إجابات كتاب الطالب للصف الثاني عشر العلمي / الفصل الدراسي الثاني

الوحدة السادسة: الإحصاء والاحتمالات

الدرس الأول: التوزيع الهندسي وتوزيع ذي الحدين

<table>
<tr><td colspan="2">مسألة اليوم صفحة 162</td></tr>
<tr><td></td><td>هذه التجربة هي تجربة احتمالية هندسية، لأنها تقوم على تكرار تجربة برنولي حتى التوصل لأول نجاح.
X عدد المحاولات للوصول إلى أول نجاح
$X \sim Geo(0.25)$
$\Rightarrow P(X=3) = (0.25)(0.75)^{3-1} = \frac{9}{64} \approx 0.14$</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 164</td></tr>
<tr><td>a</td><td>- لدينا ست محاولات مستقلة
- وفي كل محاولة، يمكن اعتبار ظهور الصورة نجاحًا $(p=\frac{1}{2})$ وظهور الكتابة فشلًا
- واحتمال النجاح ثابت في كل مرة
- لكن لا يتم التوقف عند أول نجاح، بل إنه يكمل 6 محاولات مهما كانت النتائج
لذلك لا تمثل هذه التجربة تجربة احتمالية هندسية.</td></tr>
<tr><td>b</td><td>- لدينا محاولات مستقلة يتم تكرارها (محاولة إصابة الهدف)
- في كل مرة يمكن اعتبار إصابة الهدف نجاحًا، وعدم إصابته فشلًا
- احتمال النجاح في كل مرة ثابت وهو $p=0.6$
- يتم التوقف عند أول نجاح
إذن هذه تجربة احتمالية هندسية لتحقق الشروط الأربعة.</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 166</td></tr>
<tr><td>a</td><td>- لدينا محاولات مستقلة يتم تكرارها (تدوير مؤشر القرص وملاحظة أين يقف)
- في كل محاولة يمكن اعتبار توقف المؤشر على اللون الأخضر نجاحًا، توقفه عند أي لون غير الأخضر فشلًا
- احتمال النجاح في كل مرة ثابت وهو $p=\frac{1}{4}$
- يتم التوقف عند أول نجاح
إذن هذه تجربة احتمالية هندسية لتحقق الشروط الأربعة.
X عدد المحاولات للوصول إلى أول نجاح
$X \sim Geo\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow P(X=3) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-1} = \frac{9}{64}$</td></tr>
</table>

b	$P(X \le 4) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$ $= \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^3$ $= \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \frac{27}{256} = \frac{175}{256} \approx 0.684$
c	$P(X > 3) = 1 - P(X \le 3)$ $= 1 - \big(P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)\big)$ $= 1 - \left(\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)$ $= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64}\right) = 1 - \frac{37}{64} = \frac{27}{64} \approx 0.422$
	أتحقق من فهمي صفحة 168
	بما أن الطفل يكرر فتح العلب حتى يصل إلى علبة فيها لعبة، فيمكن اعتبار X عدد المحاولات متغيرًا عشوائيًا هندسيًا، أي: $X \sim Geo\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$
	أتحقق من فهمي صفحة 169
a	- يتم تكرار إلقاء حجر النرد وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي، وهذه المحاولات مستقلة. - في كل محاولة يعدّ (النجاح) ظهور العدد (1) على الوجه العلوي، و (الفشل) ظهور أي عدد غير (1) على الوجه العلوي. - احتمال النجاح في كل مرة ثابت وهو $p = \frac{1}{6}$ - عدد المحاولات محدد سلفًا وهو 20 محاولة. إذن، هذه تجربة احتمالية ذات حدين، لتحقق الشروط الأربعة.
b	محاولات اختيار 7 من طلبة روضة غير مستقلة لأن احتمال اختير بنت غير ثابت في جميع المحاولات. إذن هذه ليست تجربة احتمالية ذات حدين.

أتحقق من فهمي صفحة 172	
a	لدينا تجربة عشوائية ذات حدين، وعدد مرات ظهور الرقم (1) على الوجه العلوي هو متغير عشوائي X ذو حدين، لأن: لدينا محاولات مستقلة متكررة (إلقاء حجر النرد) حيث (النجاح) هو ظهور الرقم (1) على الوجه العلوي (واحتماله ثابت $p=\frac{1}{6}$)، والفشل ظهور رقم غير (1)، وعدد المحاولات محدد سلفًا وهو $n=10$ $\Rightarrow X\sim B\left(10,\frac{1}{6}\right)$ $P(X=3)=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^{10-3}=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$ $=\frac{10\times 9\times 8}{6}\times\frac{5^7}{6^{10}}\approx 0.155$
b	التجربة العشوائية المذكورة هي ذات حدين، لأن هناك محاولات مستقلة متكررة (ضغط زر)، والنجاح هو الضغط على أحد أزرار العمليات الحسابية الأساسية ، والفشل هو الضغط على زر من باقي الأزرار، احتمال النجاح كل مرة ثابت وهو $p=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$، وعدد المحاولات محدد سلفًا هو $n=20$ ليكن X عدد مرات النجاح، $\Rightarrow X\sim B\left(20,\frac{1}{4}\right)$ $P(X=3)=\binom{20}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(1-\frac{1}{4}\right)^{20-3}=\binom{20}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{17}\approx 0.134$
c	التجربة المذكورة هي عشوائية ذات حدين، لأن لدينا محاولات مستقلة متكررة (إجراء العملية) واحتمال النجاح كل مرة ثابت هو $p=0.8$، وعدد المحاولات محدد سلفًا وهو $n=10$ ليكن X عدد مرات النجاح، $\Rightarrow X\sim B(10,0.8)$ $P(X\geq 7)=P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$ $=\binom{10}{7}(0.8)^7(0.2)^3+\binom{10}{8}(0.8)^8(0.2)^2+\binom{10}{9}(0.8)^9(0.2)^1+\binom{10}{10}(0.8)^{10}(0.2)^0$ $=0.201+0.302+0.268+0.107\approx 0.878$
أتحقق من فهمي صفحة 173	
	ليكن X عدد السيارات التي فيها عطل ضمن الألف سيارة، إذن، $X\sim B(1000,0.05)$ $E(X)=np=1000\times\frac{5}{100}=50$ إذن، يتوقع أن تكون في هذه الشحنة من السيارات خمسون سيارة بها هذا العطل الميكانيكي.

	أتحقق من فهمي صفحة 175
a	ليكن X عدد العينات التي لا تطابق المواصفات ضمن الـ 200 عينة التي اختارها المراقب أخيرًا. $\Rightarrow X \sim B\left(200, \frac{1}{50}\right)$ حيث اعتمدنا هنا $\frac{1}{50} = \frac{10}{500} = p$ بالاستناد إلى الاحتمال التجريبي لاختيار عينة غير مطابقة الحاصل في الـ 500 عينة الأولى. $E(X) = np = 200 \times \frac{1}{50} = 4$ لذا يتوقع وجود 4 عينات لا تطابق المواصفات ضمن هذه العينات الـ200
b	$Var(X) = np(1-p) = 200\left(\frac{1}{50}\right)\left(\frac{49}{50}\right) = 3.92$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 175
1	$P(X=2) = p(1-p)^{2-1} = (0.2)(0.8)^1 = 0.16$
2	$P(X=10) = p(1-p)^{10-1} = (0.2)(0.8)^9 \approx 0.027$
3	$P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - \big(P(X=1) + P(X=2)\big)$ $= 1 - \big((0.2)(0.8)^0 + (0.2)(0.8)^1\big)$ $= 1 - 0.36 = 0.64$
4	$P(2 < X \leq 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$ $= (0.2)(0.8)^2 + (0.2)(0.8)^3 + (0.2)(0.8)^4$ $= (0.2)(0.8)^2(1 + 0.8 + (0.8)^2)$ $= 0.2(0.64)(2.44) \approx 0.312$
5	$P(X<2) = P(X=1) = (0.2)(0.8)^0 = 0.2$
6	$P(X \leq 4) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$ $= (0.2)(0.8)^0 + (0.2)(0.8)^1 + (0.2)(0.8)^2 + (0.2)(0.8)^3$ ≈ 0.590
7	$P(1 \leq X < 2) = P(X=1) = (0.2)(0.8)^0 = 0.2$

8	$P(3 \le X \le 6) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$ $= (0.2)(0.8)^2 + (0.2)(0.8)^3 + (0.2)(0.8)^4 + (0.2)(0.8)^5$ ≈ 0.378
9	إذا كان X عدد مرات إلقاء الحجر حتى ظهور 7 لأول مرة، فإن: $X \sim Geo\left(\frac{1}{8}\right)$ $P(X=6) = \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{7}{8}\right)^5 = 0.064$
10	إذا كان X عدد مرات الإطلاق حتى أول إصابة، فإن: $X \sim Geo(0.7)$ $P(X=10) = (0.7)(0.3)^9 \approx 0.00001378 = 1.378 \times 10^{-5}$
11	إذا كان X عدد الخنافس التي نجمعها حتى نحصل على أول خنفساء برتقالية، فإن: $X \sim Geo\left(\frac{1}{12}\right)$ $P(X=20) = \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{11}{12}\right)^{19} \approx 0.016$
12	إذا كان X عدد محاولات تشغيل المحرك حتى يشتغل لأول مرة، فإن: $X \sim Geo(0.4)$ $P(t > 1) = P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - \big(P(X=1) + P(X=2)\big)$ $= 1 - \big((0.4)(0.6)^0 + (0.4)(0.6)^1\big)$ $= 1 - (0.4 + 0.24) = 1 - 0.64 = 0.36$
13	إذا كان X عدد المرضى الذين سيُعطون الدواء حتى تظهر أول أعراضٍ جانبية، فإن: $X \sim Geo\left(\frac{1}{4}\right)$ $P(X=10) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^9 \approx 0.019$

14	$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-\big(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\big)$ $=1-\left(\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^0+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^1+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)$ $=1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}\right)=1-\frac{37}{64}=\frac{27}{64}$
15	$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$ إذن، يتوقع تناول 4 مرضى لهذا الدواء حتى ظهور أول إصابة بأعراض الدواء الجانبية.
16	$P(X=2)=\binom{10}{2}(0.3)^2(0.7)^8\approx 0.233$
17	$P(X\ge 9)=P(X=9)+P(X=10)$ $=\binom{10}{9}(0.3)^9(0.7)^1+\binom{10}{10}(0.3)^{10}(0.7)^0\approx 0.000144\approx 0.000$
18	$P(X\le 8)=1-P(X>8)=1-\big(P(X=9)+P(X=10)\big)\approx 0.99985\approx 1$
19	$P(1<X\le 4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$ $=\binom{10}{2}(0.3)^2(0.7)^8+\binom{10}{3}(0.3)^3(0.7)^7+\binom{10}{4}(0.3)^4(0.7)^6$ $\approx 0.2334+0.2668+0.2001\approx 0.700$
20	$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-\big(P(X=0)+P(X=1)\big)$ $=1-\left(\binom{10}{0}(0.3)^0(0.7)^{10}+\binom{10}{1}(0.3)^1(0.7)^9\right)$ $\approx 1-(0.0282+0.1211)\approx 0.851$
21	$P(X<4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$ $=\binom{10}{0}(0.3)^0(0.7)^{10}+\binom{10}{1}(0.3)^1(0.7)^9+\binom{10}{2}(0.3)^2(0.7)^8+\binom{10}{3}(0.3)^3(0.7)^7$ $\approx 0.0282+0.1211+0.2334+0.2668\approx 0.650$

22	$P(0 \le X < 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$ $= \binom{10}{0}(0.3)^0(0.7)^{10} + \binom{10}{1}(0.3)^1(0.7)^9 + \binom{10}{2}(0.3)^2(0.7)^8$ $\approx 0.0282 + 0.1211 + 0.2334 \approx 0.383$
23	$P(3 \le X \le 6) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$ $= \binom{10}{3}(0.3)^3(0.7)^7 + \binom{10}{4}(0.3)^4(0.7)^6 + \binom{10}{5}(0.3)^5(0.7)^5 + \binom{10}{6}(0.3)^6(0.7)^4$ $\approx 0.0.2668 + 0.2001 + 0.1029 + 0.0368 \approx 0.607$
24	$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3}$
25	$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3}$
26	$E(X) = np = (5)(0.1) = 0.5$ $Var(X) = np(1-p) = (5)(0.1)(0.9) = 0.45$
27	$E(X) = np = (20)\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{15}{2} = 7.5$ $Var(X) = np(1-p) = (20)\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{75}{16}$
28	إذا كان X يدل على عدد الأعداد الزوجية التي ستظهر، فإن: $X \sim B\left(9, \frac{1}{2}\right)$ حيث أن احتمال النجاح كل مرة هو p حيث: $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $P(X=5) = \binom{9}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 126\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{126}{512} = \frac{63}{256} \approx 0.246$

29	إذا كان X يدل على عدد المرات التي يواجه الطيار فيها صعوبة في الرؤيا، فإن: $X \sim B\left(20, \frac{1}{4}\right)$ $P(X=3)=\binom{20}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{17} \approx 0.134$
30	$P(X \geq 3)=1-P(X<3)=1-\big(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\big)$ $=1-\left(\binom{20}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{20}+\binom{20}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{19}+\binom{20}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{18}\right)$ ≈ 0.909
31	$P(X=20)=\binom{20}{20}\left(\frac{1}{4}\right)^{20}\left(\frac{3}{4}\right)^{0}=\left(\frac{1}{4}\right)^{20}$
32	$E(X)=np=(20)\left(\frac{1}{4}\right)=5$ إذن، يتوقع أن يواجه الطيار صعوبة في الرؤيا 5 مرات.
33	$E(X)=1.4 \Rightarrow np=1.4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $Var(X)=1.12 \Rightarrow np(1-p)=1.12 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $\Rightarrow \frac{np(1-p)}{np}=\frac{1.12}{1.4}=\frac{4}{5} \Rightarrow 5-5p=4 \Rightarrow p=\frac{1}{5} \quad , \quad n=7$ $P(X \geq 6)=P(X=6)+P(X=7)=\binom{7}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^{6}\left(\frac{4}{5}\right)^{1}+\binom{7}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^{7}\left(\frac{4}{5}\right)^{0}$ $=28\left(\frac{1}{5}\right)^{7}+\left(\frac{1}{5}\right)^{7}=29\left(\frac{1}{5}\right)^{7}=\frac{29}{78125} \approx 0.0003712$
34	$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{4}{3} \Rightarrow p=\frac{3}{4}$

35	$P(X=10)=P(X=9)$ $\binom{21}{10}p^{10}(1-p)^{11}=\binom{21}{9}p^{9}(1-p)^{12}$ بقسمة الطرفين على $p^9(1-p)^{11}$ ينتج أن: $\binom{21}{10}p=\binom{21}{9}(1-p)$ $\frac{21!}{11!10!}p=\frac{21!}{12!9!}(1-p)\Rightarrow 12p=10(1-p)\Rightarrow 6p=5-5p\Rightarrow p=\frac{5}{11}$
36	إذا كان X يدل على عدد الأشخاص الذين يشترون المنتج، فإن: $X\sim B(10,0.1)$ $P(X=10)=\binom{10}{10}(0.1)^{10}(0.9)^{0}=(0.1)^{10}=10^{-10}$
37	ليكن R عائد المبيعات، إذن: $R=10X$ $P(R>80)=P(X>8)=P(X=9)+P(X=10)$ $=\binom{10}{9}(0.1)^{9}(0.9)^{1}+\binom{10}{10}(0.1)^{10}(0.9)^{0}$ $=(0.1)^{10}(10\times 9+1)=91\times 10^{-10}$
38	X متغير عشوائي هندسي. $\Rightarrow P(X=x)=p(1-p)^{x-1}$ $\Rightarrow P(X=3)=\frac{5}{11}\left(1-\frac{5}{11}\right)^{2}=\frac{180}{1331}$ أخطأت لانا في الأسّ الذي وضعته فوق القوس، فقاعدة حساب احتمال المتغير العشوائي الهندسي تحوي $(x-1)$ في الأسّ وليس x (أي المفروض أقل من قيمة x بواحد، وليس قيمة x المطلوبة ذاتها).

39	إذا كان X يدل على عدد مرات إرسال الرسالة إلى حين الرد عليها لأول مرة، فإن: $X \sim Geo(p)$ $P(X=2) = p(1-p)^1 = 0.21 \Rightarrow p^2 - p + 0.21 = 0$ $\Rightarrow (p-0.3)(p-0.7) = 0$ $\Rightarrow p = 0.3 \ \ ,or \ \ p = 0.7$ لكن احتمال الرد على الاستبانة في المرة الأولى أكبر من0.5 ، إذن $p = 0.7$ $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{7}{10}} = \frac{10}{7}$
40	ليكن X عدد الطلبة المولودين في شهر آذار، $X \sim B\left(25, \frac{31}{365}\right) = B(25, 0.085)$ وذلك لأن احتمال النجاح في كل مرة هو: $p = \frac{31}{356} \approx 0.085$ $P(X=1) = \binom{25}{1}(0.085)^1(0.915)^{24} \approx 0.252$
41	$P(X=3) = \binom{25}{3}(0.085)^3(0.915)^{22} \approx 0.200$
42	ليكن X عدد الطلبة المولودين في فصل الشتاء، $X \sim B(25, p) = B(25, 0.25)$ حيث p هو احتمال أن أي منهم مولود في فصل الشتاء: $p \approx \frac{1}{4}$ $P(X=2) = \binom{25}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{23} \approx 0.025$
43	$\mu = E(X) = np = 30(0.1) = 3$ $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{30(0.1)(0.9)} = \sqrt{2.7} \approx 1.643$ $P(\mu \le X < \mu + \sigma) = P(3 \le X < 4.693)$ $= P(X=3) + P(X=4)$ $= \binom{30}{3}(0.1)^3(0.9)^{27} + \binom{30}{4}(0.1)^4(0.9)^{26}$ $= 0.2361 + 0.1771 \approx 0.413$