إجابات كتاب الطالب للصف الثاني عشر العلمي / الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الخامسة: المتجهات

الدرس الأول: المتجهات في الفضاء

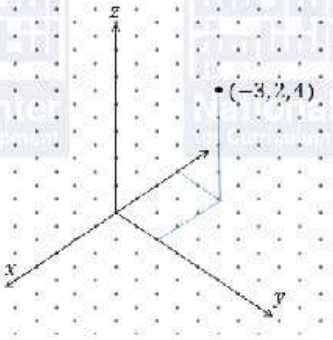
مسألة اليوم صفحة 110

$A(5,5,0)$

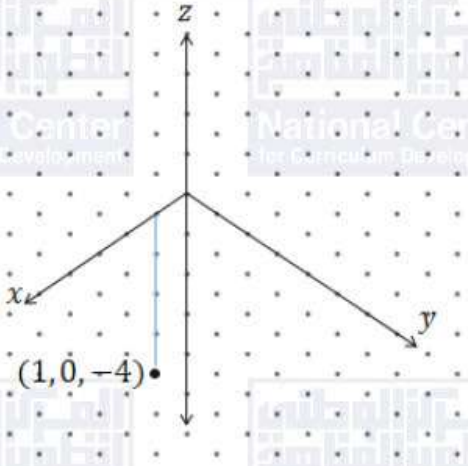
$B(0,5,5)$

أتحقق من فهمي صفحة 111

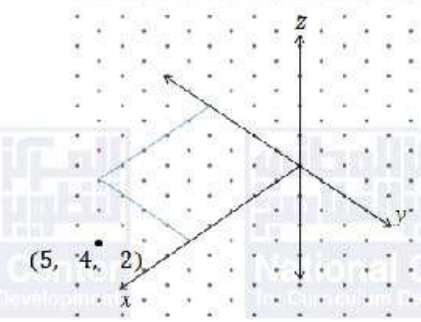
a



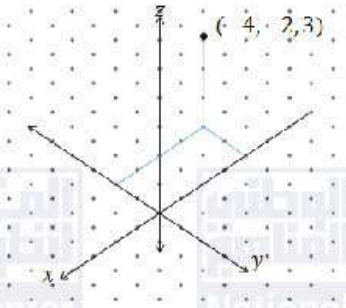
b



c



d



أتحقق من فهمي صفحة 113

a

$$NM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$= \sqrt{(5-2)^2 + (-3-1)^2 + (6-(-6))^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

b

لتكن K نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{MN}$ ، فتكون:

$$K = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \left(\frac{2+5}{2}, \frac{1-3}{2}, \frac{-6+6}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, -1, 0\right)$$

أتحقق من فهمي صفحة 114

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = \langle -5-(-1), 3-5, -2-3 \rangle = \langle -4, -2, -5 \rangle$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2} = \sqrt{16 + 4 + 25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

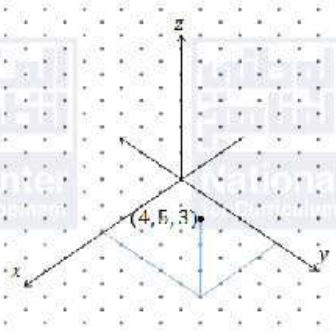
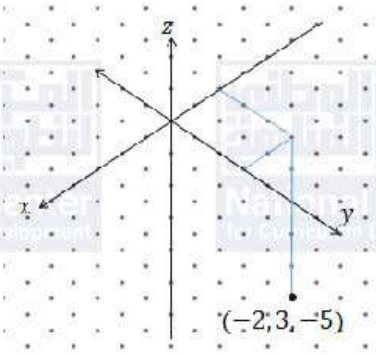
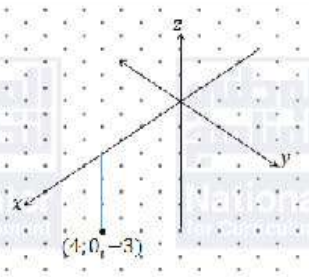
أتحقق من فهمي صفحة 116

a

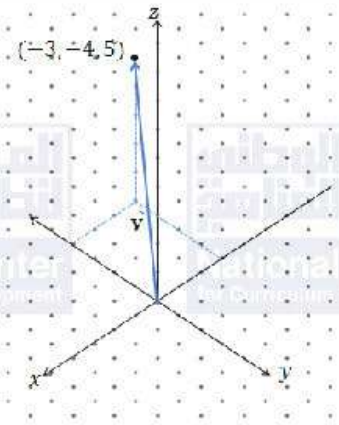
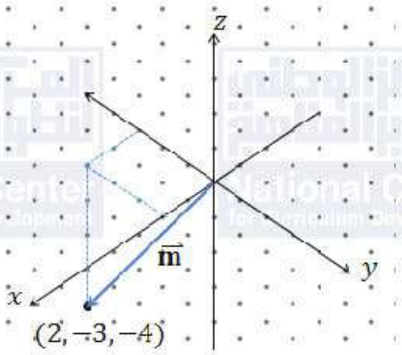
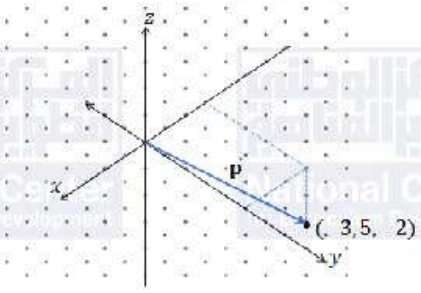
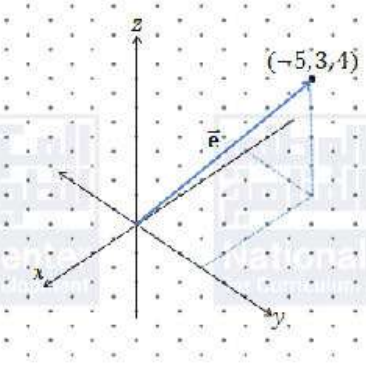
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$$
$$= \vec{\mathbf{b}} + (-\vec{\mathbf{a}})$$
$$= \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}$$

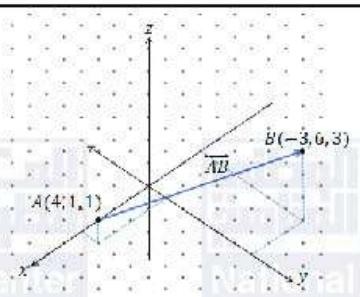
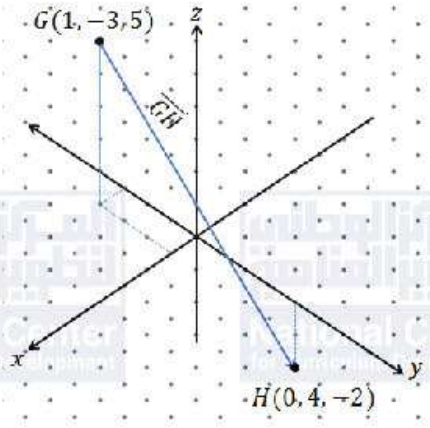
	$AB = AE + EB = 3EB + EB = 4EB \Rightarrow EB = \frac{1}{4}AB$
b	$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow \overrightarrow{EB} = \frac{1}{4}(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) = \frac{1}{4}\vec{\mathbf{b}} - \frac{1}{4}\vec{\mathbf{a}}$
c	$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ $= \overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ وذلك لأن $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ كون الشكل متوازي أضلاع $= \frac{1}{4}\vec{\mathbf{b}} - \frac{1}{4}\vec{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{b}}$ $= \frac{3}{4}\vec{\mathbf{b}} - \frac{1}{4}\vec{\mathbf{a}}$
أتحقق من فهمي صفحة 117	
a	$3\vec{\mathbf{v}} - 4\vec{\mathbf{u}} = 3\langle 3,0,-5\rangle - 4\langle 4,5,-3\rangle$ $= \langle 9,0,-15\rangle - \langle 16,20,-12\rangle = \langle -7,-20,-3\rangle$
b	$3\vec{\mathbf{u}} + 5\vec{\mathbf{v}} - 2\vec{\mathbf{w}} = 3\langle 4,5,-3\rangle + 5\langle 3,0,-5\rangle - 2\langle 9,-2,-5\rangle$ $= \langle 12,15,-9\rangle + \langle 15,0,-25\rangle + \langle -18,4,10\rangle = \langle 9,19,-24\rangle$
أتحقق من فهمي صفحة 117	
	$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} \Rightarrow 20 = 3q + 8$ و $2p - 5 = 0$ و $-12 = 3r$ $\Rightarrow q = 4, p = \frac{5}{2}, r = -4$
أتحقق من فهمي صفحة 119	
a	$\overrightarrow{OA} = \langle -2,8,13\rangle, \overrightarrow{OB} = \langle 5,-7,-9\rangle, \overrightarrow{OC} = \langle 0,1,-14\rangle$
b	$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \langle -5,8,-5\rangle$

c	$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ $= \sqrt{(0 - (-2))^2 + (1 - 8)^2 + (-14 - 13)^2} = \sqrt{4 + 49 + 729} = \sqrt{782}$
	أتحقق من فهمي صفحة 121
a	$\vec{\mathbf{g}} = 9\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{k}}$
b	$\overrightarrow{AB} = \langle 7 - 2{,}6 - (-1), -2 - 4\rangle = \langle 5{,}7, -6\rangle = 5\hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}}$
c	$4\vec{\mathbf{m}} - 5\vec{\mathbf{f}} = 4(-2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}) - 5(3\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}})$ $= (-8 - 15)\hat{\mathbf{i}} + (12 + 25)\hat{\mathbf{j}} + (-16 - 30)\hat{\mathbf{k}}$ $= -23\hat{\mathbf{i}} + 37\hat{\mathbf{j}} - 46\hat{\mathbf{k}}$
	أتحقق من فهمي صفحة 122
a	$\lvert\vec{\mathbf{u}}\rvert = \sqrt{16 + 9 + 25}$ $= \sqrt{50}$ $= 5\sqrt{2}$ $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\vec{\mathbf{u}} = \langle\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{-3}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}}\rangle$ $= \langle\frac{2}{5}\sqrt{2}, \frac{-3}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ وهذا متجه وحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{u}}$
b	$\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = \sqrt{64 + 225 + 289}$ $= \sqrt{578} = 17\sqrt{2}$ $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{17\sqrt{2}}\vec{\mathbf{v}} = \frac{8}{17\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{15}{17\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}} - \frac{17}{17\sqrt{2}}\hat{\mathbf{k}}$ $= \frac{8}{17\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{15}{17\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{k}}$ وهذا متجه وحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$

c	$\overrightarrow{AB} = \langle 3-(-1), 3-4, 8-6\rangle = \langle 4,-1,2\rangle$ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$ ليكن $\hat{\mathbf{u}}$ متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$ ، فيكون: $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{21}}\overrightarrow{AB} = \langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\rangle$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 122
1	
2	
3	

4	$A(3,-2,8), B(5,4,2)$ $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ $= \sqrt{2^2+6^2+(-6)^2} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ لتكن N نقطة منتصف $\overline{AB}$ $N = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (4,1,5)$
5	$A(-2,7,0), B(2,-5,3)$ $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ $= \sqrt{16+144+9} = \sqrt{169} = 13$ لتكن N نقطة منتصف $\overline{AB}$ $N = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{7-5}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(0,1,\frac{3}{2}\right)$
6	$A(12,8,-5), B(-3,6,7)$ $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ $= \sqrt{225+4+144} = \sqrt{373}$ لتكن N نقطة منتصف $\overline{AB}$ $N = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) = \left(\frac{12-3}{2}, \frac{8+6}{2}, \frac{-5+7}{2}\right) = \left(\frac{9}{2},7,1\right)$
7	$A(-5,-8,4), B(3,2,-6)$ $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ $= \sqrt{64+100+100} = \sqrt{264} = 2\sqrt{66}$ لتكن N نقطة منتصف $\overline{AB}$ $N = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{-8+2}{2}, \frac{4-6}{2}\right)$ $= (-1,-3,-1)$

8	 z (−3, −4, 5) v x y
9	 z m y x (2, −3, −4)
10	 z p x (3, 5, 2) y
11	 z (−5, 3, 1) e x y

12	
13	
14	$\overrightarrow{AB} = \langle -3-4, 2-6, 5-9\rangle = \langle -7,-4,-4\rangle$ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2+{v_3}^2} = \sqrt{49+16+16} = \sqrt{81} = 9$
15	$\overrightarrow{AB} = \langle 6-(-8), 3-5, 2-7\rangle = \langle 14,-2,-5\rangle$ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2+{v_3}^2} = \sqrt{196+4+25} = \sqrt{225} = 15$
16	$\overrightarrow{AB} = \langle 4-12, 1-(-5), -1-4\rangle = \langle -8,6,-5\rangle$ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2+{v_3}^2} = \sqrt{64+36+25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$
17	$\overrightarrow{AB} = \langle 10-24, 6-(-8), 3-10\rangle = \langle -14,14,-7\rangle$ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2+{v_3}^2} = \sqrt{196+196+49} = \sqrt{441} = 21$
18	$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ $= \vec{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $= \vec{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{b}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$

19	$3\vec{e}+4\vec{f}=3\langle -3,9,-4\rangle+4\langle 5,-3,7\rangle=\langle -9,27,-12\rangle+\langle 20,-12,28\rangle$ $=\langle 11,15,16\rangle$
20	$\vec{e}+\vec{f}-3\vec{g}=\langle -3,9,-4\rangle+\langle 5,-3,7\rangle-3\langle -1,8,-5\rangle$ $=\langle 5,-18,18\rangle$
21	$4\vec{e}-2\vec{f}+3\vec{g}=4\langle -3,9,-4\rangle-2\langle 5,-3,7\rangle+3\langle -1,8,-5\rangle$ $=\langle -25,66,-45\rangle$
22	$2\vec{e}+7\vec{f}-2\vec{g}=2\langle -3,9,-4\rangle+7\langle 5,-3,7\rangle-2\langle -1,8,-5\rangle$ $=\langle 31,-19,51\rangle$
23	$\overrightarrow{OA}=\langle -1,6,5\rangle$, $\overrightarrow{OB}=\langle 0,1,-4\rangle$, $\overrightarrow{OC}=\langle 2,1,1\rangle$
24	$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\langle -1,6,5\rangle-\langle 0,1,-4\rangle=\langle -1,5,9\rangle$
25	$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\langle 0,1,-4\rangle-\langle 2,1,1\rangle=\langle -2,0,-5\rangle$
26	$\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2+{v_3}^2}=\sqrt{4+0+25}=\sqrt{29}$
27	$\vec{g}=5\hat{i}+7\hat{j}-\hat{k}$
28	$\overrightarrow{ST}=(2-1)\hat{i}+(-2-0)\hat{j}+(0-(-5))\hat{k}=\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$
29	$-\vec{a}+3\vec{b}=-\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}+12\hat{i}-9\hat{j}+15\hat{k}=11\hat{i}-11\hat{j}+19\hat{k}$
30	$\vec{v}=-4\hat{i}+3\hat{j}$ $\|\vec{v}\|=\sqrt{16+9}=5$ $\hat{v}=\frac{1}{5}\vec{v}=\frac{-4}{5}\hat{i}+\frac{3}{5}\hat{j}$ $\hat{v}$ متجه وحدة في اتجاه $\vec{v}$

31	$\vec{\mathbf{v}} = 143\hat{\mathbf{i}} - 24\hat{\mathbf{j}}$ $\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = \sqrt{20449 + 576} = \sqrt{21025} = 145$ $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{145}\vec{\mathbf{v}} = \frac{143}{145}\hat{\mathbf{i}} - \frac{24}{145}\hat{\mathbf{j}}$ وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$
32	$\vec{\mathbf{v}} = -72\hat{\mathbf{i}} + 33\hat{\mathbf{j}} + 56\hat{\mathbf{k}}$ $\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = \sqrt{5184 + 1089 + 3136} = \sqrt{9409} = 97$ $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{97}\vec{\mathbf{v}} = \frac{-72}{97}\hat{\mathbf{i}} + \frac{33}{97}\hat{\mathbf{j}} + \frac{56}{97}\hat{\mathbf{k}}$ وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$
33	$\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = \sqrt{121 + 169 + 64} = \sqrt{354}$ $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{354}}\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \frac{11}{\sqrt{354}} \\ \frac{13}{\sqrt{354}} \\ \frac{8}{\sqrt{354}} \end{pmatrix}$ وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$

34

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{25 + 16 + 4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$

35

$$\vec{\mathbf{n}} = \langle -2,0,3 \rangle$$

$$|\vec{\mathbf{n}}| = \sqrt{4 + 0 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\vec{\mathbf{n}} = \langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, 0, \frac{3}{\sqrt{13}} \rangle$$

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\vec{\mathbf{n}}$

36

$$3\vec{\mathbf{a}} + c\vec{\mathbf{b}} = 3(-3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 12\hat{\mathbf{k}}) + c(7\hat{\mathbf{i}} + 39\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}})$$

$$= (-9 + 7c)\hat{\mathbf{i}} + (12 + 39c)\hat{\mathbf{j}} + (36 - 2c)\hat{\mathbf{k}})$$

$$\Rightarrow -23\hat{\mathbf{i}} - 66\hat{\mathbf{j}} + 40\hat{\mathbf{k}} = (-9 + 7c)\hat{\mathbf{i}} + (12 + 39c)\hat{\mathbf{j}} + (36 - 2c)\hat{\mathbf{k}})$$

في هذه المعادلة يتساوى المتجهان، إذن، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية:

$$-9 + 7c = -23, \quad 12 + 39c = -66, \quad 36 - 2c = 40$$

وعند حل هذه المعادلات نجد أن لها الحل نفسه $c = -2$

37

$$k\vec{s} - 4\vec{t} = k\begin{pmatrix} 2 \\ w+47 \\ -4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 \\ v \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2k-12 \\ k(w+47)-4v \\ -4k-8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 31 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k-12 \\ k(w+47)-4v \\ -4k-8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2k-12=6 \Rightarrow k=9$$

$$-4k-8=w \quad \Rightarrow w=-36-8=-44$$

$$k(w+47)-4v=31 \Rightarrow 9(-44+47)-4v=31 \Rightarrow v=-1$$

38

$$5\vec{m}+2\vec{p}=4\vec{n}$$

$$5\langle 4,1,-2\rangle + 2\langle 2,a,-1\rangle = 4\langle 6,2,-3\rangle$$

$$\langle 24,5+2a,-12\rangle = \langle 24,8,-12\rangle$$

في هذه المعادلة يتساوى المتجهان، إذن، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية:

$$5+2a=8 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

39

$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2+{v_3}^2} = \sqrt{(u-3)^2+(u+1)^2+(u-2)^2} = 17$$

نربع الطرفين ونفك الأقواس:

$$u^2-6u+9+u^2+2u+1+u^2-4u+4=289$$

$$3u^2-8u-275=0$$

$$u=\frac{8\pm\sqrt{3364}}{2(3)}=\frac{8\pm 58}{6}$$

إذن، $u=\frac{66}{6}=11$ ، أو $u=\frac{-50}{6}=\frac{-25}{3}$

40

$\overrightarrow{GH} = \langle c-1-(-2), -4-(c+1), c+2-(-8)\rangle = \langle c+1, -5-c, c+10\rangle$

$|\overrightarrow{GH}| = \sqrt{(c+1)^2+(-5-c)^2+(c+10)^2} = 19$

نربع الطرفين ونفك الأقواس:

$c^2+2c+1+25+10c+c^2+c^2+20c+100 = 361$

$\Rightarrow 3c^2+32c-235 = 0$

$\Rightarrow c = \dfrac{-32 \pm \sqrt{3844}}{6} = \dfrac{-32 \pm 62}{6}$

إذن، $c = \frac{30}{6} = 5$ ، أو $c = \frac{-94}{6} = \frac{-47}{3}$

لكن $c > 0$ إذن، $c = 5$

41

بما أن مركز الكرة هو $O(0,0,0)$ والنقطة $A(7,-3,3)$ تقع عليها فإن طول نصف قطرها R حيث:

$R = OA = \sqrt{(7-0)^2+(-3-0)^2+(3-0)^2} = \sqrt{49+9+9} = \sqrt{67}$

$OB = \sqrt{(2-0)^2+(-8-0)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{4+64+1} = \sqrt{69}$

بما أن $OB > R$ فإن النقطة B تقع خارج الكرة، ويكون قول حنان هو الصواب.

42

مركز الكرة هو النقطة C التي تنصف القطر المعطى طرفاه

$C = \left(\dfrac{-4-2}{2}, \dfrac{6+2}{2}, \dfrac{-1+17}{2}\right) = (-3,4,8)$

وطول نصف قطر الكرة هو R حيث:

$R = CK = \sqrt{(-3-(-2))^2+(4-2)^2+(8-17)^2} = \sqrt{1+4+81} = \sqrt{86}$

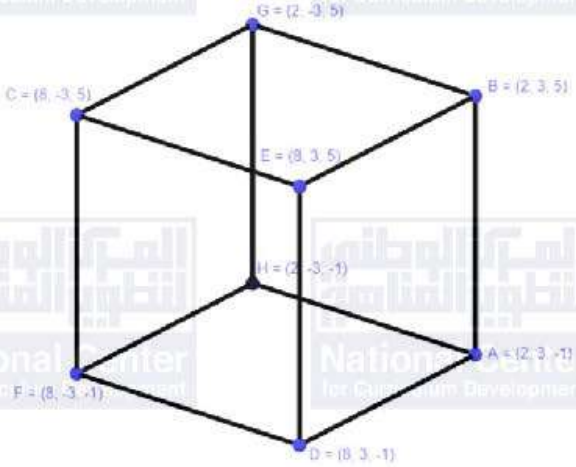
الآن نجد كلا من CJ, CL ونقارنه مع R لمعرفة موقع كل من النقطتين J, L بالنسبة لهذه الكرة:

$CL = \sqrt{(2-(-3)^2+(10-4)^2+(3-8)^2} = \sqrt{25+36+25} = \sqrt{86} = R$

إذن، النقطة L تقع على سطح الكرة.

$CJ = \sqrt{(4-(-3))^2+(-2-4)^2+(7-8)^2} = \sqrt{49+36+1} = \sqrt{86} = R$

إذن، النقطة J أيضًا تقع على سطح هذه الكرة.

43	تختلف النقطة B عن النقطة A فقط في الإحداثي z، والفرق بين قيمتي z يساوي 6 إذن، AB أحد أحرف المكعب، وطول ضلع المكعب 6 وحدات. أما النقطة C فيزيد إحداثيها x بمقدار 6 وحدات عن الإحداثي x للنقطة B، كما يقل إحداثيها y بمقدار 6 عن الإحداثي y للنقطة B (مُزاحة عنها 6 وحدات لليسار). نجد باقي النقاط (الرؤوس) بإحداث إزاحات مقدارها 6 وحدات لإحداثيات الرؤوس الثلاثة المعطاة. $D(8,3,-1)$ وذلك بإزاحة النقطة A بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور x الموجب. $E(8,3,5)$ وذلك بإزاحة النقطة B بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور x الموجب. $F(8,-3,-1)$ وذلك بإزاحة النقطة C بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور z السالب. $G(2,-3,5)$ وذلك بإزاحة النقطة B بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور y السالب. $H(2,-3,-1)$ وذلك بإزاحة النقطة A بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور y السالب. 
44	$\frac{AX}{XB}=\frac{1}{2}\Rightarrow XB=2AX\Rightarrow AB=AX+XB=AX+2AX=3AX$ $\Rightarrow AX=\frac{1}{3}AB$ $\overrightarrow{AX}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{3}\left(-3\vec{a}+6\vec{b}\right)=-\vec{a}+2\vec{b}$ $\overrightarrow{CY}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BY}=6\vec{b}+5\vec{a}-\vec{b}=5\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CY}$ $\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AX}=3\vec{a}-\vec{a}+2\vec{b}=2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{2}{5}\overrightarrow{CY}$

45	$\overrightarrow{LN} = \langle 1, 13, -12 \rangle$ $LN = \left\|\overrightarrow{LN}\right\| = \sqrt{1 + 169 + 144} = \sqrt{314}$ $\overrightarrow{ML} = \langle 7, -4, 2 \rangle$ $ML = \left\|\overrightarrow{ML}\right\| = \sqrt{49 + 16 + 4} = \sqrt{69}$ $\overrightarrow{NM} = \langle -8, -9, 10 \rangle$ $NM = \left\|\overrightarrow{NM}\right\| = \sqrt{64 + 81 + 100} = \sqrt{245}$ بما أن: $(LN)^2 = (ML)^2 + (NM)^2$ إذ أن: $314 = 69 + 245$ فإن ΔLMN قائم الزاوية في M (بعكس نظرية فيثاغورس)
46	مساحة المثلث هي A حيث: $A = \frac{1}{2}(ML)(NM) = \frac{1}{2}\sqrt{69}\sqrt{245} = \frac{7}{2}\sqrt{345}$