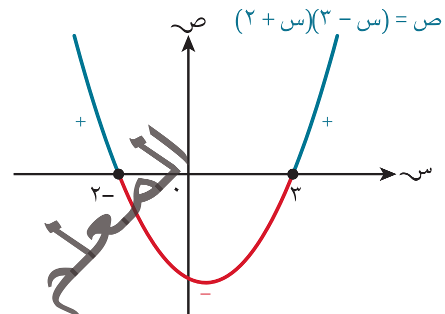
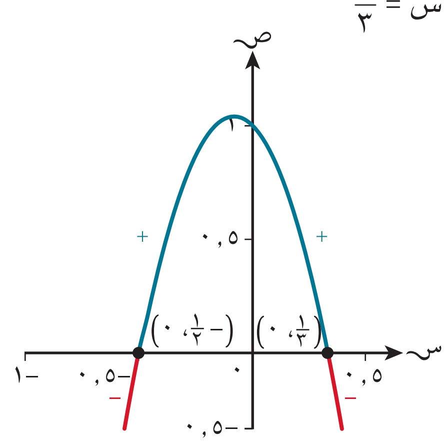
تمارين ١-٧

١) ب (س − ٣)(س + ٢) > ٠
ارسم منحنى ص = (س − ٣) (س + ٢)
المنحنى التربيعي على شكل ∪
يقطع المنحنى محور السينات عند س = −٢،
س = ٣



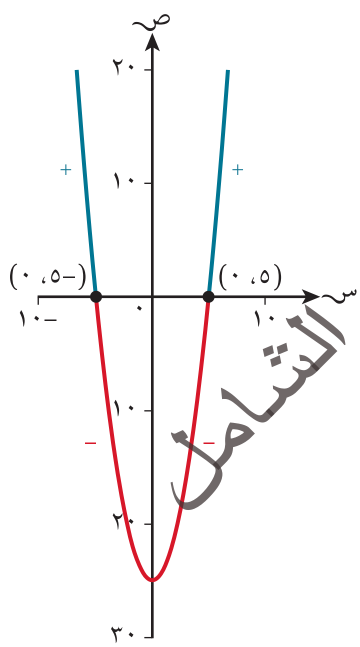
بما أن (س − ٣)(س + ٢) > ٠ فإننا نحتاج إلى إيجاد مدى قيم س التي يكون المنحنى عندها موجبًا (فوق محور السينات).
الحلّ هو س < −٢ أو س > ٣

و (١ − ٣س)(٢س + ١) < ٠
ارسم منحنى ص = (١ − ٣س)(٢س + ١)
المنحنى التربيعي على شكل ∩
يقطع المنحنى محور السينات عند س = $-\frac{١}{٢}$،
س = $\frac{١}{٣}$



بما أن (١ − ٣س)(٢س + ١) < ٠ فإننا نحتاج إلى إيجاد مدى قيم س التي يكون المنحنى عندها سالبًا (تحت محور السينات).
الحلّ هو س < $-\frac{١}{٢}$ أو س > $\frac{١}{٣}$

٢) أ $س^{٢}$ − ٢٥ ⩾ ٠
حلّل إلى العوامل الطرف الأيمن من المتباينة:
(س − ٥)(س + ٥) ⩾ ٠
ارسم منحنى ص = (س − ٥)(س + ٥)
المنحنى تربيعي على شكل ∪
يقطع المنحنى محور السينات عند س = ٥ أو
س = −٥



بما أن $س^{٢}$ − ٢٥ فإننا نحتاج إلى إيجاد مدى قيم س التي يكون المنحنى عندها صفرًا أو موجبًا (على محور السينات وأعلاه).
الحلّ هو س ⩽ −٥ أو س ⩾ ٥

هـ ٦س^{٢} − ٢٣س + ٢٠ < ٠

حلّل إلى العوامل الطرف الأيسر من المتباينة:

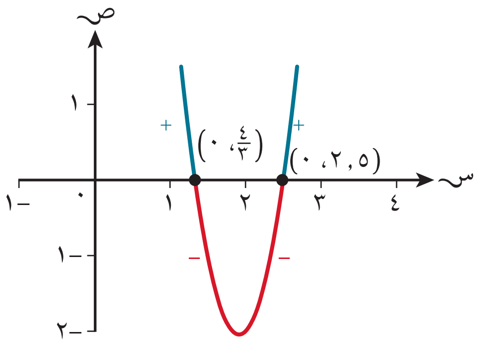
(٣س − ٤)(٢س − ٥) < ٠

ارسم منحنى ص = (٣س − ٤)(٢س − ٥)

المنحنى تربيعي على شكل ∪

يقطع المنحنى محور السينات عند س = $\frac{٤}{٣}$

و س = $\frac{٥}{٢}$



بما أن ٦س^{٢} − ٢٣س + ٢٠ < ٠ فإننا نحتاج إلى إيجاد مدى قيم س التي يكون المنحنى عندها سالبًا (تحت محور السينات).

الحلّ هو $\frac{٤}{٣}$ < س < $\frac{٥}{٢}$

٣) ب ١٥س < س^{٢} + ٥٦

أعد الترتيب لتحصل على:

س^{٢} − ١٥س + ٥٦ > ٠

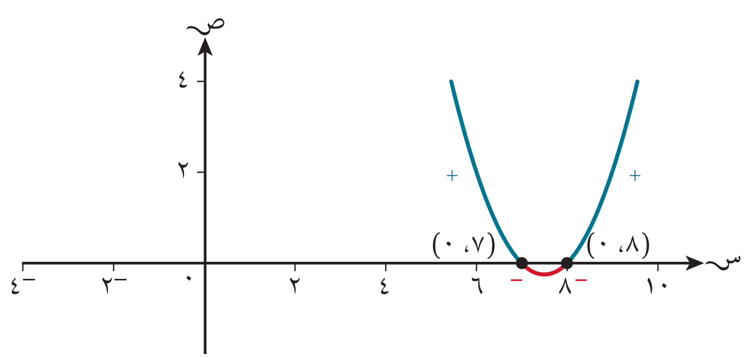
حلل الطرف الأيمن من المتباينة إلى عوامله:

(س − ٧)(س − ٨) > ٠

ارسم منحنى ص = (س − ٧)(س − ٨)

المنحنى التربيعي على شكل ∪

يقطع المنحنى محور السينات عند النقطتَين س = ٧، س = ٨



بما أن س^{٢} − ١٥س + ٥٦ > ٠ فإننا نحتاج إلى إيجاد مدى قيم س التي يكون المنحنى عندها موجبًا (فوق محور السينات).

الحلّ هو س < ٧ أو س > ٨

ز) $(س + ٤)^٢ \geqslant ٢٥$

فكّ الأقواس وأعد الترتيب:

$س^٢ + ٨س - ٩ \geqslant ٠$

حلّل الطرف الأيمن من المتباينة إلى عوامله:

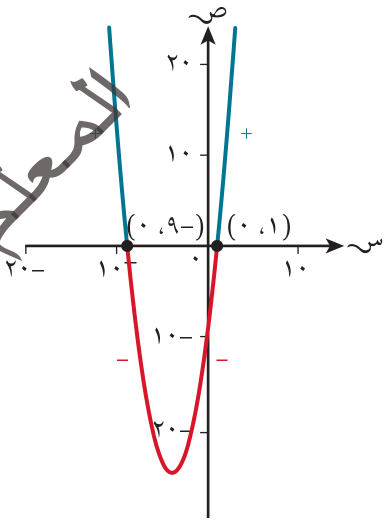
$(س - ١)(س + ٩) \geqslant ٠$

ارسم منحنى الدالة ص = (س − ١)(س + ٩)

المنحنى التربيعي شكله ∪

يقطع المنحنى محور السينات عند س= ١،

س = −٩



بما أن $س^٢ + ٨س - ٩ \geqslant ٠$ فإننا نحتاج إلى إيجاد مدى قيم س التي يكون المنحنى عندها موجبًا أو صفرًا (فوق محور السينات أو على المحور).

الحلّ هو س ⩽ −٩ أو س ⩾ ١

٤) $\dfrac{٥}{٢س^٢ + س - ١٥} < ٠$

$\dfrac{\text{قيمة موجبة}}{\text{قيمة سالبة}} < ٠$ (البسط دائمًا موجب فيكون المقام سالبًا)

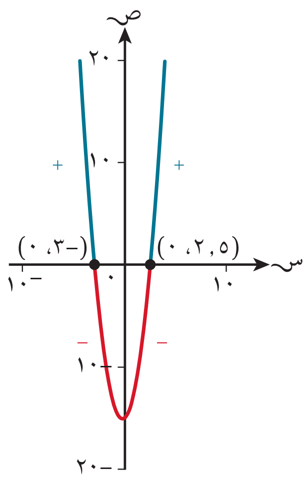
حلّل المقام إلى العوامل:

$\dfrac{٥}{(٢س - ٥)(س + ٣)} < ٠$

٥ كميّة موجبة، لذا نحتاج إلى إيجاد قيم س التي تجعل (٢س − ٥)(س + ٣) سالبة أي < ٠

فيكون (٢س − ٥)(س + ٣) < ٠

منحنى ص = (٢س − ٥)(س + ٣)، تربيعي على شكل ∪



يقطع المنحنى محور السينات عند س = −٣،

س = ٢,٥

(نتيجة حلّ ٢س − ٥ = ٠، س + ٣ = ٠).

نريد (٢س − ٥) (س + ٣) < ٠ لذا نحتاج إلى إيجاد قيم س التي تجعل المنحنى سالبًا (تحت محور السينات).

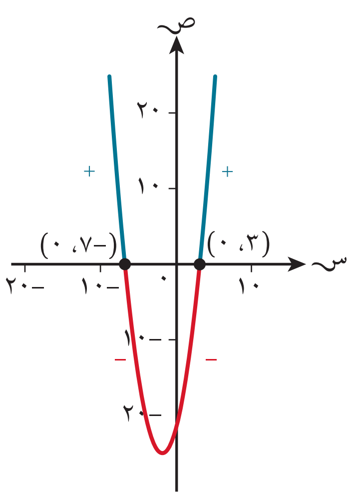
الحلّ هو −٣ < س < ٢,٥

٥) ب) $س^٢ + ٤س - ٢١ \leqslant ٠$

حلّل الطرف الأيمن من المتباينة إلى عوامله:

$(س + ٧) (س - ٣) \leqslant ٠$

منحنى الدالة ص = (س + ٧)(س − ٣) تربيعي على شكل ∪



يقطع المنحنى محور السينات عند $س = −٧$،
$س = ٣$

نريد $س^{٢} + ٤س − ٢١ \leqslant ٠$، لذا نحتاج إلى إيجاد قيم س التي تجعل المنحنى سالبًا أو صفرًا (تحت محور السينات أو عليه).

الحلّ هو $−٧ \leqslant س \leqslant ٣$

$س^{٢} − ٩س + ٨ > ٠$

حلّ الطرف الأيمن من المتباينة إلى العوامل:

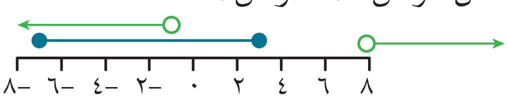
$(س − ١)(س − ٨) > ٠$

منحنى $ص = (س − ١)(س − ٨)$ تربيعي على شكل U

يقطع المنحنى محور السينات عند $س = ١$،
$س = ٨$

نريد $س^{٢} − ٩س + ٨ > ٠$، لذا نحتاج إلى إيجاد قيم س التي تجعل المنحنى موجبًا (فوق محور السينات).

الحلّ هو $س < ١$ أو $س > ٨$



يبيّن خط الأعداد أن الحلَّين صحيحان عندما
$−٧ \leqslant س < ١$

٦) $٢^{س^{٢} − ٣س − ٤٠} > ١$

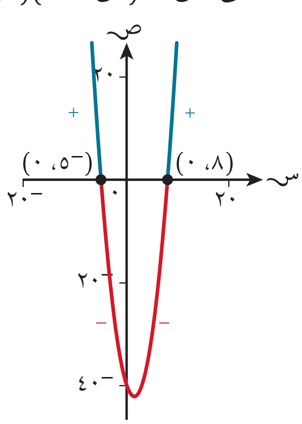
حيث إن $٢^{٠} = ١$، و ٢ إلى قوة عدد موجب أكبر من الصفر

فإننا نحتاج إلى حلّ المتباينة $س^{٢} − ٣س − ٤٠ > ٠$

حلّ الطرف الأيمن من المتباينة إلى عوامل:

$(س + ٥)(س − ٨) > ٠$

منحنى $ص = (س + ٥)(س − ٨)$ تربيعي على شكل U



يقطع المنحنى محور السينات عند $س= −٥$، $س = ٨$.

نريد $س^{٢} − ٣س − ٤٠ > ٠$ لذا نحتاج إلى إيجاد قيم س التي تجعل المنحنى موجبًا (فوق محور السينات).

الحلّ هو $س < −٥$ أو $س > ٨$

٧) أ $\frac{س(س − ١)}{س + ١} > س$

أعد الترتيب $\frac{س(س − ١)}{س + ١} − س > ٠$

اكتب الطرف الأيمن في صورة كسر واحد:

$$\frac{س(س − ١)}{س + ١} − \frac{س(س + ١)}{س + ١} > ٠$$

$$\frac{س(س − ١) − س(س + ١)}{س + ١} > ٠$$

$$\frac{س^{٢} − ٢س − س^{٢}}{س + ١} > ٠$$

$$\frac{−٢س}{س + ١} > ٠$$

أوجِد قيم س التي تجعل كلًّا من البسط والمقام صفرًا.

أي $−٢س = ٠$ فيكون $س = ٠$

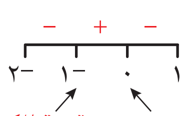
$س + ١ = ٠$ فيكون $س = −١$ (إذا كان المقام صفرًا فتكون قيم الكسر غير معرّفة).

استخدم خط الأعداد لتختبر الأعداد حول $س = ٠$، $س = −١$

إذا عوّضنا عن $س = −٢$ في $\frac{−٢س}{س + ١}$ ينتج $\frac{−٢(−٢)}{−٢ + ١}$ وهي سالبة

إذا عوّضنا عن $س = −\frac{١}{٢}$ في $\frac{−٢س}{س + ١}$ ينتج $\frac{−٢\left(−\frac{١}{٢}\right)}{−\frac{١}{٢} + ١}$ وهي موجبة.

إذا عوّضنا عن $س = ١$ في $\frac{−٢س}{س + ١}$ ينتج $\frac{−٢(١)}{١ + ١}$ وهي سالبة



$\frac{س(س − ١)}{س + ١} > ٠$ س لقيم س التي تحقق

$−١ < س < ٠$

ب $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ١} \geqslant ٤$

أعد الترتيب $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ١} - ٤ \geqslant ٠$

اكتب الطرف الأيمن في صورة كسر واحد:

$$\frac{س^{٢} - ٩}{س - ١} - \frac{٤(س - ١)}{س - ١} \geqslant ٠$$

$$\frac{س^{٢} - ٩ - ٤(س - ١)}{س - ١} \geqslant ٠$$

$$\frac{س^{٢} - ٩ - ٤س + ٤}{س - ١} \geqslant ٠$$

$$\frac{س^{٢} - ٤س - ٥}{س - ١} \geqslant ٠$$

جد قيم س التي تجعل كلًّا من البسط والمقام صفرًا.

أي $س^{٢} - ٤س - ٥ = ٠$

$(س - ٥)(س + ١) = ٠$

تكون س = ٥، س = $^{-}١$

س − ١ = ٠ فيكون س = ١ (إذا كان مقام كسر صفرًا فتكون قيمته غير معرّفة).

استخدم خط الأعداد لتختبر الأعداد حول س = $^{-}١$، س = ٥، س = ١

إذا عوّضنا عن س = $^{-}٢$ فإن $\frac{س^{٢} - ٤س - ٥}{س - ١}$

تصبح $\frac{(^{-}٢)^{٢} - ٤(^{-}٢) - ٥}{^{-}٢ - ١}$ وهذا مقدار سالب.

إذا عوّضنا عن س = ٠ فإن $\frac{س^{٢} - ٤س - ٥}{س - ١}$

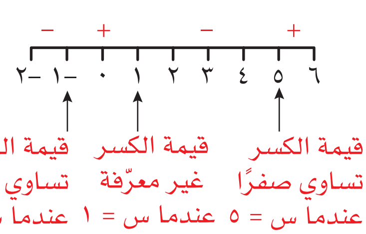
تصبح $\frac{(٠)^{٢} - ٤(٠) - ٥}{٠ - ١}$ وهذا مقدار موجب.

إذا عوّضنا عن س = ٢ فإن $\frac{س^{٢} - ٤س - ٥}{س - ١}$

تصبح $\frac{(٢)^{٢} - ٤(٢) - ٥}{٢ - ١}$ وهذا مقدار سالب.

إذا عوّضنا عن س = ٦ فإن $\frac{س^{٢} - ٤س - ٥}{س - ١}$

تصبح $\frac{(٦)^{٢} - ٤(٦) - ٥}{٦ - ١}$ وهذا مقدار موجب.



$\frac{س^{٢} - ٩}{س - ١} \geqslant ٤$ لقيم س التي تحقق:

$^{-}١ \leqslant س < ١$ أو $س \geqslant ٥$

ج $\frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{س - ٢} \geqslant ٠$

$$\frac{(س - ٥)(س + ٣)}{س - ٢} \geqslant ٠$$

أوجد قيم س التي تجعل كلًّا من البسط والمقام صفرًا.

للبسط حلّ (س − ٥)(س + ٣) = ٠ فيكون

س = ٥ أو س = $^{-}٣$

للمقام حلّ س − ٢ = ٠ فيكون س = ٢ (إذا كان مقام كسر يساوي صفرًا فإن قيمته غير معرفة).

استخدم خط الأعداد لتختبر أعدادًا حول س = $^{-}٣$، س = ٢، س = ٥

إذا عوّضنا عن س = $^{-}٤$ فإن $\frac{(س - ٥)(س + ٣)}{س - ٢}$

تصبح $\frac{(^{-}٤ - ٥)(^{-}٤ + ٣)}{^{-}٤ - ٢}$ وهذا مقدار سالب.

إذا عوّضنا عن س = ٠ فإن $\frac{(س - ٥)(س + ٣)}{س - ٢}$

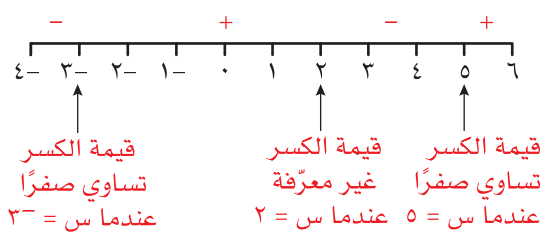
تصبح $\frac{(٠ - ٥)(٠ + ٣)}{٠ - ٢}$ وهذا مقدار موجب.

إذا عوّضنا عن س = ٣ فإن $\frac{(س - ٥)(س + ٣)}{س - ٢}$

تصبح $\frac{(٣ - ٥)(٣ + ٣)}{٣ - ٢}$ وهذا مقدار سالب.

إذا عوّضنا عن س = ٦ فإن $\frac{(س - ٥)(س + ٣)}{س - ٢}$

تصبح $\frac{(٦ - ٥)(٦ + ٣)}{٦ - ٢}$ وهذا مقدار موجب.



$\frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{س - ٢} \geqslant ٠$ لقيم س التي تحقق:

$^{-}٣ \leqslant س < ٢$ أو $س \geqslant ٥$

د $\frac{\text{س}^2 + 4\text{س} - 5}{\text{س}^2 - 4} \leq 0$

$\frac{(\text{س} + 5)(\text{س} - 1)}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 2)} \leq 0$

أوجد قيم س التي تجعل كلًّا من البسط والمقام صفرًا.

للبسط حلّ $(\text{س} + 5)(\text{س} - 1) = 0$ فيكون

س = ٢، س = −٢ إذا كان مقام كسر يساوي صفرًا فإن قيمته غير معرّفة).

استخدم خط الأعداد لتختبر أعدادًا حول
س = −٥، س = −٢، س = ١، س = ٢

إذا عوّضنا عن س = −٦ فإن $\frac{(\text{س} + 5)(\text{س} - 1)}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 2)}$

تصبح $\frac{(-6 + 5)(-6 - 1)}{(-6 - 2)(-6 + 2)}$ وهذا مقدار موجب.

إذا عوّضنا عن س = −٣ فإن $\frac{(\text{س} + 5)(\text{س} - 1)}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 2)}$

تصبح $\frac{(-3 + 5)(-3 - 1)}{(-3 - 2)(-3 + 2)}$ وهذا مقدار سالب.

إذا عوّضنا عن س = ٠ فإن $\frac{(\text{س} + 5)(\text{س} - 1)}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 2)}$

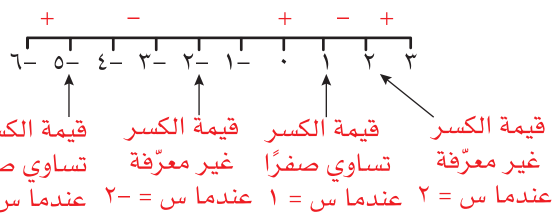
تصبح $\frac{(0 + 5)(0 - 1)}{(0 - 2)(0 + 2)}$ وهذا مقدار موجب.

إذا عوّضنا عن س = ١,٥ فإن $\frac{(\text{س} + 5)(\text{س} - 1)}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 2)}$

تصبح $\frac{(1{,}5 + 5)(1{,}5 - 1)}{(1{,}5 - 2)(1{,}5 + 2)}$ وهذا مقدار سالب.

إذا عوّضنا عن س = ٣ فإن $\frac{(\text{س} + 5)(\text{س} - 1)}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 2)}$

تصبح $\frac{(3 + 5)(3 - 1)}{(3 - 2)(3 + 2)}$ وهذا مقدار موجب.



$\frac{\text{س}^2 + 4\text{س} - 5}{\text{س}^2 - 4} \leq 0$ لقيم س التي تحقّق:

$-5 \leq \text{س} < -2$ أو $1 \leq \text{س} < 5$

هـ $\frac{\text{س} - 3}{\text{س} + 4} \geq \frac{\text{س} + 2}{\text{س} - 5}$

أعد الترتيب $\frac{\text{س} - 3}{\text{س} + 4} - \frac{\text{س} + 2}{\text{س} - 5} \geq 0$

اكتب الطرف الأيمن بصورة كسر واحد:

$\frac{(\text{س} - 3)(\text{س} - 5) - (\text{س} + 2)(\text{س} + 4)}{(\text{س} + 4)(\text{س} - 5)} \geq 0$

انتبه إلى البسط!

$\frac{\text{س}^2 - 8\text{س} + 15 - [\text{س}^2 + 6\text{س} + 8]}{(\text{س} + 4)(\text{س} - 5)} \geq 0$

$\frac{\text{س}^2 - 8\text{س} + 15 - \text{س}^2 - 6\text{س} - 8}{(\text{س} + 4)(\text{س} - 5)} \geq 0$

$\frac{7 - 14\text{س}}{(\text{س} + 4)(\text{س} - 5)} \geq 0$

$\frac{7(1 - 2\text{س})}{(\text{س} + 4)(\text{س} - 5)} \geq 0$

جد قيم س التي تجعل كلًّا من البسط والمقام صفرًا.

للبسط، حلّ $7(1 - 2\text{س}) = 0$

فيكون $\text{س} = \frac{1}{2}$

للمقام، حلّ $(\text{س} + 4)(\text{س} - 5) = 0$ فيكون

س = −٤، أو س = ٥ (إذا كان مقام كسر صفرًا فإن قيمته غير معرّفة).

س = −٤، $\text{س} = \frac{1}{2}$، س = ٥

إذا عوّضنا عن س = −٥ فإن $\frac{7(1 - 2\text{س})}{(\text{س} + 4)(\text{س} - 5)}$

تصبح $\frac{7(1 - 2(-5))}{(-5 + 4)(-5 - 5)}$ وهذا مقدار موجب.

إذا عوّضنا عن س = ٠ فإن $\frac{7(1 - 2\text{س})}{(\text{س} + 4)(\text{س} - 5)}$

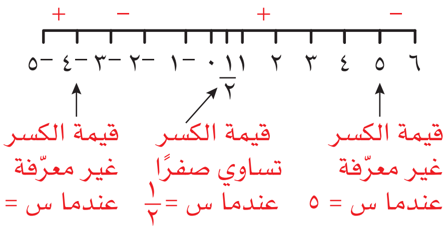
تصبح $\frac{7(1 - 2(0))}{(0 + 4)(0 - 5)}$ وهذا مقدار سالب.

إذا عوّضنا عن س = ١ فإن $\frac{7(1 - 2\text{س})}{(\text{س} + 4)(\text{س} - 5)}$

تصبح $\frac{7(1 - 2(1))}{(1 + 4)(1 - 5)}$ وهذا مقدار موجب.

إذا عوّضنا عن س = ٦ فإن $\frac{٧(١ - ٢س)}{(س + ٤)(س - ٥)}$

تصبح $\frac{٧(١ - ٢(٦))}{(٦ + ٤)(٦ - ٥)}$ وهذا مقدار سالب.



$\frac{س - ٣}{س + ٤} \leqslant \frac{س + ٢}{س - ٥}$ لقيم س التي تحقّق:

س < −٤ أو $\frac{١}{٢}$ ≤ س < ٥

٨) ب ٢س^{٢} − ٥س = ٤ − ك

أعد الترتيب لتحصل على:

٢س^{٢} − ٥س + (ك − ٤) = ٠

أ = ٢، ب = −٥، جـ = ك − ٤

حتى يكون للمعادلة جذران حقيقيان، فإن

ب^{٢} − ٤أجـ > ٠

(−٥)^{٢} − ٤(٢)(ك − ٤) > ٠

٨ك − ٥٧ < ٠

ك < $\frac{٥٧}{٨}$

٩) ب ٣س^{٢} + ٥س + ك + ١ = ٠

أ = ٣، ب = ٥، جـ = ك + ١

حتى لا يكون للمعادلة جذران حقيقيان، فإن

ب^{٢} − ٤أجـ < ٠

٢٥ − ٤(٣)(ك + ١) < ٠

−١٢ك + ١٣ < ٠

ك > $\frac{١٣}{١٢}$

تمارين ١-٨

١) إذا كان المستقيم ص = ك س + ١ مماسًا لمنحنى الدالة ص = س^{٢} − ٧س + ٢، فيوجد جذر وحيد للمعادلة الناتجة من حلّ المعادلتَين ص = ك س + ١، ص = س^{٢} − ٧س + ٢ آنيًّا.

س^{٢} − ٧س + ٢ = ك س + ١ عند إعادة الترتيب ينتج:

س^{٢} − (٧ + ك) س + ١ = ٠

أ = ١، ب = −(٧ + ك)، جـ = ١

وجود جذر حقيقي واحد مكرر يعني ب^{٢} − ٤أجـ = ٠

[−(٧ + ك)]^{٢} − ٤(١)(١) = ٠

ك^{٢} + ١٤ك + ٤٥ = ٠

(ك + ٥)(ك + ٩) = ٠

ك = −٥ ، أو ك = −٩

٢) معادلة المحور السيني ص = ٠

إذا كان المستقيم ص = ٠ مماسًا لـ ص = س^{٢} − (ك + ٣) س + (٣ك + ٤)، فعندها يوجد حلّ وحيد للمعادلة الناتجة من حلّ المعادلتَين ص = ٠، ص = س^{٢} − (ك + ٣) س + (٣ك + ٤) آنيًّا.

س^{٢} − (ك + ٣) س + (٣ك + ٤) = ٠

أ = ١، ب = −(ك + ٣)، جـ = (٣ك + ٤)

وجود جذر حقيقي واحد مكرر يعني ب^{٢} − ٤أجـ = ٠

[−(ك + ٣)]^{٢} − ٤(١)(٣ك + ٤) = ٠

ك^{٢} − ٦ك − ٧ = ٠

(ك + ١)(ك − ٧) = ٠

ك = −١ أو ك = ٧