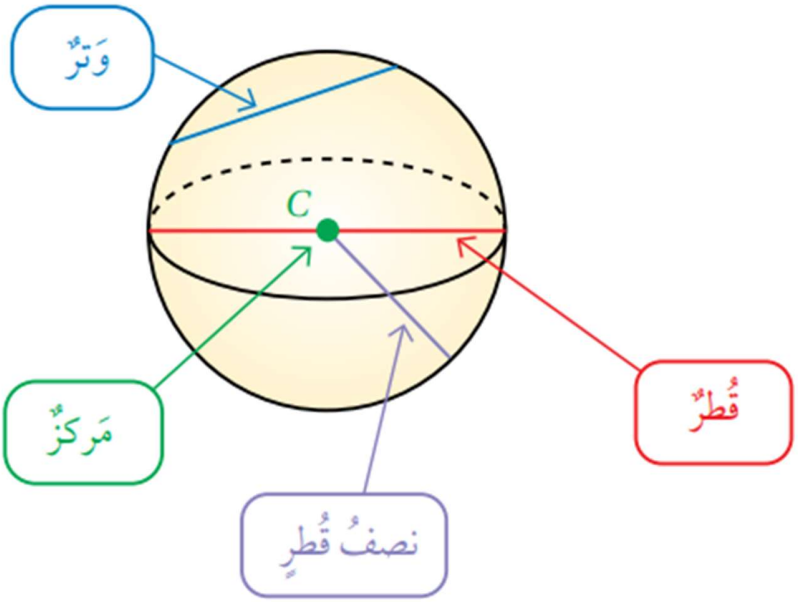
حجم الكرة ومساحة سطحها



مفاهيم أساسية:

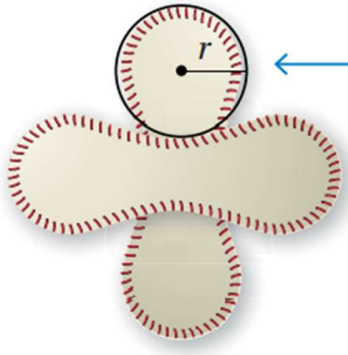
الكرة : هي مجموعة النقاط جميعها في الفضاء التي تبعد بعداً ثابتاً عن نقطة معلومة تسمى المركز .

نصف قطر الكرة: هو قطعة مستقيمة تصل بين مركز الكرة وأي نقطة على الكرة .

قطر الكرة: وتر يمر في المركز .

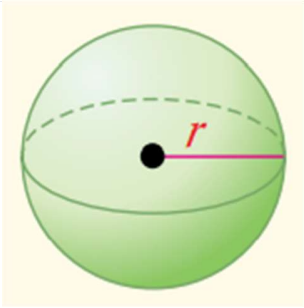
يمكن إستنتاج صيغة لحساب مساحة سطح كرة وذلك عن طريق قص كرة إلى أربع دوائر متطابقة طول نصف قطر كل منها **r** ; كما في الشكل المجاور

،



4πr2 : ، والكرة تتشكل من أربع دوائر ، فإن مساحة سطح الكرة ستكون πr2=𝜋 وبما أن مساحة الدائرة

أتعلم :



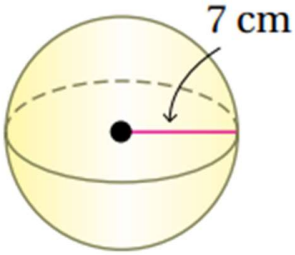
حيث : **قانون مساحة سطح الكرة 𝜋.𝑟 = 4𝜋𝑟2**

1- r نصف قطر الكرة .

2-π عدد غير نسبي قيمته التقريبية تساوي **3.14** أو 227 .

مثال ١ : أجدُ مساحةَ سطحِ كلِّ كرة مما يأتي، وأقربُ إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرة :

1



الحل :

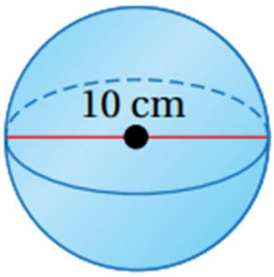
1- نكتب قانون مساحة سطح الكرة : 𝜋.𝑟 = 4𝜋𝑟2

2-نعوض قيمة نصف القطر المعطاة بالرسم : 𝜋4(7)2 = 196𝜋=

615.8 وعليه ستكون مساحة سطح الكرة تساوي تقريباً 3.14 ≈ 𝜋 باستعمال الآلة الحاسبة نعوض قيمة 3-

---

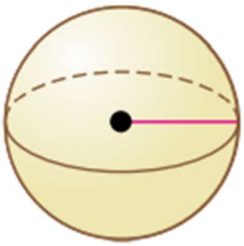
2



نلاحظ أن المعطى في الشكل هو القطر ويساوي ١٠ ، لذلك فإن
نصف القطر يساوي ٥
1- نكتب قانون مساحة سطح الكرة : 𝐴.𝑆 = 4𝜋𝑟2
2- نعوض قيمة نصف القطر المعطاة بالرسم: 𝐴.𝑆 = 4𝜋(5)2 = 100𝜋
3- باستعمال الآلة الحاسبة نعوض قيمة 𝜋 ≈ 3.14 تقريباً تساوي الكرة سطح مساحة ستكون وعليه **314.2**

ملاحظات:
1- يمكن التعبير عن المساحة بالصيغة التي تحتوي π دون الحاجة للخطوة الأخيرة.
2- يمكن إيجاد طول القطر أو نصف القطر لدائرة إذا علمت مساحة سطحها .

مثال ٢ : أجدُ طولَ قُطرِ الكرةِ المجاورةِ إذا علمْتُ أنَّ مساحةَ سطحِها 𝐴.𝑆 = 30𝜋 𝑚2 وأقرّبُ إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ.

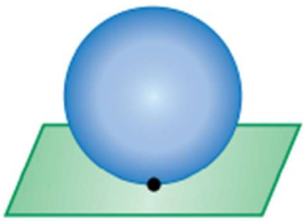


$S.A = 30\pi\ m^2$

1- نكتب قانون مساحة سطح الكرة : 𝐴.𝑆 = 4𝜋𝑟2
2- نعوض قيمة مساحة سطح الكرة 𝐴.𝑆 = 30𝜋 = 4𝜋r2
3- نقسمة طرفي المعادلة على 4𝜋 : فتصبح المعادلة : 7.5=2𝑟
4- وبأخذ الجذر للطرفين لإيجاد قيمة r فينتج إجابتين لطول نصف القطر 𝑟=±2.7
ولأنه لا يوجد طول بالسالب ، فإن الإجابة السالبة ستهمل .
5- نضرب نصف القطر ب ٢ لنجد طول القطر ، وعليه فإن طول القطر سيكون **5.4m**

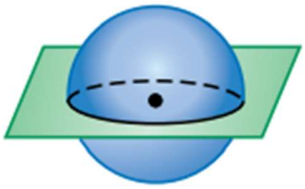
أتعلم :

1- إذا قطعَ مستوى كرة فإنَّه يقطعُها في نقطة أو في دائرة.



نقطةٌ

دائرةٌ



دائرةٌ كُبرى

2- إذا كانَ المستوى يحتوي مركزَ الكرة فعندها يُسمّى هذا القطع الدائرةُ الكُبرى.

3- ما يميز الدائرة الكبرى أنَّ :

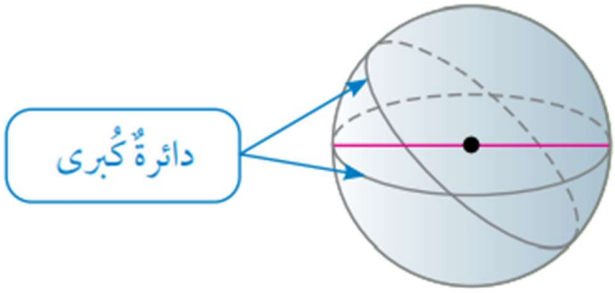
أ) مركزها هو مركز الكرة نفسه .

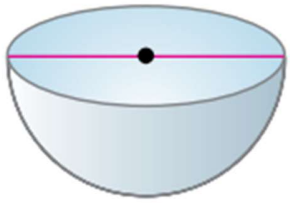
ب) طولُ نصفِ قُطرِها مساوٍ لطول نصف قُطرِ الكرةِ.

ج) محيطها هو محيط الكرةِ نفسه.

د) تقسم الكرة إلى نصفين متطابقين يسمى كل منهما نصف كرة.

4- تحتوي الكرة عدد لا نهائي من الدوائر الكبرى .





نصفُ كرةٍ

مثال ٣ (من الحياة) :

تقريباً ، أجدُ مساحةَ سطح الكرةِ الأرضيةِ التقريبيةَ، إذا بلغَ طولُ خطِّ استواءِ الكرةِ الأرضيةِ حوالَيْ ٤٠٠٧٠ kmمقرّبًا إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ.

الحل :

بما أنَّ خطَّ الاستواءِ يمثّلُ محيط دائرة كبرى للكرةِ الأرضيةِ ، فطوله يمثّل محيط الكرة الأرضية.

لذا سنستخدم قانون محيط الدائرة لإيجاد نصف القطر كالتالي :

$$\text{محيط الدائرة} = 2\pi r \approx 40070$$

$$r = \frac{40070}{2\pi} \approx 6377.3$$

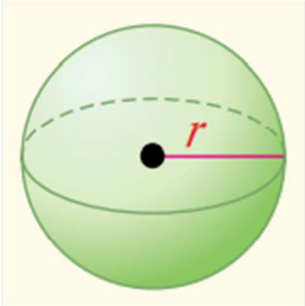
ثم نستعمل نصف القطر لإيجاد مساحة سطح الكرة.

$$\text{مساحة سطح الكرة} = 4\pi r^2 = 4\pi(6377.3)^2 \approx 511073731$$

إذن ، مساحة سطح الكرة الأرضية تقريباً 511073731 $م^2$.

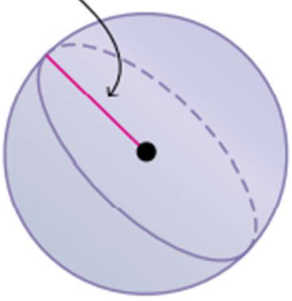
أتعلم :

قانون حجم الكرة : $\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3}\pi r^3$



مثال ٤ : أجدُ حجمَ كلِّ كرةٍ أَوْ نصفِ كرةٍ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي لأقربِ عددٍ صحيح

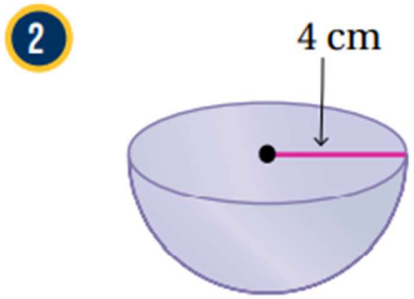
1



نكتب قانون حجم الكرة ثم نعوض نصف القطر ٨

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(8)^3 = \frac{2048}{3}\pi \approx 2145$$

إذن ، حجم الكرة تقريباً 32148 $م^3$



نكتب قانون حجم نصف الكرة ثم نعوض نصف القطر ٤ .

$\frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi r^3) = \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi(4)^3) = \frac{1}{2}(\frac{256}{3}\pi) = 134$

تقريباً 134 ٣ إذن ، حجم نصف الكرة

أتعلم :

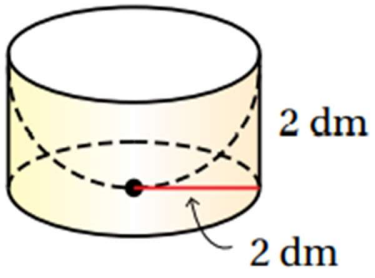
يمكنُ إيجادُ حجمِ المجسّمِ المركّبِ بتحديدِ الأشكالِ الهندسيةِ الّتي يتكوّنُ مِنْها والعمليةِ الحسابيةِ اللازمةِ لإيجادِ حجمِهِ.

مثل :

1- أن نطرح (حجم المجسم الكبير - حجم المجسم الصغير) ونستخدمها عادةً إذا فرغنا مجسم صغير من مجسم كبير.

2- أن نجمع (حجم المجسم الأول + حجم المجسم الثاني) ونستخدمها عادةً إذا كان المجسم مركباً من أكثر من مجسم .

مثال ٥ : المجسّمُ المجاورُ أُسطوانةٌ تحتوي نصفَ كرةٍ مفرغةٍ، أجدُ حجمَ الجزءِ المتبقي من الأُسطوانةِ دونَ نصفِ الكرةِ مقرّبًا إجابتي لأقربِ جزء مِنْ مئة .



بالاعتماد على الملاحظة السابقة سنقوم بطرح حجم نصف الكرة من حجم الأسطوانة كالتالي :

$V = V_{cyl} - \frac{1}{2}V_{sphere} = \pi r^2 h - \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi r^3) = \pi(2)^2(2) - \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi(2)^3) = 8\pi - \frac{16}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi \approx 8.38$

تقريباً 8.38 ٣ إذن ، حجم المجسم