مقاييسُ التشتُّتِ

Measures of Variation

فكرةُ الدرسِ • إيجادُ التباينِ والانحرافِ المعياريِّ لبياناتٍ مفردةٍ، وأُخرى مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ.

• تحديدُ أثرِ تحويلِ البياناتِ في كلٍّ منَ الوسطِ الحسابيِّ، والانحرافِ المعياريِّ.

أولًا: التباين ولانحراف المعياري

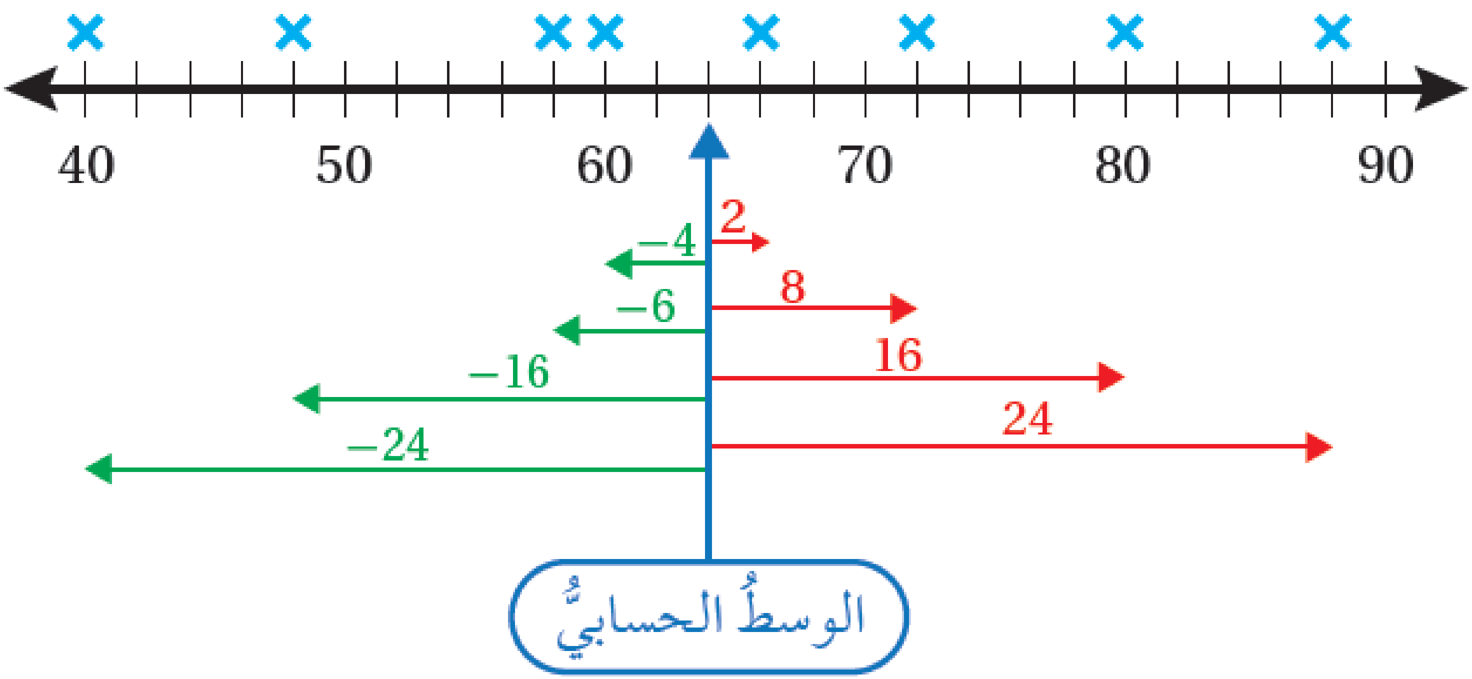
تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ مقاييسَ التشتُّتِ تُستعمَلُ لوصفِ مقدارِ تشتُّتِ البياناتِ وتباعدِها. ومنْ هذهِ المقاييسِ : المدى، والمدى الربيعيُّ. ولكنْ، كلٌّ منْ هذينِ المقياسينِ يعتمدُ على قِيَمٍ مُحدَّدةٍ منَ البياناتِ، لا على القِيَمِ جميعِها؛ لذا توجدُ مقاييسُ أُخرى أكثرُ دقَّةً للتشتُّتِ تأخذُ جميعَ قِيَمِ البياناتِ بالاعتبارِ.

في ما يأتي مجموعةٌ منَ البياناتِ، وسطُها الحسابيُّ هوَ: x¯=64

58, 88, 40, 60, 72, 66, 80, 48

لإيجادِ انحرافِ (بُعْدِ) كلِّ مشاهدةٍ منْ قِيَمِ البياناتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ. وبذلكَ x-x¯ تُستعمَلُ الصيغة،

فإنَّ انحرافَ قِيَمِ البياناتِ أعلاهُ عنْ وسطِها الحسابيِّ باستعمالِ هذهِ الصيغةِ هوَ كما يأتي:



عندَ جمعِ الانحرافاتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ أعلاهُ، فإنَّ الناتجَ يكونُ كما يأتي:

$-24 + -16 + -6 + -4 + 2 + 8 + 16 + 24 = 0$

أُلاحِظُ أنَّ مجموعَ الانحرافاتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ يساوي صفرًا، وهذا لا يقتصرُ على هذهِ البياناتِ فقطْ، وإنَّما يتحقَّقُ في

أيِّ مجموعةِ بياناتٍ عدديةٍ؛ لذا، فإنَّ حسابَ مجموعِ الانحرافاتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ لا يُقدِّمُ شيئًا عنْ تشتُّتِ البياناتِ، ولا

يُميِّزُ أيَّ مجموعةِ بياناتٍ عنْ أُخرى. إلّا أنَّ إيجادَ مُربَّعاتِ هذهِ الانحرافاتِ يجعلُها موجبةً. ولهذا، فإنَّ مجموعَ مُربَّعاتِ

الانحرافاتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ لا يساوي صفرًا.

•• عندَ حسابِ الوسطِ الحسابيِّ لمُربَّعاتِ الانحرافاتِ، بقسمةِ مجموعِها على عددِها، ينتجُ مقياسٌ مُهِمٌّ منْ مقاييسِ

فمثلًا ، يُمكِنُ حسابُ تباينِ مجموعةِ البياناتِ أعلاهُ على النحوِ الآتي . σ^2 ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ ، (variance) التشتُّتِ يُسمّى التباينَ:

σ2=(-24)2+(-16)2+(-6)2+(-4)2+22+82+162+2428=223

وبأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للتباينِ، ينتجُ مقياسٌ آخرُ لتشتُّتِ البياناتِ يُسمّى الانحرافَ المعياريَّ (standard deviation).

ويُقرَأُ : ميو ،μ في هذا الدرسِ، سيُنظَرُ إلى جميعِ البياناتِ بوصفِها تُمثِّلُ مجتمعًا إحصائيًّا، يُرمَزُ إلى وسطِهِ الحسابيِّ بالرمزِ.

•• الحرفُ اليونانيُّ : **رموزٌ رياضيةٌ** σ يُقرَأُ : سيجما، وهوَ يُستعمَلُ للدلالةِ على الانحرافِ المعياري . أمّا الرمزُ σ^2 فيُقرَأُ : سيجما تربيعٌ، وهوَ يُستعمَلُ للدلالةِ على التباينِ.

(مفهومٌ أساسيٌّ (التباينُ، والانحرافُ المعياريُّ

بالصيغةِ الآتيةِ ،μ ووسطُها الحسابيُّ ،n يُعرَّفُ تباينُ مجموعةٍ منَ البياناتِ، عددُها :

σ2=∑(x-μ)2n

ويكونُ الانحرافُ المعياريُّ لمجموعةِ البياناتِ هوَ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ.

مثال 1:

في ما يأتي عدد زائري عيادة طبية خلال خمسة أيام: 8 ، 13 ، 9 ، 14 ، 16

1) أجد التباين لعدد زوار العيادة في هذه الأيام .

2) أجد الانحراف المعياري لعدد زوار العيادة في هذه الأيام .

الحل :

1) أجد التباين لعدد زوار العيادة في هذه الأيام .

الخطوة 1 : أجد الوسط الحسابي لعدد الزوار

صيغة الوسط الحسابي: μ=∑xn

بالتعويض والتبسيط: μ=8+13+9+14+165=12

الخطوة 2 : أنشئ جدولا أحسب فيه انحراف كل قيمة عن الوسط الحسابي ، إضافة إلى حساب مربعات الفروق

(x-μ)2	x-μ	x
16	4 -	8
1	1	13
9	3-	9
4	2	14
16	4	16
46		**المجموع**

بالتعويض في صيغةِ التباين:

σ2=∑(x-μ)2n=465=9.2

إذن التباين لعدد زوار العيادة في هذه الأيام هو 9.2

(2 أجد الانحراف المعياري لعدد زوار العيادة في هذه الأيام .

بما إنّ الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين ، فإنّ: σ=9.2≈3.03

•• توجدُ صيغةٌ أُخرى لإيجادِ التباينِ منْ دونِ حاجةٍ إلى حسابِ انحرافِ المشاهداتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ، وهذهِ الصيغةُ هيَ :

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2$$

•• **أتعلَّمُ :** تُستعمَلُ هذهِ الصيغةُ لتسهيلِ الحساباتِ في حالِ كانَتْ قيمةُ الوسطِ الحسابيِّ عددًا غيرَ صحيحٍ.

مثال 2 :

في ما يأتي علامات 6 طلبة في اختبار رياضيات نهايته العظمى هي 20 :

16 , 11 ، 9 ، 13 ، 18 ، 14

الحل :

لإيجادِ التباينِ، أتَّبِعُ الخطواتِ الآتيةَ :

الخطوةُ 1 : أجدُ الوسطَ الحسابيَّ.

صيغة الوسط الحسابي

$$\mu = \frac{\sum x}{n}$$

بالتعويض و التبسيط

$$= \frac{14 + 18 + 13 + 9 + 11 + 16}{6} = \frac{81}{6}$$

الخطوةُ 2 : أُنشِئُ جدولً أحسُبُ فيهِ مُربَّعَ كلِّ مشاهدةٍ.

x^2	x
196	14
324	18
169	13
81	9
121	11
256	16
1147	المجموع

الخطوةُ 3 : أُعوِّضُ القِيَمَ التي توصَّلْتُ إليْها بصيغةِ التباينِ.

الصيغةُ الثانيةُ للتباينِ

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2$$

بتعويضِ :

$$\mu = \frac{81}{6} \qquad = \frac{1147}{6} - \left(\frac{81}{6}\right)^2$$

$$\sum x^2 = 1147$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$$\approx 9$$

بما أنَّ الانحرافَ المعياريَّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ، فإنَّ :

$$\sigma \approx 3$$

ثانيًا : التباينُ والانحرافُ المعياريُّ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ

(مفهومٌ أساسيٌّ (التباينُ والانحرافُ المعياريُّ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ

إذا كانَتْ مُنظَّمةً في جداولَ تكراريةٍ، μ ووسطُها الحسابيُّ، n يُمكِنُ إيجادُ تباينِ مجموعةٍ منَ البياناتِ، عددُها،

عددُ مَرّاتِ تكرارِ المشاهدةِ، باستعمالِ إحدى الصيغتينِ الآتيتينِ f حيثُ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum((x-\mu)^2 \times f)}{\sum f} \quad \text{or} \quad \sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

ويكونُ الانحرافُ المعياريُّ لمجموعةِ البياناتِ هوَ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ.

مثال 3 :

يُبيِّنُ الجدولُ التالي عددَ الأخوةِ والأخواتِ لمجموعةٍ منْ طلابِ الصفِّ التاسعِ في إحدى المدارس. أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

عدد الإخوة والأخوات	1	2	3	4	5

1	3	7	5	4	التكرار (f)

الحل :

لإيجادِ التباينِ، أُنشِئُ جدولً جديدًا يحوي الأعمدةَ المُظلَّلة عناوينُها.

x	f	$x \times f$	x^2	$x^2 \times f$
1	4	4	1	4
2	5	10	4	20
3	7	21	9	63
4	3	12	16	48
5	1	5	25	25
المجموع	20	52	55	160

بالتعويضِ في صيغةِ الوسطِ الحسابيِّ

$$\mu = \frac{\sum (x \times f)}{\sum f} = \frac{52}{20}$$

الصيغةُ الثانيةُ للتباينِ

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

بالتعويضِ

$$= \frac{160}{20} - \left(\frac{52}{20}\right)^2$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$$= 1.24$$

بما أنَّ الانحرافَ المعياريَّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ ، فإنَّ :

$$\sigma \approx 1.115$$

ثالثًا : تحويلُ البياناتِ

تحويلُ البياناتِ (data transformation) هوَ تطبيقُ عمليةٍ حسابيةٍ (أوْ أكثرَ) على جميعِ القِيَمِ في مجموعةِ بياناتٍ للحصولِ على مجموعةٍ أُخرى مختلفةٍ.

مفهومٌ أساسيٌّ (تحويلُ البياناتِ)

عندَ تحويلِ مجموعةٍ منَ البياناتِ باستعمالِ العلاقةِ : $y = ax + b$ ، حيثُ a و b عددانِ حقيقيانِ، و x المشاهدةُ قبلَ التحويلِ، و y المشاهدةُ بعدَ التحويلِ ، فإنَّهُ :

- يُمكِنُ إيجادُ الوسطِ الحسابيِّ للبياناتِ بعدَ التحويلِ μ_y باستعمالِ العلاقةِ :

  $\mu_y = a\mu_x + b$ ، حيثُ μ_x الوسطُ الحسابيُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ.

- يُمكِنُ إيجادُ الانحرافِ المعياريِّ للبياناتِ بعدَ التحويلِ σ_y باستعمالِ العلاقةِ :

  $\sigma_y = |a|\sigma_x$ ، حيثُ σ_x الانحرافُ المعياريُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ.

•• يُستعمَلُ تحويلُ البياناتِ أحياناً لإيجادِ الوسطِ الحسابيِّ والانحرافِ المعياريِّ للبياناتِ المُعقَّدةِ(ذاتِ القِيَمِ غيرِ الصحيحةِ)؛ تسهيلًا لإجراءِ الحساباتِ.

مثال 4 :

رُصِدَتْ درجاتُ الحرارةِ (بالسلسيوس) في 5 مناطقَ مختلفةٍ منَ العاصمةِ عمَّان في أحدِ الأيامِ، وكانَتْ على النحوِ الآتي:

31.6 , 32.2 , 31.8 , 31.5 , 32.3

درجةُ الحرارةِ بعدَ التحويلِ y درجةُ الحرارةِ قبلَ التحويلِ، و x لتحويلِ درجاتِ الحرارةِ، حيثُ y = 10x - 300 : استُعمِلَتِ العلاقةُ:

a) أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

b) أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ بناءً على النتائجِ في الفرعِ السابقِ.

الحل :

a) أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

الخطوةُ 1 : أجدُ درجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

لتحويلِ درجاتِ الحرارةِ، بحيثُ تصبحُ كالآتي : 16 , 22 , 18 , 15 , 23 y =10x -300 : أستعملُ العلاقةَ

الخطوةُ 2: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ

$$\mu = \frac{\sum y}{n}$$

بالتعويضِ، والتبسيطِ

$$= \frac{23 + 15 + 18 + 22 + 16}{5} = 18.8$$

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ هوَ : **18.8**

الخطوةُ 3: أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

أُنشِئُ جدولً أحسُبُ فيهِ مُربَّعَ كلِّ مشاهدةٍ، ثمَّ أُعوِّضُ في صيغةِ الانحرافِ المعياريِّ :

y^2	y
529	23
225	15
324	18
484	22
256	16

المجموع	1818

الصيغةُ الثانيةُ للانحرافِ المعياريِّ

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \mu_y^{\,2}}$$

بتعويضِ n = 5

$\sum y^2 = 1818$

$\mu_y = 18.8$

$$= \sqrt{\frac{1818}{5} - (18.8)^2}$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$$\approx 3.2$$

إذنْ، الانحرافُ المعياريُّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ هوَ **3.2**

b) أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ بناءً على النتائجِ في الفرعِ السابقِ.

- **الوسطُ الحسابيُّ قبلَ التحويلِ :**

صيغةُ تحويلِ الوسطِ الحسابيِّ $\mu_y = a\mu_x + b$

بتعويضِ $a = 10$, $b = -300$

$\mu_y = 18.8$

$$18.8 = 10\mu_x - 300$$

بجمعِ 300 إلى طرفي المعادلةِ

$$318.8 = 10\mu_x$$

بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 10

$$31.88 = \mu_x$$

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ هوَ **31.88**

• **الانحرافُ المعياريُّ قبلَ التحويلِ:**

صيغةُ تحويلِ الانحرافِ المعياريِّ

$$\sigma_y = |a|\sigma_x$$

بتعويضِ a = 10 ،

$$3.2 \approx |10|\sigma_x$$

$$\sigma_y = 3.2$$

بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 10

$$0.32 \approx \sigma_x$$

إذنْ، الانحرافُ المعياريُّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ هوَ **0.32**

•• يُمكِنُ أحيانًا إيجادُ الوسطِ الحسابيِّ والانحرافِ المعياريِّ لمجموعةٍ منَ البياناتِ بعدَ تحويلِها منْ دونِ معرفةِ البياناتِ الأصليةِ، أوِ البياناتِ بعدَ التحويلِ؛ إذْ يكتفى بمعرفةِ العلاقةِ التي استُعمِلَتْ لإجراءِ التحويلِ، وبعضِ المعلوماتِ عنِ البياناتِ بعدَ التحويلِ.

مثال 5 :

رُصِدَتْ سرعةُ 20 درَّاجة هوائيةً مشاركةً في سباقٍ للدرّاجات عندَ مرورِها منْ أحدِ الشوارعِ بوحدةِ km/h ، ثمَّ حُوِّلَتْ سرعةُ هذهِ الدرّاجات باستعمالِ العلاقةِ: $y = x - 10$ ، حيثُ y السرعةُ بعدَ التحويلِ، و x السرعةُ قبلَ التحويلِ. إذا كانَ:

$\Sigma y = -6$, $\Sigma y^2 = 2614$ ، فأجدُ كُلًّ ممّا يأتي:

1) الوسطُ الحسابيُّ لسرعةِ الدرّاجات قبلَ التحويلِ.

2) الانحرافُ المعياريُ لسرعةِ الدرّاجات قبلَ التحويلِ.

الحل :

1) الوسطُ الحسابيُّ لسرعةِ الدرّاجات قبلَ التحويلِ.

الخطوةُ 1 : أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لسرعةِ الدرّاجات بعدَ التحويلِ.

صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ

$$\mu = \frac{\sum y}{n}$$

بالتعويضِ

$$= \frac{-6}{20} = -0.3$$

الخطوةُ 2 : أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لسرعةِ الدرّاجات قبلَ التحويلِ.

صيغةُ تحويلِ الوسطِ الحسابيِّ	$\mu_y = a\mu_x + b$
بتعويضِ $\mu_y = -0.3$, $a = 1$, $b = -10$	$-0.3 = \mu_x - 10$
بجمعِ 10 إلى طرفي المعادلةِ	$9.7 = \mu_x$

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لسرعةِ الدرّاجات قبلَ التحويلِ هوَ **9.7**

2) الانحرافُ المعياريُ لسرعةِ الدرّاجات قبلَ التحويلِ.

الخطوةُ 1 : أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لسرعةِ الدرّاجات بعدَ التحويلِ.

الصيغةُ الثانيةُ للانحرافِ المعياريِّ

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \mu_y^{\,2}}$$

بتعويضِ $\Sigma y^2 = 2614$, $\mu y = -0.3$

$$= \sqrt{\frac{2614}{20} - (-0.3)^2}$$

≈ 11.4

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

الخطوةُ 2 : أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لسرعةِ الدرّاجات قبلَ التحويلِ.

الانحرافُ المعياريُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ هوَ 11.4 تقريبًا؛ لأنَّ التحويلَ تمثَّلَ في إضافةِ (10-) ، وهذا لا يُؤثِّرُ في الانحرافِ المعياريِّ.