
**النسبُ المُثلَّثيةُ**

Trigonometric Ratios

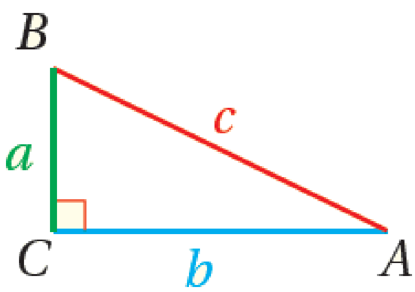
**فكرةُ الدرسِ :** تعرُّفُ جيبِ الزاويةِ، وجيبِ تمامِها، وظلِّها، بوصفِها نسبًا بينَ أضلاعِ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ.

**أولًا : النسبُ المُثلَّثيةُ**

النسبةُ المُثلَّثيةُ ( trigonometric ratio ) : هيَ نسبةٌ بينَ طوليْ ضلعينِ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ.

**نظريةٌ (النسبُ المُثلَّثيةُ)**

إذا كانَ ΔABC قائمَ الزاويةِ، وكانَتِ ∠A زاويةً حادَّةً فيهِ، فإنَّ نسبَ المُثلَّثِ التي هيَ أكثرُ شيوعًا تُعرَفُ بدلالةِ الوترِ، والضلعِ المُقابِلِ، والضلعِ المُجاورِ كما يأتي :




الجيبُ (sine)

- $\sin A = \dfrac{(\text{المُقابِلُ})}{(\text{الوترِ})} = \dfrac{a}{c}$

---

جيبُ التمامِ (cosine)

- $\cos A = \dfrac{(\text{المُجاوِرُ})}{(\text{الوترِ})} = \dfrac{b}{c}$

---

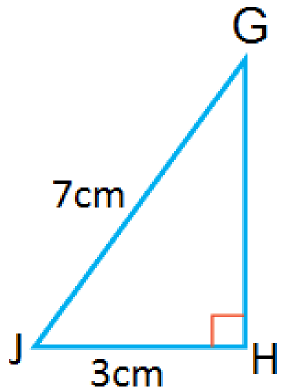
الظلُّ (tangent)

- $\tan A = \dfrac{(\text{المُقابِلُ})}{(\text{المُجاوِرِ})} = \dfrac{a}{b}$

•• **رموزٌ رياضيةٌ :** تشيرُ الأحرفُ الكبيرةُ (A, B, C) إلى رؤوسِ المُثلَّثِ، في حينِ تشيرُ الأحرفُ الصغيرةُ (a, b, c) إلى الأطوالِ المُقابلةِ لتلكَ الرؤوسِ.
وهكذا، فمثلًا يشارُ إلى طولِ الضلعِ المُقابِلِ للزاويةِ A بالحرفِ a.

**مثال 1 :**

في المُثلَّثِ المُجاورِ أجدُ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ G.




**الحل :**

**الخطوةُ 1:** أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لإيجادِ GH

| | |
|---|---|
| نظريةُ فيثاغورس | (JG)2=(HG)2+(JH)2 |
| بتعويض JG=7,JH=3 | (7)2=(HG)2+(3)2 |
| بالتبسيطِ | 49=(HG)2+9 |
| بطرح 9 من طرفي المعادلة | (HG)2=40 |
| بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفيِ المعادلةِ | HG=±40 |

بما أنَّ الطولَ لا يُمكِنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ HG=40

**الخطوةُ 2 :** أجدُ النسبَ المُثلَّثيةَ الثلاثَ.

tanG=JHHG=340    cosG=HGJG=407    sinG=JHJG=37

---

**ثانيًا : النسبُ المُثلَّثيةُ، والآلةُ الحاسبةُ**

يُمكِنُ إيجادُ قِيَمِ النسبِ المُثلَّثيةِ لزوايا معلومةٍ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

•• أتعلَّمُ : أضبطُ الآلةَ الحاسبةَ على خيارِ ( DEGREES ) قبلَ استعمالِها.

**مثال 2 :**

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ :

1)sin40°2)cos68°3)tan37°

**الحل:**

1)sin40°

اضغط على مفتاح **sin** ، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 40 ، ثمّ اضغط على مفتاح **=** ، فتظهر النتيجة :

sin40°=0.642787609687

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ : 0.643

إذن : sin40°≈0.643

---

2)cos68°

اضغط على مفتاح **cosine** ، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 68 ، ثمّ اضغط على مفتاح **=** ، فتظهر النتيجة :

cos68°=0.374606593416

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ : 0.375

إذن : $\cos 68° \approx 0.375$

---

3)tan37°

ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 37 ، ثمّ اضغط على مفتاح **=** ، فتظهر النتيجة ، **tan** اضغط على مفتاح :

$\tan 37° = 0.753554050103$

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ : 0.754

إذن : $\tan 37° \approx 0.754$

---

•• يُمكِنُ استعمالُ الآلةِ الحاسبةِ لإيجادِ أيِّ زاويةٍ حادَّةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ إذا عُلِمَتْ إحدى نسبِها، وذلكَ باستعمالِ معكوسِ النسبةِ المُثلَّثيةِ (inverse trigonometric ratio ).

وإذا عُلِمَ ،(cos-1) وإذا عُلِمَ جيبُ تمامِ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ معكوسَ جيبِ التمامِ ، (sin-1) فإذا عُلِمَ جيبُ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ معكوسَ الجيبِ ظلُّ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ معكوسَ الظلِّ (tan-1).

**•• لغةُ الرياضياتِ:**

يُقرَأُ معكوسُ الجيبِ : sine inverse ، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ (sin-1).

يُقرَأُ معكوسُ جيبِ التمامِ : cosine inverse ، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ (cos-1).

يُقرَأُ معكوسُ الظلِّ : tan inverse ، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ (tan-1).

**مثال 3 :**

أجدُ قياسَ ∠Aالحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ :

1)sinA=0.62)cosA=383)tanA=149

**الحل :**

1)sinA=0.6

| | |
|---|---|
| النسبةُ المعطاةُ | $\sin A = 0.6$ |
| معكوسُ الجيبِ | $m\angle A = \sin^{-1}(0.6)$ |

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ sin-1(0.6) كما يأتي :

ثمّ أُدخِلُ القيمةَ 0.6 ، ثمّ اضغط على مفتاح **=** ، فتظهر النتيجة **sin** ثمَّ مفتاح ، **SHIFT** اضغط على مفتاح :

SHIFTsin(0.6)=36.869897645844

بالتقريبِ إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ:36.9°

إذنْ : ∠A≈36.9°

---

2)cosA=38

| | |
|---|---|
| النسبةُ المعطاةُ | cosA=38 |
| معكوسُ جيبِ التمامِ | m∠A=cos-1(38) |

اضغط على مفتاح **SHIFT** ، ثمَّ مفتاح **cos** فتظهر النتيجة ، ثمّ اضغط على مفتاح **=** ، ثمّ أُدخِلُ القيمةَ 38 :

SHIFTcos(3÷8)=67.9756871629578

بالتقريبِ إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ : 68°

إذنْ : ∠A≈68°

---

3)tanA=149

| | |
|---|---|
| النسبةُ المعطاةُ | tanA=149 |
| معكوسُ الظلّ | m∠A=tan-1(149) |

اضغط على مفتاح **SHIFT** ، ثمَّ مفتاح **tan** فتظهر النتيجة ، ثمّ اضغط على مفتاح **=** ، ثمّ أُدخِلُ القيمةَ 149 :

SHIFTtan(14÷9)=57.2647737278924

بالتقريبِ إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ : 57.3°

إذنْ : ∠A≈57.3°

---

**ثالثًا : العلاقةُ بينَ الجيبِ وجيبِ التمامِ**

**نظريةٌ (مُتطابِقةُ فيثاغورس)**

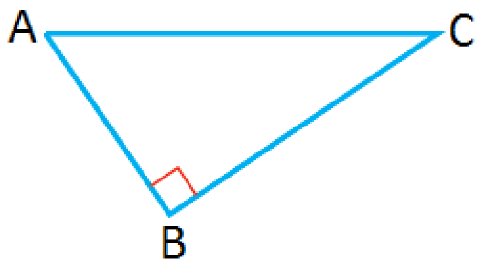
زاويةٌ حادَّةٌ في المُثلَّثِ، فإنَّ A في أيِّ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، حيثُ :

sin2A+cos2A=1

**مثال 4 :**

في المُثلَّثِ المُجاورِ، إذا كانَ $sinC=0.8$

فأجد $cosC$




**الحل :**

| | |
|---|---|
| مُتطابِقةُ فيثاغورس | sin2C+cos2C=1 |
| بتعويضِ sinC=0.8 | (0.8)2+cos2C=1 |
| بالتربيعِ | 0.64+cos2C=1 |
| بطرحِ 0.64 من طرفي المعادلة | cos2C=0.36 |
| بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفينِ | cosC=±0.6 |

بما أنَّ جيبَ التمامِ للزاويةِ C في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ ABC هوَ ناتجُ قسمةِ طولِ الضلعِ المُجاورِ على الوترِ، وبما أنَّ الأطوالَ لا يُمكِنُ أنْ تكونَ سالبةً، فإنَّ

cos C أيْ ؛ قيمةٌ موجبةٌ cosC=0.6

---

**أتعلَّمُ :** قيمةُ كلٍّ منَ الجيبِ، وجيبِ التمامِ، والظلِّ موجبةٌ لأيِّ زاويةٍ حادَّةٍ ••.

**رابعًا : الجيبُ وجيبُ التمامِ للزوايا المُتتامَّةِ**

**مفهومٌ أساسيٌّ (الجيبُ وجيبُ التمامِ للزوايا المُتتامَّةِ)**

إذا كانَ A و B زاويتينِ مُتتامَّتينِ في مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، فإنَّ:

sinA=cos(90°-A)=cosBsinB=cos(90°-B)=cosAcosA=sin(90°-A)=sinBcosB=sin(90°-B)=sinA

**مثال 5 :**

إذا كانَ sin39°=0.6293 ، فأجد cos51° .

**الحل :**

| | |
|---|---|
| تعريفُ الجيبِ وجيبِ التمامِ للزوايا المُتتامَّةِ | sinA=cos(90°-A) |

| | |
|---|---|
| بتعويضِ A=39 | sin39=cos(90°-39) |
| بالتبسيطِ | sin39°=cos(51°) |
| بتعويضِ sin39°=0.6293 | cos(51°)=0.6293 |