الدرس الثاني: التوزيع الطبيعي

	مسألة اليوم صفحة 178
	ليكن T الزمن الذي تستغرقه البطارية قبل نفادها $T \sim N(36, 5^2)$ $P(T > 27) = P\left(z > \frac{27-36}{5}\right) = P(z > -1.8) = P(z < 1.8) = 0.9641$
	أتحقق من فهمي صفحة 182
a	النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي هي 50% وذلك من خواص منحنى التوزيع الطبيعي (تماثل البيانات حول الوسط الحسابي)
b	النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البعد بين أطوالهم و الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد هي 68% وذلك بالاستناد للقاعدة التجريبية مباشرة.
c	النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي $\frac{1}{2}(95\%) = 47.5\%$ ، (أو $34\% + 13.5\% = 47.5\%$)
d	النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي: $\frac{1}{2}(99.7\%) + \frac{1}{2}(95\%) = 97.35\%$
	أتحقق من فهمي صفحة 184
a	$P(X > 30) = P(X > \mu) = 0.5$
b	$P(29.6 < X < 30.4) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.68$
c	$P(29.2 < X < 30) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu) = \frac{1}{2}(95\%) = 47.5\% = 0.475$

d	$P(29.2 < X < 30.4) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$ $= \frac{1}{2}(0.95) + \frac{1}{2}(0.68) = 0.815$
	أتحقق من فهمي صفحة 187
a	$P(Z < 1.5) = 0.9332$
b	$P(Z > 0.61) = 1 - P(Z < 0.61) = 1 - 0.7291 = 0.2709$
c	$P(Z < -0.43) = 1 - P(Z < 0.43) = 1 - 0.6664 = 0.3336$
d	$P(Z > -3.23) = P(Z < 3.23) = 0.9994$
e	$P(-1.4 < Z < 2.07) = P(Z < 2.07) - P(Z < -1.4)$ $= P(Z < 2.07) - (1 - P(Z < 1.4))$ $= P(Z < 2.07) + P(Z < 1.4) - 1$ $= 0.9808 + 0.9192 - 1 = 0.9000$
	أتحقق من فهمي صفحة 189
a	$P(X < -2) = P\left(Z < \frac{-2-7}{3}\right) = P(Z < -3)$ $= 1 - P(Z < 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$
b	$P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10-7}{3}\right) = P(Z > 1)$ $= 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

c	$P(4 < X < 13) = P\left(\frac{4-7}{3} < Z < \frac{13-7}{3}\right) = P(-1 < Z < 2)$ $= P(Z < 2) - P(Z < -1)$ $= P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1))$ $= p(Z < 2) + p(Z < 1) - 1$ $= 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.8185$

أتحقق من فهمي صفحة 190

a	$P(X < 162) = P\left(Z < \frac{162-165}{3}\right) = P(Z < -1)$ $= 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$
b	$P(X > 171) = P\left(Z > \frac{171-165}{3}\right) = P(Z > 2)$ $= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$
c	$P(162 < X < 171) = P\left(\frac{162-165}{3} < Z < \frac{171-165}{3}\right) = P(-1 < Z < 2)$ $= P(Z < 2) - P(Z < -1)$ $= P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1))$ $= P(Z < 2) + P(Z < 1) - 1$ $= 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.8185$

أتحقق من فهمي صفحة 194

a	$P(X < x) = 0.9877 \Rightarrow P(Z < z) = 0.9877$ $\Rightarrow z = 2.25 \Rightarrow \frac{x+3}{4} = 2.25 \Rightarrow x = 6$

b	$P(X < x) = 0.31 \Rightarrow P(Z < z) = 0.31$ الاحتمال المعطى (0.31) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z سالبة $\Rightarrow P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$ $0.31 = 1 - P(Z < z) \Rightarrow P(Z < z) = 0.69 \Rightarrow z = 0.5$ إذن، قيمة z التي تقابل الاحتمال 0.31 هي -0.5 $\Rightarrow \frac{x+3}{4} = -0.5 \Rightarrow x = -5$
c	$P(X > x) = 0.9738 \Rightarrow P(Z > z) = 0.9738$ الاحتمال المعطى (0.9738) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: $\frac{x+3}{4}$ سالبة $\Rightarrow P(Z > -z) = 0.9738 \Rightarrow P(Z < z) = 0.9738 \Rightarrow z = 1.94$ إذن، قيمة z التي تقابل الاحتمال $P(Z > z) = 0.9738$ هي -1.94 $\Rightarrow \frac{x+3}{4} = -1.94 \Rightarrow x = -10.76$
d	$P(X > x) = 0.2 \Rightarrow P(Z > z) = 0.2$ الاحتمال المعطى (0.2) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.2 = 0.8 \Rightarrow z = 0.84$ $\Rightarrow \frac{x+3}{4} = 0.84 \Rightarrow x = 0.36$

أتحقق من فهمي صفحة 196

	$P(X > 4.8) = 0.03 \Rightarrow P(Z > z) = 0.03$ الاحتمال المعطى (0.03) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.03 = 0.97$ $\Rightarrow z = 1.88 \Rightarrow \frac{4.8-4.5}{\sigma} = 1.88 \Rightarrow \sigma = \frac{0.3}{1.88} \approx 0.16$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 196

1	النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي هي 50% وذلك من خواص منحنى التوزيع الطبيعي (تماثل البيانات حول الوسط الحسابي)

2	النسبة المئوية للطلبة الذين تقل كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد هي $\frac{1}{2}(68\%) = 34\%$
3	النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي بمقدار لا يقل عن انحرافين معياريين هي $\frac{1}{2}(100\% - 95\%) = 2.5\%$
4	النسبة المئوية للطلبة الذين تقل كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية هي: $\frac{1}{2}(95\%) + \frac{1}{2}(99.7\%) = 97.35\%$
5	$P(X < 50) = 0.5$
6	$P(46 < X < 54) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.68$
7	$P(42 < X < 62) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 3\sigma)$ $= \frac{1}{2}(0.95) + \frac{1}{2}(0.997) = 0.9735$
8	$\mu = 2.5\ \text{mm}$ $2.7 = \mu + 2\sigma \Rightarrow 2.7 = 2.5 + 2\sigma \Rightarrow \sigma = 0.1\ \text{mm}$
9	النسبة المئوية للمسامير التي يزيد طول قطر كل منها على الوسط الحسابي بما لا يزيد على انحرافين معياريين هي $\frac{1}{2}(95\%) = 47.5\%$
10	نعلم أن 68% تقريبًا من البيانات في التوزيع الطبيعي تقع بين $\mu - \sigma$، و $\mu + \sigma$ ، فإذن: $107 = \mu + \sigma \Rightarrow 107 = 100 + \sigma \Rightarrow \sigma = 7 \Rightarrow \sigma^2 = 49$
11	$P(Z < 0.43) = 0.6664$
12	$P(Z > 1.08) = 1 - P(Z < 1.08) = 1 - 0.8599 = 0.1401$
13	$P(Z < -2.03) = 1 - P(Z < 2.03) = 1 - 0.9788 = 0.0212$

14	$P(Z > 2.2) = 1 - P(Z < 2.2) = 1 - 0.9861 = 0.0139$
15	$P(-0.72 < Z < 0.72) = P(Z < 0.72) - P(Z < -0.72)$ $= P(Z < 0.72) - \big(1 - P(Z < 0.72)\big)$ $= 2P(Z < 0.72) - 1$ $= 2(0.7642) - 1 = 0.5284$
16	$P(1.5 < Z < 2.5) = P(Z < 2.5) - P(Z < 1.5)$ $= 0.9938 - 0.9332 = 0.0606$
17	$P(-0.5 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < -0.5)$ $= P(Z < 1.5) - \big(1 - P(Z < 0.5)\big)$ $= P(Z < 1.5) + P(Z < 0.5) - 1$ $= 0.9332 + 0.6915 - 1 = 0.6247$
18	$P(-2.25 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z < -2.25)$ $= P(Z < 0) - \big(1 - P(Z < 2.25)\big)$ $= P(Z < 0) + P(Z < 2.25) - 1$ $= 0.5 + 0.9878 - 1 = 0.4878$
19	$P(Z < z) = 0.7642$ الاحتمال المعطى (0.7642) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow z = 0.72$

20	$P(Z > z) = 0.372$ الاحتمال المعطى (0.372) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.372 = 0.628 \Rightarrow z = 0.33$
21	$P(Z > z) = 0.8531$ الاحتمال المعطى (0.8531) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z سالبة $\Rightarrow 0.8531 = P(Z > -z) = P(Z < z) \Rightarrow z = 1.05$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال $P(Z > z) = 0.8531$ هي -1.05
22	$P(X < 2) = P\left(Z < \frac{2+3}{5}\right) = P(Z < 1) = 0.8413$
23	$P(X > 4.5) = P\left(Z > \frac{4.5+3}{5}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5)$ $= 1 - 0.9332 = 0.0668$
24	$P(-5 < X < -3) = P\left(\frac{-5+3}{5} < Z < \frac{-3+3}{5}\right) = P(-0.4 < Z < 0)$ $= P(Z < 0) - P(Z < -0.4)$ $= P(Z < 0) - (1 - P(Z < 0.4))$ $= P(Z < 0) + P(Z < 0.4) - 1$ $= 0.5 + 0.6554 - 1 = 0.1554$

25	$P(X < x) = 0.99 \Rightarrow P(Z < z) = 0.99$ الاحتمال المعطى (0.99) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة $z = 2.33$ $\frac{x - 30}{10} = 2.33 \Rightarrow x = 53.3$
26	$P(X > x) = P(Z > z) = 0.1949$ الاحتمال المعطى (0.1949) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.1949 = 0.8051$ $\Rightarrow z = 0.86$ $\Rightarrow \frac{x - 30}{10} = 0.86 \Rightarrow x = 38.6$
27	$P(X < x) = 0.35 \Rightarrow P(Z < z) = 0.35$ الاحتمال المعطى (0.35) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z سالبة $\Rightarrow P(Z < -z) = P(Z > z) = 1 - P(Z < z) = 0.35$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.65 \Rightarrow z = 0.39$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال $P(Z < z) = 0.35$ هي -0.39 $\Rightarrow \frac{x - 30}{10} = -0.39 \Rightarrow x = 26.1$

28	$P(X > x) = 0.05 \Rightarrow P(Z > z) = 0.05$ الاحتمال المعطى (0.05) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.05 = 0.95 \Rightarrow z = 1.64$ $\Rightarrow \frac{x - 30}{10} = 1.64 \Rightarrow x = 46.4$
29	$P(X > 175) = P\left(Z > \frac{175 - 185}{5}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0.9772$
30	$P(180 < X < 190) = P\left(\frac{180 - 185}{5} < Z < \frac{190 - 185}{5}\right) = P(-1 < Z < 1)$ $= P(Z < 1) - P(Z < -1) = P(Z < 1) - \left(1 - P(Z < 1)\right)$ $= 2P(Z < 1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6826$ ملحوظة: يمكن حل هذا السؤال بالاستناد إلى القاعدة التجريبية بدلًا من استخدام الجدول، ويكون الاحتمال 0.68 تقريبًا.
31	$P(X > 195) = P\left(Z > \frac{195 - 185}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772 = 0.0228$ إذا كان عدد اللاعبين الذين تزيد أطوالهم على 195 cm هو N، فإنّ: $N = 2000 \times 0.0228 = 45.6 \approx 46$
32	$P(X > 9) = P\left(Z > \frac{9 - 6}{2}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5)$ $= 1 - 0.9332 = 0.0668$
33	$P(X < 224) = P\left(Z < \frac{224 - 232}{5}\right) = P(Z < -1.6) = 1 - P(Z < 1.6)$ $= 1 - 0.9452 = 0.0548$

34	$P(232 < X < x) = P\left(\frac{232-232}{5} < Z < z\right) = P(0 < Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < 0) = 0.2$ $\Rightarrow P(Z < z) - 0.5 = 0.2$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.7$ الاحتمال المعطى (0.7) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow z = 0.52 \Rightarrow \frac{x-232}{5} = 0.52 \Rightarrow x = 234.6\,\text{g}$
35	$P(X > 47) = 0.11 \Rightarrow P\left(Z > \frac{47-\mu}{13}\right) = 0.11$ نفرض أن $z = \frac{47-\mu}{13}$ ، فيكون : $P(Z > z) = 0.11$ الاحتمال المعطى (0.11) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 0.11 = 0.89$ $\Rightarrow z = 1.23 \Rightarrow \frac{47-\mu}{13} = 1.23 \Rightarrow \mu = 31.01$
36	$P(x > 48) = 0.2 \Rightarrow P\left(Z > \frac{48-43}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{5}{\sigma}\right) = 0.2$ نفرض أن $z = \frac{5}{\sigma}$ ، فيكون : $P(Z > z) = 0.2$ الاحتمال المعطى (0.2) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 0.2 = 0.8$ $\Rightarrow z = 0.84 \Rightarrow \frac{5}{\sigma} = 0.84 \Rightarrow \sigma = \frac{5}{0.84} \approx 5.95$
37	$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow 2 = \frac{1-\mu}{\mu} \Rightarrow 2\mu = 1 - \mu \Rightarrow \mu = \frac{1}{3}$

38	$1 = \frac{10-\mu}{\sigma} \Rightarrow \sigma = 10-\mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $-2 = \frac{4-\mu}{\sigma} \Rightarrow -2\sigma = 4-\mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $(1)-(2): 3\sigma = 6 \Rightarrow \sigma = 2 \quad , \quad \mu = 8$
39	$P(X > 100) = P\left(Z > \frac{100-90}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772 = 0.0228$ إذا كان عدد السيارات التي ستتجاوز السرعة المحددة هو N، فإنّ: $N = 1000(0.0228) = 22.8 \approx 23$
40	$P(X \leq 55) = P\left(Z \leq \frac{55-60}{4}\right) = P(Z \leq -1.25)$ $= P(Z > 1.25)$ $= 1 - P(Z < 1.25)$ $= 1 - 0.8944 = 0.1056$ إذا كان عدد البيض صغير الحجم من بين 5000 هو N، فإنّ: $N = 5000(0.1056) = 528$
41	تقع 95% من البيانات بين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 2\sigma$ (حسب القاعدة التجريبية)، و هذا يعني الفترة من 5.8 إلى 7 وليس الفترة التي ذكرتها عبير. الخطأ الذي ارتكبته عبير، هو أنها اعتبرت $\sigma = 0.09$ والصواب هو أن $\sigma = \sqrt{0.09} = 0.3$

$$P(X < 15) = P\left(Z < \frac{15-\mu}{\sigma}\right) = 0.1469$$

نفرض أن $z = \frac{15-\mu}{\sigma}$ ، فيكون $P(Z < z) = 0.1469$

الاحتمال المعطى (0.1469) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أقل من 0.5،

إذن: z سالبة.

$$\Rightarrow P(Z < -z) = P(Z > z)$$

$$0.1469 = 1 - P(Z < z)$$

$$P(Z < z) = 1 - 0.1469 = 0.8531 \Rightarrow z = 1.05$$

إذن قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى هي -1.05

42

$$\Rightarrow \frac{15-\mu}{\sigma} = -1.05 \Rightarrow 15 - \mu = -1.05\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$P(X > 35) = P\left(Z > \frac{35-\mu}{\sigma}\right) = 0.025$$

نفرض أن $z = \frac{35-\mu}{\sigma}$ ، فيكون $P(Z > z) = 0.025$

الاحتمال المعطى (0.025) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5،

إذن: z موجبة.

$$\Rightarrow P(Z < z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 0.025 = 0.975$$

$$\Rightarrow z = 1.96 \Rightarrow \frac{35-\mu}{\sigma} = 1.96 \Rightarrow 35 - \mu = 1.96\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$(2) - (1): \quad 20 = 3.01\sigma \Rightarrow \sigma \approx 6.64 \quad , \quad \mu \approx 22$$

$$P(X > 90) = P\left(Z > \frac{90-\mu}{\sigma}\right) = \frac{10000}{100000} = 0.1$$

نفرض أن $z = \frac{90-\mu}{\sigma}$ ، فيكون $P(Z > z) = 0.1$

الاحتمال المعطى (0.1) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5،

إذن: z موجبة.

$$\Rightarrow P(Z < z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$\Rightarrow z = 1.28 \Rightarrow \frac{90-\mu}{\sigma} = 1.28 \Rightarrow 90 - \mu = 1.28\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

43 $$P(X > 95) = P\left(Z > \frac{95-\mu}{\sigma}\right) = \frac{5000}{100000} = 0.05$$

نفرض أن $z = \frac{95-\mu}{\sigma}$ ، فيكون $P(Z > z) = 0.05$

الاحتمال المعطى (0.05) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5،

إذن: z موجبة.

$$\Rightarrow P(Z < z) = 1 - P(Z > z)$$
$$= 1 - 0.05 = 0.95$$

$$\Rightarrow z = 1.64 \Rightarrow \frac{95-\mu}{\sigma} = 1.64 \Rightarrow 95 - \mu = 1.64\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$(2) - (1): \ 5 = 0.36\sigma \Rightarrow \sigma \approx 13.89 \quad , \quad \mu \approx 72.22$$

44

$$P(X > 13) = P\left(Z > \frac{13-\mu}{\sigma}\right) = 0.05$$

نفرض أن $z = \frac{13-\mu}{\sigma}$ ، فيكون $P(Z > z) = 0.05$

الاحتمال المعطى (0.05) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5،

إذن: z موجبة.

$$\Rightarrow P(Z < z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$\Rightarrow z = 1.64 \Rightarrow \frac{13-\mu}{\sigma} = 1.64 \Rightarrow 13 - \mu = 1.64\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10-\mu}{\sigma}\right) = 0.12$$

نفرض أن $z = \frac{10-\mu}{\sigma}$ ، فيكون $P(Z < z) = 0.12$

الاحتمال المعطى (0.12) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أقل من 0.5،

إذن: z سالبة.

$$\Rightarrow P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$$

$$0.12 = 1 - P(Z < z)$$

$$\Rightarrow P(Z < z) = 0.88 \Rightarrow z = 1.17$$

إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى $P(Z < z) = 0.12$ هي $z = -1.17$

$$\Rightarrow \frac{10-\mu}{\sigma} = -1.17 \Rightarrow 10 - \mu = -1.17\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$(1) - (2): \; 3 = 2.81\sigma \Rightarrow \sigma \approx 1.07 \quad , \quad \mu \approx 11.25$$

45	المساحة الكلية تحت المنحنى هي 100% المساحة تحت المنحنى بين القيمتين $79+b$ و $79-a$ هي 64.63% إذن، المساحة تحت المنحنى خارج القيمتين $79+b$ و $79-a$ هي: $100\% - 64.63\% = 35.37\%$ ، وهي تمثل منطقتين إحداهما مساحتها ضعف الأخرى (حسب المعطى)، فتكون مساحة المنطقة المظللة تساوي $\frac{35.37\%}{3} = 11.79\%$ أو نكتب: $P(79-a \le X \le 79+b) = P(X \le 79+b) - P(X \le 79-a)$ $\Rightarrow P(X \le 79+b) - P(X \le 79-a) = 0.6463 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$ ونعلم أنّ: $P(X \ge 79+b) = 2P(X \le 79-a)$ $\Rightarrow 1 - P(X < 79+b) = 2P(X \le 79-a)$ $\Rightarrow P(X < 79+b) + 2P(X \le 79-a) = 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$ $(2) - (1) \Rightarrow 3P(X \le 79-a) = 0.3537$ $\Rightarrow P(X \le 79-a) = 0.1179$ و $P(X \ge 79+b) = 0.2358$ إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي: $P(X \le 79-a) = 0.1179$
46	وجدنا في السؤال السابق أن: $P(X \ge 79+b) = 0.2358$ $\Rightarrow P\left(Z \ge \frac{79+b-79}{12}\right) = 0.2358$ $\Rightarrow P\left(Z \ge \frac{b}{12}\right) = 0.2358$ نفرض أن $z = \frac{b}{12}$ ، فيكون: $P(Z \ge z) = 0.2358$ $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.2358 = 0.7642$ $\Rightarrow z = 0.72 \Rightarrow \frac{b}{12} = 0.72 \Rightarrow b = 8.64$

اختبار نهاية الوحدة السادسة

1	a
2	b
3	c
4	b
5	c
6	b
7	$P(X=4)=0.3(0.7)^3\approx 0.103$
8	$P(3<X\leq 5)=P(X=4)+P(X=5)=0.3(0.7)^3+0.3(0.7)^4\approx 0.175$
9	$P(X>4)=1-P(X\leq 4)$ $=1-\left(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\right)$ $=1-(0.3(0.7)^0+0.3(0.7)^1+0.3(0.7)^2+0.3(0.7)^3)$ $\approx 1-(0.3+0.21+0.147+0.103)=0.24$
10	$P(5\leq X\leq 7)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)$ $=0.3(0.7)^4+0.3(0.7)^5+0.3(0.7)^6$ $=0.3(0.7)^4(1+0.7+0.49)\approx 0.158$
11	$P(X=3)=\binom{10}{3}(0.4)^3(0.6)^7\approx 0.215$
12	$P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-\left(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right)$ $=1-\left(\binom{10}{0}(0.4)^0(0.6)^{10}+\binom{10}{1}(0.4)^1(0.6)^9+\binom{10}{2}(0.4)^2(0.6)^8\right)$ $\approx 1-(0.0060+0.0403+0.1209)\approx 0.833$

13	$P(7 \le X < 9) = P(X = 7) + P(X = 8)$ $= \binom{10}{7}(0.4)^7(0.6)^3 + \binom{10}{8}(0.4)^8(0.6)^2$ $\approx 0.0425 + 0.0106 \approx 0.053$
14	$P(X \le 9) = 1 - P(X = 10) = 1 - \binom{10}{10}(0.4)^{10}(0.6)^0$ $= 1 - (0.4)^{10} \approx 0.999895$
15	$P(X > 8.5) = P\left(Z > \frac{8.5 - 4}{3}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5)$ $= 1 - 0.9332 = 0.0668$
16	$P(-2 < X < 7) = P\left(\frac{-2 - 4}{3} < Z < \frac{7 - 4}{3}\right) = P(-2 < Z < 1)$ $= P(Z < 1) - P(Z < -2) = P(Z < 1) - \left(1 - P(Z < 2)\right)$ $= P(Z < 1) + P(Z < 2) - 1 = 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185$
17	$P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10 - 4}{3}\right) = P(Z < 2) = 0.9772$
18	$P(5.5 < X < 8.5) = P\left(\frac{5.5 - 4}{3} < Z < \frac{8.5 - 4}{3}\right) = P(0.5 < Z < 1.5)$ $= P(Z < 1.5) - P(Z < 0.5) = 0.9332 - 0.6915 = 0.2417$
19	$P(X < 1) = P\left(Z < \frac{1 - 4}{3}\right) = P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1)$ $= 1 - 0.8413 = 0.1587$
20	$P(X > -3) = P\left(Z > \frac{-3 - 4}{3}\right) = P(Z > -2.33) = P(Z < 2.33) = 0.9901$
21	ليكن X عدد المصابيح التالفة ضمن المصابيح المنة. $\Rightarrow X \sim B(100, 0.17)$ $E(X) = np = 100(0.17) = 17$

22	ليكن X عدد المقابلات التي تجرى حتى مصادفة أول طالب يمارس الرياضة. $\Rightarrow X \sim Geo(0.2)$ $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.2} = 5$
23	$P(Z > z) = 0.1$ الاحتمال المعطى (0.1) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.1 = 0.9 \Rightarrow z = 1.28$
24	$P(Z < z) = 0.9671$ الاحتمال المعطى (0.9671) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z = 1.84$
25	$P(-z < Z < z) = 0.9464$ $\Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -z) = 0.9464$ $\Rightarrow P(Z < z) - \big(1 - P(Z < z)\big) = 0.9464$ $\Rightarrow 2P(Z < z) - 1 = 0.9464$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.9732$ الاحتمال المعطى (0.9732) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z موجبة. $\Rightarrow z = 1.93$
26	$P(Z > z) = 0.9222$ الاحتمال المعطى (0.9222) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أكبر من 0.5، إذن: z سالبة. $\Rightarrow P(Z > -z) = P(Z < z)$ $0.9222 \Rightarrow P(Z < z) \Rightarrow z = 1.42$ إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال $P(Z > z) = 0.9222$ هي $z = -1.42$

27	$P(X > 181) = P\left(Z > \frac{181-171}{10}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1)$ $= 1 - 0.8413 = 0.1587$
28	$P(X < 171 - 2(10)) = P(X < 151) = P\left(Z < \frac{151-171}{10}\right) = P(Z < -2)$ $= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$ أو نكتب: $P(X < \mu - 2\sigma) = P\left(Z < \frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma}\right)$ $= P(Z < -2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$
29	$P(X > 171 + 10) = P(X > 181) = P\left(Z > \frac{181-171}{10}\right)$ $= P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$ أو نكتب: $P(X > \mu + \sigma) = P\left(Z > \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) = P(Z > 1) = 0.1587$
30	$P(\lvert X - \mu \rvert \le \sigma) = P(-\sigma \le X - \mu \le \sigma) = P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$ $= P\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \le Z \le \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) = P(-1 \le Z \le 1)$ $= P(Z \le 1) - P(Z \le -1) = P(Z \le 1) - (1 - P(Z \le 1))$ $= 2P(Z \le 1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6826$ ملحوظة: يمكن حل الأسئلة من 27 إلى 30 باستخدام القاعدة التجريبية بدلًا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

31

$$P(X>6)=\frac{1578}{10000}\Rightarrow P\left(Z>\frac{6-5}{\sigma}\right)=0.1578\Rightarrow P\left(Z>\frac{1}{\sigma}\right)=0.1578$$

نفرض أن $z=\frac{1}{\sigma}$ ، فيكون $P(Z>z)=0.1578$

الاحتمال المعطى (0.1578) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة.

$$\Rightarrow P(Z<z)=1-0.1578=0.8422$$

$$\Rightarrow z\approx 1\Rightarrow \sigma\approx 1$$

32

$$X\sim B(n,p)$$

$$E(X)=2.5\Rightarrow np=2.5\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$Var(X)=1.875\Rightarrow np(1-p)=1.875\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{(2)}{(1)}:1-p=\frac{1.875}{2.5}=0.75\Rightarrow p=0.25\quad,\quad n=\frac{2.5}{0.25}=10$$

$$\Rightarrow P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$$

$$=\binom{10}{8}(0.25)^8(0.75)^2+\binom{10}{9}(0.25)^9(0.75)^1+\binom{10}{10}(0.25)^{10}(0.75)^0$$

$$\approx 0.00038624+0.00002861+0.00000095\approx 0.0004158$$

33

ليكن T الزمن اللازم لاكتشاف العطل

ليكن N عدد مرات تشغيل السيارة التي يحتاجها الفنيون قبل اكتشاف العطل، فالزمن: $T=2(N-1)$

$$\Rightarrow T\sim N(10,25)$$

$$P(N>6)=P(T>10)=0.5$$

34

$$P(5\leq N<6)=P(8\leq T<10)=P\left(\frac{8-10}{5}\leq Z<\frac{10-10}{5}\right)$$

$$=P(-0.4\leq Z<0)=P(Z<0)-P(Z\leq -0.4)$$

$$=P(Z<0)-\big(1-P(Z<0.4)\big)=P(Z<0)+P(Z<0.4)-1$$

$$=0.5+0.6554-1=0.1554$$

35

$$P(T>20)=P\left(Z>\frac{20-10}{5}\right)=P(Z>2)=1-P(Z<2)$$

$$=1-0.9772=0.0228$$