$ − ٢)

(د ∘ هـ)(٦) = د(١)

= ١^{٢} + ٦

= ٧

> ثمّة أسلوب آخر مكافئ لإيجاد التركيب. أوجد (د ∘ هـ)(س) أولًا، ثم عوّض عن س = ٦، وحيث لم يطلب السؤال ذلك فلا ضرورة للقيام بهذا الأسلوب

٢) ب ع: س ↤ س + ٥ لكل قيم س ∈ ع، س > ٠

(الدالة هي 'زد ٥')

ل: س ↤ $\sqrt{س}$ لكل قيم س ∈ ع، س > ٠

(الدالة هي الجذر التربيعي لـ س)

لذا، س ↤ $\sqrt{س + ٥}$ هي الدالة 'طبّق أولًا ع(س)، ثم طبّق ل (س)'

أي (ك ∘ ل)

أي أن التركيب هو ل ∘ ع

> تذكّر عند تركيب دالتَين د، هـ فإن د ∘ هـ لا يتحقق إلّا إذا كان مدى هـ متضمنًا في مجال د

٣) أ د(س) = أس + ب

تعويض س = ٥، د(٥) = ٣ يعطي:

٣ = ٥أ + ب.........(١)

تعويض س = ٣، د(٣) = −٣ يعطي:

−٣ = ٣أ + ب .... (٢)

اطرح المعادلة (٢) من (١) لتحصل على:

٦ = ٢أ، أي أ = ٣

تعويض أ = ٣ في المعادلة (١) يعطي:

٣ = ١٥ + ب، أي ب = −١٢

الحلّ هو أ = ٣، ب = −١٢

ب (د ∘ د)(س) = د(٣س − ١٢)

= ٣(٣س − ١٢) − ١٢

= ٩س − ٤٨

٩س − ٤٨ = ٤

س = ٥$\frac{٧}{٩}$