الدرس الثاني: المستقيمات في الفضاء

مسألة اليوم صفحة 126

اتجاه مسار الإشارة الأولى: $\langle -11-(-1), 9-4, 15-5\rangle = \langle -10, 5, 10\rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 5 دون التأثير على الاتجاه: $\vec{\mathbf{v}}_1 = \langle -2, 1, 2\rangle$

معادلة مسار الأولى: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -1, 4, 5\rangle + t\langle -2, 1, 2\rangle$

اتجاه مسار الإشارة الثانية: $\langle 2-(-5), -5-9, 17-3\rangle = \langle 7, -14, 14\rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 7 دون التأثير على الاتجاه: $\vec{\mathbf{v}}_2 = \langle 1, -2, 2\rangle$

معادلة مسار الثانية: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -5, 9, 3\rangle + u\langle 1, -2, 2\rangle$

نبحث في التقاطع بمساواة متجهي الموقع $\vec{\mathbf{r}}$:

$\langle -1-2t, 4+t, 5+2t\rangle = \langle -5+u, 9-2u, 3+2u\rangle$

$-1-2t = -5+u \Longrightarrow 2t+u = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$4+t = 9-2u \Longrightarrow t+2u = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$5+2t = 3+2u \Longrightarrow -2t+2u = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

نحل المعادلتين(1)، و(2) لإيجاد قيم t, u

$(1)\times 2-(2) \Longrightarrow 3t = 3 \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow u = 2$

نفحص تحقق المعادلة (3) عند هذه القيم t=1, u=2 :

$-2(1)+2(2) \overset{?}{=} 2$

$-2+4 = 2$ ✓

إذن، يتقاطع مسارا الإشارتين عندما يكون t=1, u=2 ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض هي النقطة t=1 في معادلة مسار الإشارة الأولى، فتكون نقطة التقاطع $(-3, 5, 7)$

	أتحقق من فهمي صفحة 127
a	$\overrightarrow{GH} = \langle -3, -1, 7 \rangle$ $\overrightarrow{KL} = \langle 3, 2, 0 \rangle$ نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي c يجعل العبارة $\overrightarrow{GH} = c(\overrightarrow{KL})$ صحيحة، ونستنتج أن $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{KL}$ غير متوازيين
b	$\overrightarrow{GL} = \langle 0, 2, 14 \rangle$ $\overrightarrow{HK} = \langle 0, 1, 7 \rangle$ نلاحظ أن $\overrightarrow{GL} = 2\overrightarrow{HK}$ ونستنتج أن $\overrightarrow{GL} \parallel \overrightarrow{HK}$
	أتحقق من فهمي صفحة 129
	$\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UR} + \overrightarrow{RV}$ $= \frac{1}{2}(-4\vec{\mathbf{a}}) + \frac{1}{2}(6\vec{\mathbf{b}}) = 3\vec{\mathbf{b}} - 2\vec{\mathbf{a}}$ $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT}$ $= -4\vec{\mathbf{a}} + 6\vec{\mathbf{b}} = 2(3\vec{\mathbf{b}} - 2\vec{\mathbf{a}})$ إذن، $\overrightarrow{ST} = 2\overrightarrow{UV}$ ومنه المتجهان $\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{UV}$ متوازيان.

<table>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 130</td></tr>
<tr><td></td><td>

$$\overrightarrow{OF} = \frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \frac{5}{2}\overrightarrow{OF} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE}$$

$$= \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

$$= \vec{b} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA})$$

$$= \vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = 2\overrightarrow{OE} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

من العلاقتين (1)، و(2) نستنتج أنّ:

$$\frac{5}{2}\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OE} \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OE}$$

وهذا يعني أن المتجهين $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OE}$ متوازيان، وبما أنهما ينطلقان من النقطة O نفسها، إذن، النقاط O, E, F تقع على استقامة واحدة.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 132</td></tr>
<tr><td></td><td>

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

$$\vec{r} = \langle 0, -6, 9\rangle + t\langle 1, -4, -5\rangle$$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 133</td></tr>
<tr><td></td><td>

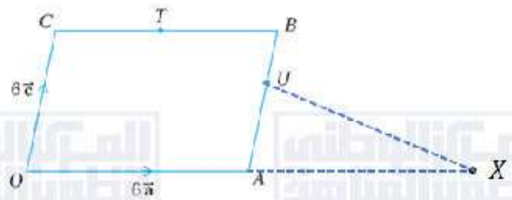
$$\overrightarrow{NM} = \langle 3 - 2, 7 - (-4), -9 - 3\rangle = \langle 1, 11, -12\rangle$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = \langle 3, 7, -9\rangle + t\langle 1, 11, -12\rangle$$
</td></tr>
</table>

أتحقق من فهمي صفحة 134	
a	$\vec{\mathbf{r}} = (11 + 7t)\hat{\mathbf{i}} + (5 - 2t)\hat{\mathbf{j}} + (-6 + 5t)\hat{\mathbf{k}}$ نبحث عن قيمة لـ t تحقق: $39\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 14\hat{\mathbf{k}} = (11 + 7t)\hat{\mathbf{i}} + (5 - 2t)\hat{\mathbf{j}} + (-6 + 5t)\hat{\mathbf{k}}$ $39 = 11 + 7t \Rightarrow t = 4$ $-3 = 5 - 2t \Rightarrow t = 4$ $14 = -6 + 5t \Rightarrow t = 4$ بما أن للمعادلات الثلاث الحل نفسه $(t = 4)$، فإن النقطة التي متجه موقعها $39\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 14\hat{\mathbf{k}}$ وهي النقطة (39, -3, 14) تقع على المستقيم l لأنها تنتج من تعويض $t = 4$ في معادلته.
b	$t = -3 \Rightarrow \vec{\mathbf{r}} = (11 + 7(-3))\hat{\mathbf{i}} + (5 - 2(-3))\hat{\mathbf{j}} + (-6 + 5(-3))\hat{\mathbf{k}}$ $= -10\hat{\mathbf{i}} + 11\hat{\mathbf{j}} - 21\hat{\mathbf{k}}$
c	متجه الموقع للنقطة $(v, -3v, 5v - 1)$ هو $v\hat{\mathbf{i}} - 3v\hat{\mathbf{j}} + (5v - 1)\hat{\mathbf{k}}$ $v\hat{\mathbf{i}} - 3v\hat{\mathbf{j}} + (5v - 1)\hat{\mathbf{k}} = (11 + 7t)\hat{\mathbf{i}} + (5 - 2t)\hat{\mathbf{j}} + (-6 + 5t)\hat{\mathbf{k}}$ $v = 11 + 7t \ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$ $-3v = 5 - 2t \ldots\ldots\ldots.(2)$ $5v - 1 = -6 + 5t \ldots..(3)$ $(1) \times 3 + (2) \Rightarrow 0 = 38 + 19t$ $\Rightarrow t = -2$ $\Rightarrow v = -3$ نتحقق من أنّ $t = -2$، و$v = -3$ تحققان المعادلة (3) $5(-3) - 1 \stackrel{?}{=} -6 + 5(-2)$ $-16 = -16$ ✓ إذن، قيمة v التي تجعل النقطة $(v, -3v, 5v - 1)$ واقعة على المستقيم l هي: $v = -3$

أتحقق من فهمي صفحة 136
اتجاه المستقيم l_1 هو $\vec{v}_1 = \langle 1,11,-12\rangle$ و اتجاه المستقيم l_2 هو $\vec{v}_2 = \langle 4,-6,3\rangle$ وبما أنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$ فإن المستقيمين غير متوازيين. نساوي $\vec{r}$ من معادلتي المستقيمين: $\langle 3,7,-9\rangle + t\langle 1,11,-12\rangle = \langle -30,-6,30\rangle + u\langle 4,-6,3\rangle$ $3 + t = -30 + 4u \Rightarrow t - 4u = -33 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $7 + 11t = -6 - 6u \Rightarrow 11t + 6u = -13 \ldots\ldots\ldots (2)$ $-9 - 12t = 30 + 3u \Rightarrow 12t + 3u = -39 \ldots\ldots\ldots (3)$ $3 \times (1) + 2 \times (2) \Rightarrow 25t = -125 \Rightarrow t = -5 \ , u = 7$ نتحقق من أنّ $t = -5$، و$u = 7$ تحققان المعادلة (3) $12(-5) + 3(7) \stackrel{?}{=} -39$ $-39 = -39$ ✓ بما أن قيمة t، وقيمة u حققتا المعادلات الثلاث، فإن المستقيمين متقاطعان، لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t = -5$ في معادلة l_1: $\vec{r} = \langle 3,7,-9\rangle - 5\langle 1,11,-12\rangle = \langle -2,-48,51\rangle$ إذن، يتقاطع المستقيمان في النقطة (-2, -48, 51)
أتحقق من فهمي صفحة 138
اتجاه الطائرة الأولى هو $\vec{v}_1 = \langle 8-0, 15-7, 16-0\rangle = \langle 8,8,16\rangle$ ويمكن تبسيطه بالقسمة على 8 ليصبح: $\langle 1,1,2\rangle$ معادلة مسار الأولى: $\vec{r} = \langle 0,7,0\rangle + t\langle 1,1,2\rangle$ و اتجاه الثانية هو $\vec{v}_2 = \langle 22-(-2), 24-0, 48-0\rangle = \langle 24,24,48\rangle$ ويمكن تبسيطه بالقسمة على 24 دون تغيير اتجاهه ليصبح: $\langle 1,1,2\rangle$ معادلة مسار الثانية: $\vec{r} = \langle -2,0,0\rangle + u\langle 1,1,2\rangle$ نلاحظ أن المسارين متوازيان لأن لهما الاتجاه نفسه.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 139	
1	نلاحظ عدم وجود عدد حقيقي k بحيث $\langle 15,10,-20\rangle = k\langle 8,12,24\rangle$ إذن، المتجهان غير متوازيين.
2	نلاحظ أن $\langle 27,-48,-36\rangle = 3\langle 9,-16,-12\rangle$ إذن، المتجهان متوازيان.
3	نلاحظ عدم وجود عدد حقيقي k بحيث $\langle -6,-4,10\rangle = k\langle -3,-1,13\rangle$ إذن، المتجهان غير متوازيين.
4	نلاحظ أن $\langle 12,-8,32\rangle = \frac{4}{7}\langle 21,-14,56\rangle$ إذن، المتجهان متوازيان.
5	$\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ} = -\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$
6	$\frac{NQ}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow NQ = \frac{2}{3}SN \Rightarrow SQ = SN + NQ = SN + \frac{2}{3}SN = \frac{5}{3}SN$ $\Rightarrow SQ = \frac{5}{3}SN \Rightarrow SN = \frac{3}{5}SQ \Rightarrow NQ = \frac{2}{5}SQ$ وبما أن الشكل متوازي أضلاع فإنّ: $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} = \vec{\mathbf{b}}$ $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QR} = \frac{2}{5}\overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QR} = \frac{2}{5}(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}) + \vec{\mathbf{b}} = \frac{2}{5}\vec{\mathbf{a}} + \frac{3}{5}\vec{\mathbf{b}}$
7	$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED} = -(\vec{\mathbf{b}} - 2\vec{\mathbf{a}}) - (\vec{\mathbf{a}} - 3\vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $\Rightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$ إذن، الضلعان $\overline{BE}$ ، و$\overline{CD}$ متوازيين ولهما الطول نفسه، وهذا يعني أن الشكل $BEDC$ متوازي أضلاع. ويمكن إثبات المطلوب بطريقة أخرى بإيجاد المتجهين $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{ED}$ وبيان تساويهما.

8	 $\overrightarrow{XT}=\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{XO}+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CT})$ $=-12\vec{\mathbf{a}}+(6\vec{\mathbf{c}}+3\vec{\mathbf{a}})=6\vec{\mathbf{c}}-9\vec{\mathbf{a}}=3(2\vec{\mathbf{c}}-3\vec{\mathbf{a}})$ $\Rightarrow 2\vec{\mathbf{c}}-3\vec{\mathbf{a}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{XT}$ $\overrightarrow{XU}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{AU}=\overrightarrow{XA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ $=-6\vec{\mathbf{a}}+\frac{2}{3}(6\vec{\mathbf{c}})=4\vec{\mathbf{c}}-6\vec{\mathbf{a}}=2(2\vec{\mathbf{c}}-3\vec{\mathbf{a}})=2(\frac{1}{3}\overrightarrow{XT})$ $\Rightarrow \overrightarrow{XU}=\frac{2}{3}\overrightarrow{XT}$ إذن، $\overrightarrow{XU},\overrightarrow{XT}$ متوازيان، وبما أنهما ينطلقان من النقطة نفسها X، فإن النقاط T,U,X تقع على استقامة واحدة.
9	$\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{b}}+t\vec{\mathbf{a}}\Rightarrow\vec{\mathbf{r}}=5\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}+t(-7\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}})$
10	$\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{b}}+t\vec{\mathbf{a}}\Rightarrow\vec{\mathbf{r}}=-2\hat{\mathbf{i}}+8\hat{\mathbf{k}}+t(-3\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}})$
11	$\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{b}}+t\vec{\mathbf{a}}\Rightarrow\vec{\mathbf{r}}=\langle 9,-2\rangle+t\langle 4,3\rangle$
12	$\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{b}}+t\vec{\mathbf{a}}\Rightarrow\vec{\mathbf{r}}=\langle 10,3,-6\rangle+t\langle 0,-1,3\rangle$
13	اتجاه المستقيم: $\vec{\mathbf{v}}=\langle 10-0,3-(-1),-6-3\rangle=\langle 10,4,-9\rangle$ معادلة المستقيم: $\vec{\mathbf{r}}=\langle 0,-1,3\rangle+t\langle 10,4,-9\rangle$
14	اتجاه المستقيم: $\vec{\mathbf{v}}=\langle 11-1,-6-4,9-29\rangle=\langle 10,-10,-20\rangle$ ويمكن تبسيطه بالقسمة على 10 دون التأثير على الاتجاه: $\vec{\mathbf{v}}=\langle 1,-1,-2\rangle$ معادلة المستقيم: $\vec{\mathbf{r}}=\langle 1,4,29\rangle+t\langle 1,-1,-2\rangle$

15	اتجاه المستقيم: $\vec{\mathbf{v}} = \langle -30-(-26), -6-(-12), 30-23 \rangle = \langle -4,6,7 \rangle$ معادلة المستقيم: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -26,-12,23 \rangle + t\langle -4,6,7 \rangle$
16	اتجاه المستقيم: $\vec{\mathbf{v}} = \langle -2-10, 9-5, 1-(-7) \rangle = \langle -12,4,8 \rangle$ ويمكن تبسيطه بقسمته على 4 إلى $\langle -3,1,2 \rangle$ معادلة المستقيم: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 10,5,-7 \rangle + t\langle -3,1,2 \rangle$
17	نساوي $\vec{\mathbf{r}}$ في معادلتي المستقيمين: $\langle -2,2,-1 \rangle + t\langle 1,2,-1 \rangle = \langle 4,4,-7 \rangle + u\langle -1,3,1 \rangle$ $-2+t = 4-u \Rightarrow t+u = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ $2+2t = 4+3u \Rightarrow 2t-3u = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$ $-1-t = -7+u \Rightarrow t+u = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$ $3\times(1)+(2) \Rightarrow 5t = 20 \Rightarrow t = 4 \ ,u = 2$ نلاحظ أن المعادلة (3) هي المعادلة (1) نفسها فهي متحققة لقيمتي $t = 4, u = 2$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t = 4$ في معادلة المستقيم الأول (أو $u = 2$ في معادلة الثاني): $\vec{\mathbf{r}} = \langle -2,2,-1 \rangle + 4\langle 1,2,-1 \rangle = \langle 2,10,-5 \rangle$ إذن، نقطة تقاطع المستقيمين هي: $(2,10,-5)$
18	$\overrightarrow{EF} = \langle -14,14,21 \rangle \Rightarrow \vec{\mathbf{v}}_1 = \langle -2,2,3 \rangle$ $\overrightarrow{GH} = \langle -6,6,9 \rangle \Rightarrow \vec{\mathbf{v}}_2 = \langle -2,2,3 \rangle$ نلاحظ أن $\vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_2$ فالمتجهان وكذلك المستقيمان متوازيان.

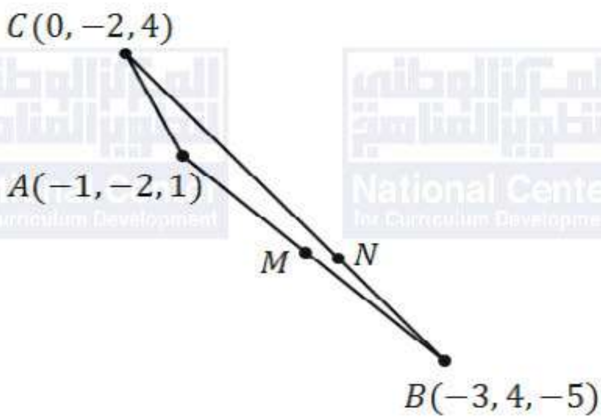
19	$\overrightarrow{EF} = \langle -1,-11,12\rangle = \vec{\mathbf{v}}_1$ $\overrightarrow{HG} = \langle 21,35,-49\rangle \Rightarrow \vec{\mathbf{v}}_2 = \langle 3,5,-7\rangle$ وبما أنه لا يوجد عدد حقيقي k يحقق $\vec{\mathbf{v}}_1 = k\vec{\mathbf{v}}_2$ فالمتجهان وكذلك المستقيمان غير متوازيين. معادلة $\overleftrightarrow{EF}$: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3,7,-9\rangle + t\langle -1,-11,12\rangle$ معادلة $\overleftrightarrow{GH}$: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3,-21,20\rangle + u\langle 3,5,-7\rangle$ نساوي $\vec{\mathbf{r}}$ في معادلتي المستقيمين ونساوي الإحداثيات المتناظرة: $\langle 3,7,-9\rangle + t\langle -1,-11,12\rangle = \langle 3,-21,20\rangle + u\langle 3,5,-7\rangle$ $3 - t = 3 + 3u \Rightarrow t + 3u = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ $7 - 11t = -21 + 5u \Rightarrow 11t + 5u = 28 \ldots\ldots(2)$ $-9 + 12t = 20 - 7u \Rightarrow 12t + 7u = 29 \ldots\ldots(3)$ $--5 \times (1) + 3 \times (2) \Rightarrow 28t = 84 \Rightarrow t = 3, u = -1$ نفحص تحقق المعادلة (3) عندما $t = 3, u = -1$ $12(3) + 7(-1) \stackrel{?}{=} 29$ $29 = 29$ ✓ فالمستقيمان متقاطعان. نجد نقطة التقاطع بتعويض t=3 في معادلة $\overleftrightarrow{EF}$ (أو u=-1 في معادلة $\overleftrightarrow{GH}$): $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3,7,-9\rangle + 3\langle -1,-11,12\rangle = \langle 0,-26,27\rangle$ إذن، نقطة تقاطع المستقيمين هي: (0, -26, 27)
20	$\overrightarrow{AB} = \langle 12,-4,-8\rangle \Rightarrow \vec{\mathbf{v}} = \langle 3,-1,-2\rangle$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -2,9,1\rangle + t\langle 3,-1,-2\rangle$

21	متجه الموقع للنقطة (19,2,-13) هو: $\langle 19,2,-13\rangle$ $\Rightarrow \langle 19,2,-13\rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t\rangle$ $19 = -2+3t \Rightarrow t = 7$ $2 = 9-t \Rightarrow t = 7$ $-13 = 1-2t \Rightarrow t = 7$ بما أن للمعادلات الثلاث الحل نفسه $(t = 7)$، فإن النقطة(19,2,-13) تقع على المستقيم l لأنها تنتج من تعويض $t = 7$ في معادلته.
22	بما أن النقطة$(1, a, -1)$ تقع على المستقيم l، فإنها تحقق معادلته، أي أنّ: $\langle 1, a, -1\rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t\rangle$ $\Rightarrow 1 = -2+3t \Rightarrow t = 1$ $a = 9-t = 9-1 \Rightarrow a = 8$
23	بما أن النقطة$(-8, b, c)$ تقع على المستقيم l، فإنها تحقق معادلته، أي أنّ: $\langle -8, b, c\rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t\rangle$ $\Rightarrow -2+3t = -8 \Rightarrow t = -2$ $b = 9-t = 9-(-2) \Rightarrow b = 11$ $c = 1-2t = 1-2(-2) \Rightarrow c = 5$
24	بما أن النقطة المطلوبة تقع في المستوى xz فإن الإحداثي y لها يساوي صفرًا $\langle x, 0, z\rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t\rangle$ $9-t = 0 \Rightarrow t = 9$ $x = -2+3t = -2+3(9) \Rightarrow x = 25$ $z = 1-2t = 1-2(9) \Rightarrow z = -17$ إذن، النقطة المطلوبة هي: $(25,0,-17)$

25	$3\vec{\mathbf{n}} + b\vec{\mathbf{m}} = \langle -15,12,3a\rangle + \langle b,-2b,3b\rangle$ $= \langle -15+b, 12-2b, 3a+3b\rangle$ وبما أن هذا المتجه يوازي المتجه$\langle 3,-3,5\rangle$، فإن: $\langle -15+b, 12-2b, 3a+3b\rangle = k\langle 3,-3,5\rangle$ $\Rightarrow -15+b = 3k \ldots\ldots(1)$ $12-2b = -3k \ldots\ldots\ldots(2)$ $3a+3b = 5k \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$ $(1)\times 2 + (2) \Rightarrow -18 = 3k \Rightarrow k = -6, \quad b = -3 \ , \quad a = -7$
26	اتجاه المحور y الموجب هو $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$، وبما أن اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$ هو اتجاه المحور y الموجب، فإن: $\vec{\mathbf{v}} = k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\k\\0\end{pmatrix}, k>0$ $\begin{pmatrix}3a+b\\-5a+4b\\6a+bc\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\k\\0\end{pmatrix}$ $\lvert\vec{\mathrm{v}}\rvert = \lvert k\rvert = 34 \Rightarrow k = 34$ $3a+b = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ $-5a+4b = 34 \ldots\ldots\ldots(2)$ $6a+bc = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$ $-4\times(1) + (2) \Rightarrow -17a = 34 \Rightarrow a = -2, \quad b = 6$ بتعويض قيمة a وقيمة b في المعادلة (3) نجد أنّ: $6(-2) + 6c = 0 \Rightarrow c = 2$

27	$\overrightarrow{BC} = 18\hat{\mathbf{i}} - 12\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}} \Rightarrow \vec{\mathbf{v}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{BC}$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = -4\hat{\mathbf{i}} + 13\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}} + t(3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$ متجه موقع النقطة A يحقق هذه المعادلة لأن النقطة A تقع على المستقيم $\overleftrightarrow{BC}$ $\Rightarrow 2\hat{\mathbf{i}} + p\hat{\mathbf{j}} + q\hat{\mathbf{k}} = -4\hat{\mathbf{i}} + 13\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}} + t(3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$ نساوي المعاملات المتناظرة في طرفي المعادلة: $\Rightarrow 2 = -4 + 3t \Rightarrow t = 2$ $p = 13 - 2t \Rightarrow p = 13 - 2(2) = 9$
28	استكمالًا لما سبق في السؤال 27 بمقارنة معامل $\hat{\mathbf{k}}$ في المعادلة $\hat{\mathbf{i}} + p\hat{\mathbf{j}} + q\hat{\mathbf{k}} = -4\hat{\mathbf{i}} + 13\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}} + t(3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$ نستنتج أن: $q = -1 + t = -1 + 2 = 1$
29	معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي معادلة $\overleftrightarrow{BC}$ نفسها $\vec{\mathbf{r}} = (-4 + 3t)\hat{\mathbf{i}} + (13 - 2t)\hat{\mathbf{j}} + (-1 + t)\hat{\mathbf{k}}$ متجه موقع أيّ نقطة في المستوى yz يكون على الصورة $y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ إذن، لإيجاد نقطة التقاطع نبحث عن قيم z, y, t التي تحقق المعادلة: $y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} = (-4 + 3t)\hat{\mathbf{i}} + (13 - 2t)\hat{\mathbf{j}} + (-1 + t)\hat{\mathbf{k}}$ $0 = -4 + 3t \Rightarrow t = \frac{4}{3}$ $y = 13 - 2t \Rightarrow y = 13 - \frac{8}{3} = \frac{31}{3}$ $z = -1 + t \Rightarrow z = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$ إذن، النقطة المطلوبة هي: $(0, \frac{31}{3}, \frac{1}{3})$

30	$A(2,9,1)\ ,C(14,1,5)$ $AC=\sqrt{12^2+(-8)^2+4^2}=\sqrt{224}=4\sqrt{14}$
31	ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-2}{2-1}=1$ المعادلة الديكارتية للمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$: $y-2=1(x-1)\Rightarrow y=x+1$ اتجاه $\overleftrightarrow{AB}$: $\vec{\mathbf{v}}=\langle 1,1\rangle$ المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$: $\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0+t\vec{\mathbf{v}}\Rightarrow\vec{\mathbf{r}}=\langle 1,2\rangle+t\langle 1,1\rangle$ $\vec{\mathbf{v}}$ تقابل الميل m، و$\vec{\mathbf{r}}_0$ تقابل المقطع y في المعادلة الديكارتية. يمكن الوصول للمعادلة الديكارتية من المعادلة المتجهة وذلك بحذف المتغير الوسيط t من المعادلة المتجهة: $\vec{\mathbf{r}}=\langle x,y\rangle=\langle 1+t,2+t\rangle$ $\Rightarrow x=1+t\ \Rightarrow\ t=x-1$ $y=2+t\ \Rightarrow\ y=2+x-1\Rightarrow\ y=x+1$
32	$\overrightarrow{AB}=\langle 1,1,-1\rangle$ اتجاه المستقيم l_1 هو: $\vec{\mathbf{v}}_1=\langle 1,1,-1\rangle$ ومعادلته هي: $\vec{\mathbf{r}}=\langle -3,-1,12\rangle+t\langle 1,1,-1\rangle$
33	بما أن $l_1 \parallel l_2$ فلهما الاتجاه نفسه $\langle 1,1,-1\rangle=\vec{\mathbf{v}}_1$ أعلاه. إذن، معادلة l_2: $\vec{\mathbf{r}}=\langle 11,9,12\rangle+u\langle 1,1,-1\rangle$
34	$M=\left(\frac{-1-3}{2},\frac{-2+4}{2},\frac{1-5}{2}\right)=(-2,1,-2)$



35

$$|\overrightarrow{NC}| = 2|\overrightarrow{BN}| \Rightarrow NC = 2BN$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BN} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{MB} = \langle -3-(-2), 4-1, -5-(-2)\rangle = \langle -1,3,-3\rangle$$

$$\overrightarrow{BC} = \langle 0-(-3), -2-4, 4-(-5)\rangle = \langle 3,-6,9\rangle$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \langle -1,3,-3\rangle + \frac{1}{3}\langle 3,-6,9\rangle = \langle 0,1,0\rangle = \vec{\mathbf{v}}$$

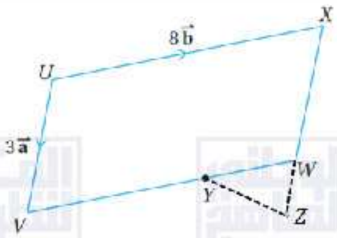
معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{MN}$ المتجهة هي: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + t\vec{\mathbf{v}} \Rightarrow \vec{\mathbf{r}} = \langle -2,1,-2\rangle + t\langle 0,1,0\rangle$

<table>
<tr><td>36</td><td>
اتجاه $\overleftrightarrow{PQ}$: $\overrightarrow{PQ} = \langle 3, -5, -1 \rangle = \vec{\mathbf{v}}_1$
معادلة $\overleftrightarrow{PQ}$: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -2, -3, 3 \rangle + t\langle 3, -5, -1 \rangle$
اتجاه $\overleftrightarrow{RS}$: $\overrightarrow{RS} = \langle 12, -15, a+1 \rangle = \vec{\mathbf{v}}_2$
معادلة $\overleftrightarrow{RS}$: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 0, -8, -1 \rangle + u\langle 12, -15, a+1 \rangle$
نساوي $\vec{\mathbf{r}}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة:
$\langle -2, -3, 3 \rangle + t\langle 3, -5, -1 \rangle = \langle 0, -8, -1 \rangle + u\langle 12, -15, a+1 \rangle$
$\Rightarrow -2 + 3t = 12u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$
$-3 - 5t = -8 - 15u \Rightarrow 1 - t = -3u \ldots\ldots\ldots (2)$
$3 - t = -1 + u(a+1) \Rightarrow 4 - t = u(a+1) \ldots\ldots (3)$
بحل المعادلتين (1)، و(2)، نجد أنّ: $u = \frac{1}{3}, t = 2$
وبتعويض القيمتين $u = \frac{1}{3}, t = 2$ في المعادلة (3)كونهما يحققانها لأن المستقيمين متقاطعين نجد أنّ:
$$4 - 2 = \frac{1}{3}(a+1) \Rightarrow 6 = a + 1 \Rightarrow a = 5$$
نجد نقطة التقاطع بتعويض $t = 2$ في معادلة $\overleftrightarrow{PQ}$:
$\vec{\mathbf{r}} = \langle -2, -3, 3 \rangle + 2\langle 3, -5, -1 \rangle = \langle 4, -13, 1 \rangle$
إذن، نقطة التقاطع هي:(4, -13,1)
</td></tr>
</table>

37	$\overrightarrow{AB} = \langle 70,140,130\rangle$ يمكن تبسيط اتجاه $\overrightarrow{AB}$: $\vec{\mathbf{v}}_1 = \langle 7,14,13\rangle$ وتكون معادلته: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 30,-75,90\rangle + t\langle 7,14,13\rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 140,40,-40\rangle$ يمكن تبسيط اتجاه $\overrightarrow{CD}$: $\vec{\mathbf{v}}_2 = \langle 7,2,-2\rangle$ وتكون معادلته: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -20,45,200\rangle + u\langle 7,2,-2\rangle$ المستقيمان ليسا متوازيين لأن اتجاهيهما ليسا متوازيين $(\vec{\mathbf{v}}_1 \neq k\vec{\mathbf{v}}_2)$ نبحث عن تقاطع المستقيمين بمحاولة إيجاد t,u بحيث: $\langle 30+7t,-75+14t,90+13t\rangle = \langle -20+7u,45+2u,200-2u\rangle$ $30+7t = -20+7u \Rightarrow u = \frac{50}{7}+t \ldots\ldots (1)$ $-75+14t = 45+2u \Rightarrow u = -60+7t \ldots.. (2)$ $90+13t = 200-2u \Rightarrow 13t+2u = 110 \ldots.. (3)$ بحل المعادلتين (1) و (2) نجد أنّ: $t = \frac{235}{21}, u = \frac{385}{21}$ لكن هاتين القيمتين لا تحققان المعادلة (3) إذن المستقيمان غير متقاطعين لعدم تحقق المعادلات الثلاث معًا، وهما غير متوازيين كما وضحنا سابقًا، فهما إذن متخالفان.
38	تم حلها في موضعها تحت عنوان "مسألة اليوم"

39	$\overrightarrow{QS} = \langle 2, -8, 16\rangle$ يمكن تبسيط اتجاه $\overrightarrow{QS}$: $\vec{\mathbf{v}}_1 = \langle 1, -4, 8\rangle$ إذن معادلة l_1 هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -6, 14, -19\rangle + t\langle 1, -4, 8\rangle$ معادلة l_2 هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 1, 9, 9\rangle + u\langle 4, 7, 4\rangle$ لإيجاد نقطة تقاطعهما، نجد قيم u,t اللتين تجعلان $\vec{\mathbf{r}}$ في المعادلتين متساويين: $\langle -6+t, 14-4t, -19+8t\rangle = \langle 1+4u, 9+7u, 9+4u\rangle$ $-6+t = 1+4u \Rightarrow t-4u = 7 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$ $14-4t = 9+7u \Rightarrow 4t+7u = 5 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$ $-19+8t = 9+4u \Rightarrow 4t-2u = 14 \dots\dots\dots. (3)$ $(3)-(2): 9u = -9 \Rightarrow u = -1, \quad t = 3$ وهاتان القيمتان تحققان أيضًا المعادلة (1) نجد نقطة تقاطع l_1 و l_2 بتعويض $t = 3$ في معادلة l_1: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -6, 14, -19\rangle + 3\langle 1, -4, 8\rangle = \langle -3, 2, 5\rangle$ إذن، نقطة تقاطع l_1 و l_2 هي: $U(-3,2,5)$ الآن لدينا أيضًا $T(1,9,9), S(-4,6,-3)$ $TU = \sqrt{16+49+16} = 9$ $SU = \sqrt{1+16+64} = 9$ بما أن $TU = SU$ إذن، ΔSTU متطابق الضلعين.
40	$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ED} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}(-12\vec{\mathbf{a}} + 8\vec{\mathbf{b}})$ $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = -12\vec{\mathbf{a}} + 8\vec{\mathbf{b}}$ $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ وهذا يثبت أن $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{EF}$ إذن الشكل $FEMN$ رباعي فيه ضلعان متوازيان والضلعان الآخران غير متوازيين، فهو شبه منحرف.

41	يمكن حل هذا السؤال بتوظيف تشابه المثلثات. أو باستخدام مساحة المثلث بدلالة طولي ضلعين فيه وجيب الزاوية المحصورة بينهما، كالآتي: ليكن A_2 مساحة ΔDEF ، A_1 مساحة ΔDMN $A_2 = \frac{1}{2}(DE)(DF)\sin D$ $A_1 = \frac{1}{2}(DM)(DN)\sin D$ $\frac{A_2}{A_1} = \frac{DN}{DF} \times \frac{DM}{DE} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ $\Rightarrow \frac{A_2}{72} = \frac{1}{9} \Rightarrow A_2 = 8$ مساحة شبه المنحرف $FEMN$ تساوي: $A_1 - A_2 = 72 - 8 = 64$ إذن مساحة الشكل $FEMN$ تساوي 64 وحدة مربعة.
42	$\overrightarrow{AB} = \langle 9, -12, -6 \rangle$ يمكن تبسيط اتجاه $\overleftrightarrow{AB}$: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 3, -4, -2 \rangle$ إذن معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 13, -10, 15 \rangle + t\langle 3, -4, -2 \rangle$ النقطة الواقعة على $\overleftrightarrow{AB}$ تكون إحداثياتها على الصورة: $C = (13 + 3t, -10 - 4t, 15 - 2t)$ $BC = 2AC \Rightarrow (BC)^2 = 4(AC)^2$ $\Rightarrow (13 + 3t - 22)^2 + (-10 - 4t + 22)^2 + (15 - 2t - 9)^2 = 4((3t)^2 + (-4t)^2 + (-2t)^2)$ $\Rightarrow 87t^2 + 174t - 261 = 0$ $\Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$ $\Rightarrow (t + 3)(t - 1) = 0$ $\Rightarrow t = -3 \;, \quad t = 1$ $t = -3 \quad \Rightarrow C(4,2,21)$ $t = 1 \quad \Rightarrow C(16, -14, 13)$

43	النقاط الواقعة على المستقيم المعطى تكون إحداثياتها على الصورة: $P(3+t,-2+2t,-6+3t)$ $OP=\sqrt{(3+t)^2+(-2+2t)^2+(-6+3t)^2}=29$ نربع الطرفين ونفك الأقواس، فنحصل على: $14t^2-38t-792=0$ $\Longrightarrow 7t^2-19t-396=0$ $\Longrightarrow (t-9)(7t+44)=0$ $\Longrightarrow t=9\ , \qquad t=-\frac{44}{7}$ إذن، لدينا نقطتان تحققان المطلوب هما: $P_1=(12,16,21)\,, P_2=\left(-\frac{23}{7},-\frac{102}{7},-\frac{174}{7}\right)$
44	 $\overrightarrow{XZ}=\frac{4}{3}\overrightarrow{XW}=\frac{4}{3}\overrightarrow{UV}=\frac{4}{3}(3\vec{a})=4\vec{a}$ $\Longrightarrow \overrightarrow{XW}+\overrightarrow{WZ}=4\vec{a}\Longrightarrow \overrightarrow{WZ}=4\vec{a}-3\vec{a}=\vec{a}$ $\frac{YW}{VY}=\frac{1}{3}\Longrightarrow \frac{YW}{VW}=\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}\Longrightarrow \overrightarrow{YW}=2\vec{b}\ ,\ \overrightarrow{VY}=6\vec{b}$ $\overrightarrow{UY}=\overrightarrow{UV}+\overrightarrow{VY}=3\vec{a}+6\vec{b}=3(\vec{a}+2\vec{b})$ ……………….(1) $\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{YW}+\overrightarrow{WZ}=2\vec{b}+\vec{a}$ ……………………………….(2) $\Longrightarrow \overrightarrow{UY}=3\overrightarrow{YZ}\Longrightarrow \overrightarrow{YZ}\parallel\overrightarrow{UY}$ وبما أنهما ينطلقان من النقطة Y إذن، النقاط U,Z,Y تقع على استقامة واحدة.