الدرس السادس: المعادلات التفاضلية

<table>
<tr><td colspan="2">مسألة اليوم صفحة 91</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$\frac{dA}{dt} = 2(20 - A)$
$\int \frac{dA}{20 - A} = \int 2\, dt$
$-\ln|20 - A| = 2t + K$ (K هو ثابت التكامل)
$-\ln 15 = 0 + K \Rightarrow K = -\ln 15$ (بتعويض الزمن 0 ودرجة الحرارة 5)
$\Rightarrow -\ln|20 - A| = 2t - \ln 15$
$\Rightarrow \ln\left|\frac{15}{20 - A}\right| = 2t$
إذن، يمكن نمذجة درجة الحرارة C بعد t ساعة بالعلاقة الآتية:
$\ln\left|\frac{15}{20 - A}\right| = 2t$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>نعوض $A = 18$ في العلاقة: $\ln\left|\frac{15}{20-A}\right| = 2t$ فينتج:
$\ln\left|\frac{15}{20 - 18}\right| = 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2}\ln\frac{15}{2} = \frac{\ln 15 - \ln 2}{2} \approx 1$
إذن، تصبح درجة حرارة السائل 18°C بعد مرور ساعة واحدة تقريبًا بعد وضعه في الغرفة.</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 92</td></tr>
<tr><td>a</td><td>$y' = 4e^x + 15e^{3x}$
$y'' = 4e^x + 45e^{3x}$
$y'' - 4y' + 3y = 4e^x + 45e^{3x} - 4(4e^x + 15e^{3x}) + 3(4e^x + 5e^{3x}) = 0$
إذن $y = 4e^x + 5e^{3x}$ حل للمعادلة التفاضلية $y'' - 4y' + 3y = 0$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$y' = \cos x$
$y'' = -\sin x$
$y'' - 4y' + 3y = -\sin x - 4\cos x + 3\sin x = 2\sin x - 4\cos x \neq 0$
إذن $y = \sin x$ ليس حلًا للمعادلة التفاضلية $y'' - 4y' + 3y = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 94</td></tr>
</table>

$$\frac{dy}{dx} = 5\sec^2 x - \frac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow dy = \left(5\sec^2 x - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right) dx$$

$$\int dy = \int \left(5\sec^2 x - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right) dx$$

الحل العام لهذه المعادلة هو: $y = 5\tan x - x^{\frac{3}{2}} + C$

لإيجاد الحل الخاص نعوض النقطة $(0, 7)$ في الحل العام:

$$7 = 0 - 0 + C \Rightarrow C = 7$$

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يحقق النقطة $(0, 7)$ هو:

$$y = 5\tan x - x^{\frac{3}{2}} + +7$$

أتحقق من فهمي صفحة 96

a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^4} \Rightarrow 2x\,dx = y^4\,dy$$

$$\Rightarrow \int 2x\,dx = \int y^4\,dy \Rightarrow \frac{1}{5}y^5 = x^2 + C$$

b

$$\frac{dy}{dx} = 2x - xe^y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(2 - e^y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{2 - e^y} = x\,dx$$

$$\Rightarrow \int x\,dx = \int \frac{1}{2 - e^y} \times \frac{e^{-y}}{e^{-y}}\,dy$$

$$\Rightarrow \int x\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2e^{-y}}{2e^{-y} - 1}\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}\ln|2e^{-y} - 1| + C \Rightarrow x^2 = -\ln|2e^{-y} - 1| + C$$

c	$\frac{dy}{dx}=\frac{x\sin x}{y}\Rightarrow ydy=x\sin x\,dx$ $\Rightarrow\int y\,dy=\int x\sin x\,dx$ نجد $\int x\sin x\,dx$ بالأجزاء: $u=x \qquad dv=\sin x\,dx$ $du=dx \qquad v=-\cos x$ $\Rightarrow\int y\,dy=\int x\sin x\,dx$ $\Rightarrow\frac{1}{2}y^2=-x\cos x-\int -\cos x\,dx$ $\Rightarrow\frac{1}{2}y^2=-x\cos x+\sin x+C$
d	$\sin^2 x\frac{dy}{dx}=y^2\cos^2 x$ $\sin^2 x dy=y^2\cos^2 x\,dx$ $\frac{dy}{y^2}=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx\Rightarrow\int y^{-2}\,dy=\int\cot^2 x\,dx$ $\int y^{-2}\,dy=\int(\csc^2 x-1)\,dx$ $\Rightarrow\frac{-1}{y}=-\cot x-x+C\quad\Rightarrow\frac{1}{y}=x+\cot x+C$
أتحقق من فهمي صفحة 98	

a	$dy = xy^2 e^{2x}\, dx$ $\int \frac{dy}{y^2} = \int xe^{2x}\, dx$ نجد $\int xe^{2x}\, dx$ بالأجزاء: $u = x \qquad dv = e^{2x} dx$ $du = dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x}$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2} xe^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx$ الحل العام هو: $\Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$ بتعويض $(0,1)$ $-1 = -\frac{1}{4} + C \Rightarrow C = -\frac{3}{4}$ الحل الخاص هو: $-\frac{1}{y} = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{3}{4}$
b	$\frac{dy}{y} = \cos x\, dx$ الحل العام هو : $\int \frac{dy}{y} = \int \cos x\, dx \Rightarrow \ln\|y\| = \sin x + C$ بتعويض $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ $0 = 1 + C \Rightarrow C = -1$ الحل الخاص: $\ln\|y\| = \sin x - 1$

أتحقق من فهمي صفحة 100

$$\frac{ds}{dt} = st\sqrt{t+1} \Rightarrow \frac{ds}{s} = t\sqrt{t+1}dt$$

$$\int \frac{ds}{s} = \int t\sqrt{t+1}dt$$

$$u = t+1 \Rightarrow du = dt \quad , \quad t = u-1$$

$$\int t\sqrt{t+1}dt = \int (u-1)\sqrt{u}du = \int (u-1)u^{\frac{1}{2}}du = \int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \frac{ds}{s} = \int t\sqrt{t+1}dt$$

$$\Rightarrow \ln|s| = \frac{2}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

الموقع **s(t)** لا يمكن أن يكون 0 لأن **ln 0** غير معرف ولا يمكن أن يكون سالبًا لأن **s(0) = 1**

واقتران الموقع متصل، ولذا يمكننا أن نحذف رمز القيمة المطلقة ونعتبر $\ln|s| = \ln s$

بتعويض **s=1** عندما **t=0** ينتج:

$$0 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + C \Rightarrow C = \frac{4}{15}$$

$$\Rightarrow \ln s = \frac{2}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{15}$$

نعوض **t=3** لنجد **s** الموقع المطلوب:

$$\ln s(3) = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} + \frac{4}{15} = \frac{116}{15} \Rightarrow s(3) = e^{\frac{116}{15}}$$

أتحقق من فهمي صفحة 102

a	$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{20000}p(1000 - P)$ $\int \frac{dP}{P(1000 - P)} = \int \frac{1}{20000}\, dt$ بتجزئة الكسر داخل التكامل في الطرف الأيسر: $\int \left(\frac{\frac{1}{1000}}{P} + \frac{\frac{1}{1000}}{1000 - P}\right) dP = \int \frac{1}{20000}\, dt$ حل عام: $\frac{1}{1000}\ln\|P\| - \frac{1}{1000}\ln\|1000 - P\| = \frac{1}{20000}t + C$ $20\ln\|P\| - 20\ln\|1000 - P\| = t + C$ $20\ln\left\|\frac{P}{1000 - P}\right\| = t + C$ بتعويض $P = 2500$ عند $t = 0$ ينتج: $C = 20\ln\frac{2500}{1500} = 20\ln\frac{5}{3}$ $\Rightarrow 20\ln\left\|\frac{P}{1000 - P}\right\| = t + 20\ln\frac{5}{3}$
b	نعوض $P = 1800$ في المعادلة الأخيرة: $\Rightarrow 20\ln\left(\frac{9}{4}\right) = t + 20\ln\frac{5}{3} \Rightarrow t = 20\ln\frac{27}{20} \approx 6$ إذن، يصبح عدد الغزلان 1800 غزال بعد 6 سنوات تقريبًا من بدء الدراسة.
أتدرب وأحل المسائل صفحة 102	
1	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $xy' - y = x\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x} - \sqrt{x} = -\frac{1}{2}\sqrt{x} \neq 0$ إذن، $y = \sqrt{x}$ ليس حلًا للمعادلة التفاضلية $xy' - y = 0$

2	$y' = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x - 5 = \ln x - 4$ $y'' = \frac{1}{x}$ $y'' - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$ إذن $y = x\ln x - 5x + 7$ هو حلّ للمعادلة التفاضلية $y'' - \frac{1}{x} = 0$
3	$y' = \sec^2 x$ $y' + y^2 = \sec^2 x + \tan^2 x = 1 + 2\tan^2 x \neq 1$ إذن $y = \tan x$ ليس حلًّا للمعادلة التفاضلية $y' + y^2 = 1$
4	$y' = e^x + 3xe^x + 3e^x = 4e^x + 3xe^x$ $y'' = 4e^x + 3xe^x + 3e^x = 7e^x + 3xe^x$ $y'' - 2y' + y = 7e^x + 3xe^x - 8e^x - 6xe^x + e^x + 3xe^x = 0$ إذن $y = e^x + 3xe^x$ هو حلّ للمعادلة التفاضلية $y'' - 2y' + y = 0$
5	$\frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y}$ $\frac{dy}{\sqrt{y}} = 3x\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 3x\,dx$ $\Rightarrow 2y^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}x^2 + C$
6	$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x}{y^2} \Rightarrow y^2 dy = -3x\,dx$ $\int y^2 dy = \int -3x\,dx$ $\Rightarrow \frac{1}{3}y^3 = -\frac{3}{2}x^2 + C$

7	$\frac{dy}{dx} = \cos x \sin y\ dx$ $\frac{dy}{\sin y} = \cos x\ dx$ $\Rightarrow \int \csc y\, dy = \int \cos x\ dx$ نجد $\int \csc y\, dy$ على النحو الآتي: $\int \csc y\, dy = \int \csc y \times \frac{\csc y + \cot y}{\csc y + \cot y} dy$ $= \int \frac{\csc^2 y + \csc y \cot y}{\csc y + \cot y} dy$ $= -\int \frac{-(\csc^2 y + \csc y \cot y)}{\csc y + \cot y} dy = -\ln\lvert\csc y + \cot y\rvert$ إذن، حل هذه المعادلة هو: $\Rightarrow -\ln\lvert\csc y + \cot y\rvert = \sin x + C$
8	$dy = \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ $\int dy = \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ بالتعويض: $u = x^2 + 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\Rightarrow \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x}{u^2} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} du$ $= -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C$ $\Rightarrow \int dy = \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx \Rightarrow y = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C$

9	$\frac{dy}{dx} = xe^x e^y \Rightarrow \frac{dy}{e^y} = xe^x dx$ $\int \frac{dy}{e^y} = \int xe^x dx$ $\Rightarrow \int e^{-y} dy = \int xe^x dx$ $\Rightarrow -e^{-y} = \int xe^x dx$ لإيجاد $\int xe^x dx$ نستخدم الأجزاء: $u = x \qquad dv = e^x dx$ $du = dx \quad v = e^x$ $\Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C$ $\Rightarrow -e^{-y} = xe^x - e^x + C$
10	$\frac{dy}{y^2} = \frac{x^{-2}}{e^{-\frac{1}{x}}} dx = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ $\int y^{-2} dy = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ $\Rightarrow -y^{-1} = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ لإيجاد $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ نستخدم التعويض: $u = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow dx = -x^2\, du$ $\Rightarrow \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \int \frac{e^u}{x^2} \times -x^2\, du = \int -e^u\, du = -e^u + C = -e^{\frac{1}{x}} + C$ $-y^{-1} = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx \Rightarrow \frac{1}{y} = e^{\frac{1}{x}} + C$

11	$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x-3}dx$ $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x-3}dx$ $\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{3}{x-3}\right)dx$ $\ln\lvert y\rvert = x + 3\ln\lvert x-3\rvert + C$
12	$\frac{dy}{\sin^2 y} = \frac{3x^2}{(x^3+2)}\,dx$ $\int \frac{dy}{\sin^2 y} = \int \frac{3x^2}{(x^3+2)}\,dx$ $\int \csc^2 y\,dy = \int \frac{3x^2}{x^3+2}\,dx$ $-\cot y = \ln\lvert x^3+2\rvert + C$
13	$\frac{dy}{y^3} = \ln x\,dx$ $\int \frac{dy}{y^3} = \int \ln x\,dx$ لإيجاد $\int \ln x\,dx$ نستخدم الأجزاء: $u = \ln x \qquad dv = dx$ $du = \frac{dx}{x} \qquad v = x$ $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$ $\Rightarrow \int y^{-3}dy = \int \ln x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{2}y^{-2} = x\ln x - x + C$

14	$\frac{dy}{y^2-1} = 2x^3dx$ $\int \frac{dy}{y^2-1} = \int 2x^3dx$ لإيجاد $\int \frac{dy}{y^2-1}$ نستخدم الكسور الجزئية: $\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1}$ $A(y+1) + B(y-1) = 1$ $y = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ $y = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{1}{y^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{y-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{y+1}$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2-1} = \int 2x^3dx \Rightarrow \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{y-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{y+1}\right)dy = \int 2x^3dx$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\|y-1\| - \frac{1}{2}\ln\|y+1\| = \frac{1}{2}x^4 + C$ $\Rightarrow \ln\left\|\frac{y-1}{y+1}\right\| = x^4 + C$

15	$y\,dy = \sin^3 x\cos^2 x\,dx$ $\int y\,dy = \int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$ لإيجاد $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$ نستخدم التعويض: $u = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx = \int \sin^3 x\,u^2\,\frac{du}{-\sin x}$ $= \int -\sin^2 x\,u^2\,du = \int (-1+\cos^2 x)\,u^2\,du$ $= \int (-1+u^2)\,u^2\,du = \int (u^4-u^2)\,du$ $= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$ $\Rightarrow \int y\,dy = \int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$ $\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$
16	$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}\;dx$ $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \sqrt{x}\,dx$ $\int y^{-\frac{1}{2}}dy = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$ $2y^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

	$\frac{dy}{y} = \ln x^{\frac{1}{2}}\ dx$ $\int \frac{dy}{y} = \int \ln x^{\frac{1}{2}}\ dx$ $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{2} \ln x\ dx$ لإيجاد $\int \ln x\, dx$ نستخدم الأجزاء:
17	$u = \ln x \qquad dv = dx$ $du = \frac{dx}{x} \qquad v = x$ $\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C$ $\Rightarrow \int \frac{1}{2} \ln x\ dx = \frac{1}{2} x \ln x - \frac{1}{2} x + C$ $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{2} \ln x\ dx \ \Rightarrow \ln\lvert y\rvert = \frac{1}{2} x \ln x - \frac{1}{2} x + C$

18	$(2x+1)(x+2)dy = -3(y-2)dx$ $\int -\frac{1}{3}\frac{dy}{y-2} = \int \frac{dx}{(2x+1)(x+2)}$ لإيجاد $\int \frac{dx}{(2x+1)(x+2)}$ نستخدم الكسور الجزئية: $\frac{1}{(2x+1)(x+2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+2}$ $A(x+2) + B(2x+1) = 1$ $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$ $x = -2 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow \frac{1}{(2x+1)(x+2)} = \frac{\frac{2}{3}}{2x+1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+2}$ $\Rightarrow \int -\frac{1}{3}\frac{dy}{y-2} = \int \frac{dx}{(2x+1)(x+2)}$ $\Rightarrow -\frac{1}{3}\ln\|y-2\| = \frac{1}{3}\ln\|2x+1\| - \frac{1}{3}\ln\|x+2\| + C$ $\Rightarrow -\ln\|y-2\| = \ln\|2x+1\| - \ln\|x+2\| + C$ $\Rightarrow -\ln\|y-2\| = \ln\left\|\frac{2x+1}{x+2}\right\| + C$

19	$\frac{dy}{dx} = y^2\sqrt{4-x}$ $\frac{dy}{y^2} = \sqrt{4-x}dx$ $\int \frac{dy}{y^2} = \int \sqrt{4-x}\,dx$ $\int y^{-2}dy = \int (4-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$ $-\frac{1}{y} = -\frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}} + C$ الحل العام نجد الحل الخاص بتعويض $(1,2)$: $-\frac{1}{2} = -2\sqrt{3} + C \Rightarrow C = 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ $-\frac{1}{y} = -\frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ الحل الخاص هو:
20	$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin^2 x}{y}$ $ydy = 2\sin^2 x\,dx$ $\int ydy = \int 2\sin^2 x\,dx$ $\int ydy = \int (1-\cos 2x)dx$ $\frac{1}{2}y^2 = x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$ الحل العام : نجد الحل الخاص بتعويض $(0,1)$: $\frac{1}{2} = 0 + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}y^2 = x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}$ الحل الخاص :

21	$\frac{dy}{dx} = 2\cos^2 x \cos^2 y$ $\frac{dy}{\cos^2 y} = 2\cos^2 x dx$ $\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int 2\cos^2 x dx$ $\int \sec^2 y dy = \int (1 + \cos 2x) dx$ $\tan y = x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$: الحل العام $1 = 0 + 0 + C$ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ نجد الحل الخاص بتعويض $C = 1$ $\tan y = x + \frac{1}{2}\sin 2x + 1$: الحل الخاص
22	$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x\, e^{\sin x}}{e^y}$ $\int e^y dy = \int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$ لإيجاد $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$ نستخدم التعويض: $u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx = \int \cos x\, e^u \times \frac{du}{\cos x} = \int e^u\, du = e^u + C$ $= e^{\sin x} + C$ $\Rightarrow \int e^y dy = \int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$ $e^y = e^{\sin x} + C$: الحل العام $e^0 = e^0 + C$: $(\pi, 0)$ نجد الحل الخاص بتعويض $\Rightarrow C = 0$ $e^y = e^{\sin x}$: الحل الخاص

23

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}$$

$$\int dy=\int\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}dx$$

لإيجاد $\int \frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}dx$ نستخدم الكسور الجزئية:

$$\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}=\frac{A}{3x-8}+\frac{B}{x-2}$$

$$A(x-2)+B(3x-8)=8x-18$$

$$x=2\Longrightarrow B=1$$

$$x=\frac{8}{3}\Longrightarrow A=5$$

$$\Longrightarrow\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}=\frac{5}{3x-8}+\frac{1}{x-2}$$

$$\Longrightarrow\int dy=\int\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}dx\Longrightarrow y=\int\left(\frac{5}{3x-8}+\frac{1}{x-2}\right)dx$$

الحل العام: $\Longrightarrow y=\frac{5}{3}\ln|3x-8|+\ln|x-2|+C$

نجد الحل الخاص بتعويض $(3,8)$:

$$8=0+0+C\quad\Longrightarrow C=8$$

الحل الخاص: $y=\frac{5}{3}\ln|3x-8|+\ln|x-2|+8$

24	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}$ $\int y\,dy = \int \frac{dx}{x}$ $\frac{1}{2}y^2 = \ln\|x\| + C$ الحل العام: نجد الحل الخاص بتعويض $(e, 1)$: $\frac{1}{2} = 1 + C$ $\Rightarrow C = -\frac{1}{2}$ الحل الخاص هو: $\frac{1}{2}y^2 = \ln\|x\| - \frac{1}{2}$
25	$\frac{dv}{dt} = 10 - 0.5v$ $\frac{dv}{10 - 0.5v} = dt$ $\int \frac{dv}{10 - 0.5v} = \int dt$ $-2\ln\|10 - 0.5v\| = t + C \Rightarrow \ln\|10 - 0.5v\| = -\frac{t}{2} + C$ لإيجاد الحل الخاص نعوض $v = 0$، و $t = 0$ في الحل العام $\ln 10 = 0 + C \Rightarrow C = \ln 10$ $\Rightarrow \ln\|10 - 0.5v\| = -\frac{t}{2} + \ln 10 \Rightarrow \ln\left\|\frac{10 - 0.5v}{10}\right\| = -\frac{t}{2}$ إذن، يمكن نمذجة السرعة المتجهة للسيارة بعد t ثانية من بدء حركتها بالعلاقة الآتية: $\ln\left\|\frac{10 - 0.5v}{10}\right\| = -\frac{t}{2}$

26	$\frac{dN}{dt} = 260 - 0.4N = 0.4(650 - N)$ $\frac{dN}{650 - N} = 0.4dt$ $\int \frac{dN}{650 - N} = \int 0.4\, dt$ $-\ln\lvert 650 - N\rvert = 0.4t + C$ لإيجاد الحل الخاص نعوض 300 = N، و $t = 0$ في الحل العام $-\ln 350 = 0 + C \Rightarrow C = -\ln 350$ $\Rightarrow -\ln\lvert 650 - N\rvert = 0.4t - \ln 350$ $\Rightarrow \ln\left\lvert\frac{350}{650 - N}\right\rvert = 0.4t$ لا يمكن أن يكون N=650 لأن ln 0 غير معرف ولأن N=300عندما t = 0 والاقتران N(t) متصل فلا يمكن أن يكون N أكبر من650، ولذا فإن 650 – N > 0 ويكون | 650 – N |مساوٍ لِـ 650 – N $\Rightarrow \ln\left\lvert\frac{350}{650 - N}\right\rvert = \ln\left(\frac{350}{650 - N}\right) = 0.4t$ نعوض t=3 ونجد N $\ln\left(\frac{350}{650 - N}\right) = 1.2$ $\Rightarrow \frac{350}{650 - N} = e^{\frac{6}{5}} \Rightarrow \frac{650 - N}{350} = e^{-\frac{6}{5}}$ $N = 650 - 350e^{-\frac{6}{5}} \approx 545$ إذن، بعد ثلاث سنوات يكون عدد الذئاب في تلك الغابة 545 ذئبًا تقريبًا.

27	$\frac{dr}{dt} = -0.0075r^2$ $\int -\frac{dr}{r^2} = \int 0.0075\, dt$ $\frac{1}{r} = 0.0075t + C$ لإيجاد الحل الخاص نعوض $\mathbf{r} = 20$، و $t = 0$ في الحل العام $\frac{1}{20} = 0 + C \quad \Rightarrow C = \frac{1}{20}$ $\frac{1}{r} = 0.0075t + \frac{1}{20} \Rightarrow r = \frac{20}{1 + 0.15t}$
28	نضع r =10 في المعادلة الناتجة: $10 = \frac{20}{1 + 0.15t} \Rightarrow 0.1 = \frac{1 + 0.15t}{20} \Rightarrow 2 = 1 + 0.15t$ $\Rightarrow t = \frac{1}{0.15} \approx 6.67\ s$ إذن، يكون طول نصف قطر الكرة 10 cmبعد 6.67 ثانية تقريبًا بعد بدء انكماشها.
29	$\int \frac{dn}{n} = \int 0.2(0.2 - \cos t)dt$ $\ln n = 0.2(0.2t - \sin t) + C$ لإيجاد الحل الخاص نعوض $n = 400$، و $t = 0$ في الحل العام $\ln 400 = 0 + C \Rightarrow C = \ln 400$ $\ln n = 0.2(0.2t - \sin t) + \ln 400$ $\Rightarrow \ln \frac{n}{400} = 0.2(0.2t - \sin t) \Rightarrow n = 400e^{0.2(0.2t - \sin t)}$
30	نعوض t = 3 في المعادلة الأخيرة $n = 400e^{0.2(0.2t - \sin t)}$ $= 400e^{0.2(0.6 - \sin 3)}$ $\approx 400e^{0.12 - 0.028} \approx 400e^{0.092} \approx 439$ إذن، بعد 3 أسابيع يكون عدد الحشرات439 حشرة تقريبًا.

31	$\frac{dy}{dx} = y \cos x$ $\int \frac{dy}{y} = \int \cos x \, dx$ $\Rightarrow \ln\lvert y\rvert = \sin x + C$ لإيجاد قيمة C نضع x=0، وy =1 في الحل العام $0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$ $\Rightarrow \ln\lvert y\rvert = \sin x$ $\Rightarrow y = e^{\sin x}$ ملاحظة: منحنى الاقتران $y = -e^{\sin x}$ لا يمر بالنقطة $(0, 1)$.

32	$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x(x+1)}$ لإيجاد $\int \frac{dx}{x(x+1)}$ نستخدم الكسور الجزئية: $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ $A(x+1) + B(x) = 1$ $x = 0 \Rightarrow A = 1$ $x = -1 \Rightarrow B = -1$ $\Rightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x(x+1)} \Rightarrow \ln\|y\| = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}\right) dx$ $\Rightarrow \ln\|y\| = \ln\|x\| - \ln\|x+1\| + C$ لإيجاد قيمة C نضع x=1، وy =3 في الحل العام $\ln 3 = 0 - \ln 2 + C \Rightarrow C = \ln 3 + \ln 2 = \ln 6$ $\Rightarrow \ln\|y\| = \ln\|x\| - \ln\|x+1\| + \ln 6$ $\Rightarrow \ln\|y\| = \ln\left\|\frac{6x}{x+1}\right\|$ $\Rightarrow \|y\| = \left\|\frac{6x}{x+1}\right\| \Rightarrow y = \frac{6x}{x+1}$ ملاحظة: منحنى الاقتران $y = -\frac{6x}{x+1}$ لا يمر بالنقطة $(1, 3)$

33	$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y^2}+y-xy$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y^2}(x-1)-y(x-1)=(x-1)\left(\frac{1}{y^2}-y\right)$ $\Rightarrow \frac{dy}{\frac{1}{y^2}-y}=(x-1)dx$ $\int \frac{dy}{\frac{1}{y^2}-y}=\int (x-1)dx$ $\int \frac{y^2}{1-y^3}dy=\int (x-1)dx$ $\frac{-1}{3}\int \frac{-3y^2}{1-y^3}dy=\int (x-1)dx$ $\frac{-1}{3}\ln\|1-y^3\|=\frac{1}{2}x^2-x+C$
34	$\frac{dy}{dx}=x\left(\frac{1}{2y-1}-\frac{2}{3y-2}\right)=x\left(\frac{3y-2-4y+2}{6y^2-7y+2}\right)=x\left(\frac{-y}{6y^2-7y+2}\right)$ $\Rightarrow \frac{6y^2-7y+2}{-y}dy=x\,dx$ $\int \frac{6y^2-7y+2}{-y}dy=\int x\,dx$ $\int \left(-6y+7-\frac{2}{y}\right)dy=\int x\,dx$ $-3y^2+7y-2\ln\|y\|=\frac{1}{2}x^2+C$

35	$\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 x \tan^2 y$ $= \sec^2 x + \tan^2 y(1 + \tan^2 x)$ $= \sec^2 x + \tan^2 y \sec^2 x$ $= \sec^2 x(1 + \tan^2 y)$ $= \sec^2 x \sec^2 y$ $\frac{dy}{\sec^2 y} = \sec^2 x\, dx$ $\int \frac{dy}{\sec^2 y} = \int \sec^2 x\, dx$ $\int \cos^2 y\ dy = \int \sec^2 x\, dx$ $\int \frac{1}{2}(1 + \cos 2y)\ dy = \int \sec^2 x\, dx$ $\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{2}\sin 2y\right) = \tan x + C$
36	$\frac{dx}{dt} = -\lambda x$ $\int \frac{dx}{x} = \int -\lambda\, dt$ $\ln\lvert x \rvert = -\lambda t + C$ لكن الكمية x لا تكون سالبة ، فنحذف رمز القيمة المطلقة. $\Rightarrow \ln x = -\lambda t + C$ $x = e^{-\lambda t + C} = e^{-\lambda t} \times e^{C}$, a ليكن ثابت e^{C} $\Rightarrow x = ae^{-\lambda t}$

37	$x(0) = a$ الكمية الابتدائية المطلوب: حساب الزمن الذي تكون عنده $x = \frac{1}{2}a$ ، نعوض: $\frac{1}{2}a = ae^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t} \Rightarrow 2 = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda t = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\lambda}$
38	$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y}$ لكي تكون العلاقة $x^2 + ny^2 = a$ حلًا للمعادلة التفاضلية المعطاة، يجب أن تحققها. نشتق طرفي العلاقة بالنسبة للمتغير x $2x + 2ny\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{ny}$ نعوض المشتقة في المعادلة التفاضلية: $-\frac{x}{ny} = -\frac{2x}{3y} \Rightarrow 2nxy = 3xy$ $\Rightarrow n = \frac{3xy}{2xy} = \frac{3}{2}$
39	النقطة $(5, 4)$تحقق العلاقة: $\Rightarrow \quad 25 + \frac{3}{2}(16) = a \quad \Rightarrow a = 49$ $\Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 49$ لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x نضع $y = 0$ في معادلتها $\Rightarrow \quad x^2 = 0 + 49 = 49 \quad \Rightarrow x = \pm 7$ إحداثيات نقطتي تقاطع العلاقة $x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 49$ مع المحور x هما $(-7, 0)$و$(7, 0)$