القطعُ المُتوسِّطةُ والارتفاعاتُ في المُثلَّثِ

Medians and Altitudes in Triangle

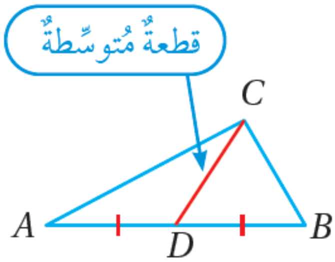
فكرةُ الدرسِ : • تعرُّفُ نظريةِ مركزِ المُثلَّثِ، واستعمالُها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.

• إيجادُ ملتقى ارتفاعاتِ المُثلَّثِ في المستوى الإحداثيِّ.

أولًا : القطعُ المُتوسِّطةُ في المُثلَّثِ

القطعةُ المُتوسِّطةُ للمُثلَّثِ : هيَ القطعةُ المستقيمةُ الواصلةُ بينَ أحدِ رؤوسِ المُثلَّثِ ومنتصفِ الضلعِ المُقابلِ لهُ.

• لكلِّ مُثلَّثٍ ثلاثُ قطعٍ مُتوسِّطةٍ تلتقي في نقطةٍ واحدةٍ تُسمّى مركزَ المُثلَّثِ.

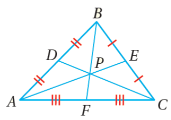


نظريةٌ (مركزُ المُثلَّثِ)

يبعدُ مركزُ المُثلَّثِ عنْ كلٍّ منْ رؤوسِهِ ثلثيْ طولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ ذلكَ الرأسِ ومنتصفِ الضلعِ المُقابلِ لهُ.

مثالٌ : إذا كانَتِ النقطةُ P هيَ مركزَ △ABC ، فإنَّ :

AP=23AE,BP=23BF,CP=23CD



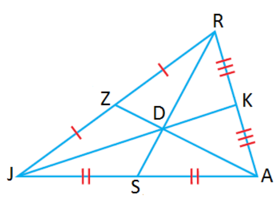
مثال 1

إذا كانت النقطة D هي مركز △AJR ، وكانJK=51cm,RD=24cm

فأجد كلّ مما يأتي :

1) طول JD

2) طول RS



الحل :

1) طول JD

نظريةُ مركزِ المُثلَّث	JD=23JK
بتعويضِ JK=51	JD=23(51)
بالتبسيطِ	JD=34cm

2) طول RS

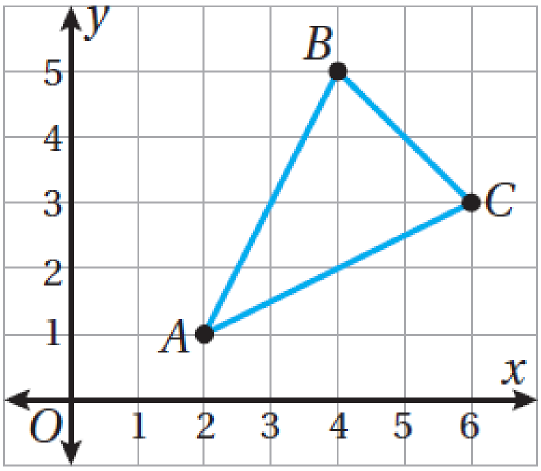
نظريةُ مركزِ المُثلَّث	RD=23RS
بتعويضِ RD=24	24=23RS
بالتبسيطِ	RS=36cm

•• يُمكِنُ إيجادُ مركزِ أيِّ مُثلَّثٍ في المستوى الإحداثيِّ إذا عُلِمَتْ إحداثياتُ رؤوسِهِ.

مثال 2

في المستوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ يظهرُ المُثلَّثُ ΔABC.

أجدُ إحداثييْ مركزِ هذا المُثلَّث.



الحل :

الخطوةُ 1 : أجدُ نقطةَ منتصفِ أحدِ أضلاعِ المُثلَّث.
ولتكنْ D ، أستعملُ صيغةَ نقطةِ المنتصفِ لإيجادِ منتصفِ AC :

صيغةُ نقطةِ المنتصفِ في المستوى الإحداثيِّ	D(x1+x22,y1+y22)
بتعويضِ (x1,y1)=(2,1),(x2,y2)=(6,3)	D(2+62,1+32)
بالتبسيطِ	D(4,2)

الخطوةُ 2 : أجدُ مركزَ المُثلَّث.

• أُعيِّنُ النقطةَ D في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسمُ DB

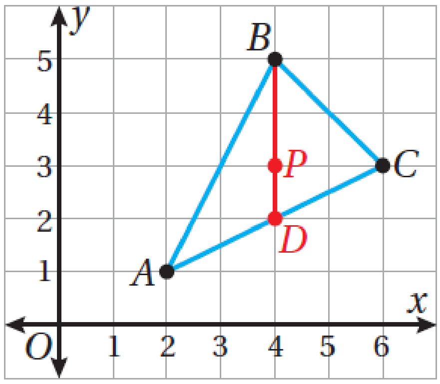
• أُلاحِظُ أنَّ DB رأسيةٌ، وأنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ طولِها

على النحوِ الآتي :

$DB=|y_2-y_1|$ صيغةُ طولِ قطعةٍ مستقيمةٍ رأسيةٍ

$DB=|5-2|$ بالتعويضِ $y_1=2,y_2=5$

$DB=3$ بالتبسيطِ، وإيجادِ القيمةِ المُطلَقةِ



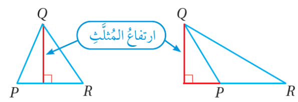
إذنْ، طولُ DB هوَ 3 وحداتٍ.

• أفترضُ أنَّ النقطةَ P هيَ مركزُ △ABC . فإنَّ ، ومنْ ثَمَّ $BP=23DB$ وحدةٍ أسفلَ الرأسِ $23(3)=2$ ؛ لذا يقعُ المركزُ على بُعْدِ B إذنْ، إحداثيّا مركزِ هذا المُثلَّثِ (إحداثيّا النقطةِ P) هما: (4,3).

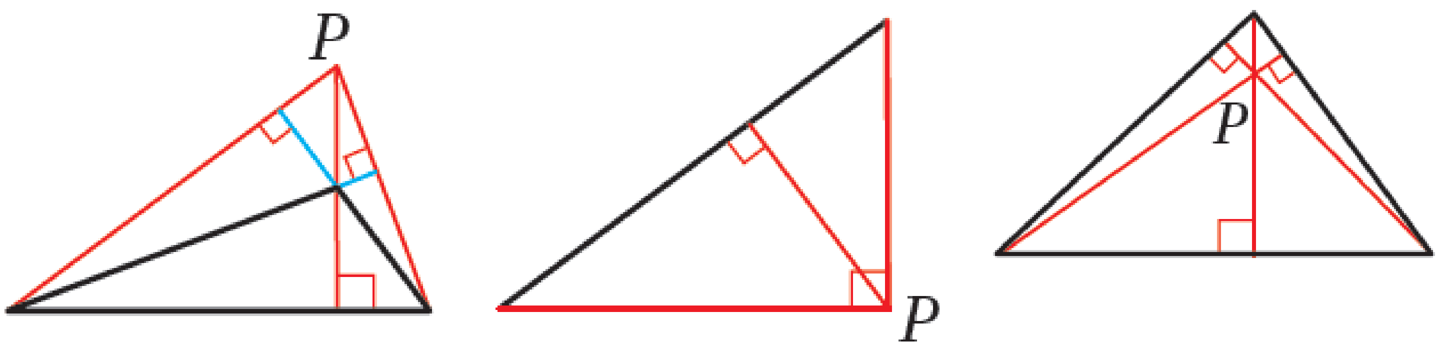
•• أتعلَّمُ : يُمكِنُ التحقُّقُ منْ صحَّةِ الحَلِّ باستعمالِ قطعةٍ مُتوسِّطةٍ أُخرى لإيجادِ مركزِ المُثلَّثِ.

ثانيًا : ارتفاعاتُ المُثلَّثِ

ارتفاعُ المُثلَّثِ : هوَ القطعةُ المستقيمةُ العموديةُ النازلةُ منْ أحدِ رؤوسِ المُثلَّثِ إلى الضلعِ المُقابلِ لها، أوْ إلى المستقيمِ الذي يحوي الضلَعَ المُقابِلَ لها.



•• لكلِّ مُثلَّثٍ ثلاثةُ ارتفاعاتٍ تتقاطعُ في نقطةٍ مُشترَكةٍ تُسمّى ملتقى الارتفاعاتِ ويعتمدُ موقعُها على نوعِ المُثلَّثِ كما في الأشكالِ الآتيةِ:



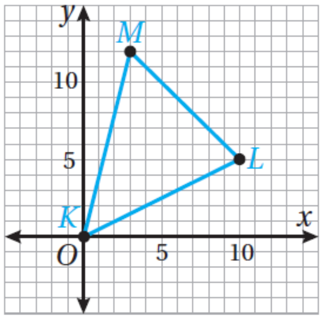
مُثلَّثٌ حادُّ الزوايا، وفيهِ تقعُ P داخلَ المُثلَّثِ.

مُثلَّثٌ قائمُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P عندَ رأسِ القائمةِ.

مُثلَّثٌ مُنفرِجُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P خارجَ المُثلَّثِ.

مثال 3

5) إذا كانَتْ: K(0, 0), M(3, 12), L(10 ، رؤوسِ ΔKLM فأجدْ إحداثيَّ ملتقى ارتفاعاتِ



الحل:

الخطوةُ 1 : أُمثِّلُ ΔKLM بيانيًّا.

الخطوةُ 2 : أجدُ ميليْ ضلعينِ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ.

ميلُ KL	mKL=5-010-0=12
ميلُ LM	mLM=12-53-0=-1

الخطوةُ 3 : أجدُ معادلةَ الارتفاعِ العموديِّ على كلٍّ منَ الضلعينِ اللذينِ اخترْتُهُما في الخطوةِ السابقةِ.

• معادلةُ الارتفاعِ العموديِّ على KL

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ	y-y1=m(x-x1)
بالتعويضِ (x1,y1)=(3,12),m=-2	y-12=-2(x-3)
بالتبسيطِ، وإعادةِ ترتيبِ المعادلةِ	y=-2x+18

أتعلم : الرأسُ M هوَ الرأسُ المُقابِلُ ل KL ؛ لذا يقعُ على الارتفاعِ العموديِّ على KL ؛ أيْ إنَّهُ يساوي سالبَ مقلوبِ ميلِ KL ميلُ الارتفاعِ العموديِّ على KL يساوي 2-

• معادلةُ الارتفاعِ العموديِّ على LM

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ	y-y1=m(x-x1)
بالتعويضِ (x1,y1)=(0,0),m=1	y-0=1(x-0)
بالتبسيطِ، وإعادةِ ترتيبِ المعادلةِ	y=x

أتعلم : الرأسُ K هوَ الرأسُ المُقابِلُ ل LM ؛ لذا يقعُ على الارتفاعِ العموديِّ على LM ؛ أيْ إنَّهُ يساوي سالبَ مقلوبِ ميلِ LM ميلُ الارتفاعِ العموديِّ على LM يساوي 1

الخطوةُ 4 : أحُلُّ نظامَ المعادلتينِ الناتجَ لإيجادِ إحداثيَّ ملتقى الارتفاعاتِ.

في المعادلةِ الأولى y بدلًا منْ x فإنَّني أُعوِّضُ ، y بما أنَّ المعادلةَ الثانيةَ مكتوبةٌ بالنسبةِ إلى :

المعادلةُ الأولى	y=-2x+18
بالتعويضِ y بـ x عن	x=-2x+18
بجمعِ 2x لطرفيِ المعادلةِ	3x=18

بقسمةِ طرفي المعادلةِ على 3 $x=6$

بما أنَّ $x = 6$ ، فإنَّ $y = 6$ ، وذلكَ بتعويضِ قيمةِ x في أيٍّ منَ المعادلتينِ.

إذنْ، إحداثيّا ملتقى ارتفاعاتِ رؤوسِ ΔKLM هما : $(6 , 6)$.

مُلخَّصُ المفهومِ (قطعٌ مستقيمةٌ ونقاطٌ خاصةٌ في المُثلَّثِ)

القطعُ الخاصةُ :	**المُنصِّفاتُ العموديةُ**	**مُنصِّفاتُ الزوايا**	**القطعُ المُتوسِّطةُ**	**الارتفاعاتُ**
نقطةُ التلاقي :	مركزُ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّثِ.	مركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ.	مركزُ المُثلَّثِ	ملتقى الارتفاعاتِ.
الخاصيةُ :	النقطةُ P مركزُ الدائرةِ الخارجيةِ لـ ΔABC وهيَ تقعُ على أبعادٍ متساويةٍ منْ رؤوسِهِ.	النقطةُ P مركزُ الدائرةِ الداخليةِ لـ ΔABC وهيَ تقعُ على أبعادٍ متساويةٍ منْ أضلاعِهِ.	النقطةُ P مركزُ ΔABC ، وهيَ تبعدُ عنْ كلِّ رأسٍ ثلثَيْ طولِ القطعةِ الواصلةِ بينَ ذلكَ الرأسِ ومنتصفِ الضلعِ المُقابِلِ لَهُ.	النقطةُ P هيَ ملتقى ارتفاعاتِ ΔABC
مثالٌ :