اختبار نهاية الوحدة صفحة 158	
1	b
2	d
3	c
4	d
5	b
6	c
7	a
8	d
9	$\overrightarrow{BA} = \langle -3,1,-2 \rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{BA}\rvert = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$ $\overrightarrow{BC} = \langle -2,4,3 \rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -3(-2) + 1(4) - 2(3) = 4$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\lvert\overrightarrow{BA}\rvert\lvert\overrightarrow{BC}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{14} \times \sqrt{29}}\right) \approx 78.5°$
10	E, F, G على استقامة واحدة، إذن، $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{FG}$، ومنه: $\langle h-2, 5, -3 \rangle \parallel \langle 3-h, 5, k-1 \rangle$ إذن، يوجد عدد حقيقي مثل c بحيث: $\langle h-2, 5, -3 \rangle = c\langle 3-h, 5, k-1 \rangle$ $\Rightarrow 5c = 5 \Rightarrow c = 1$ $h - 2 = (3-h)c \Rightarrow h - 2 = 3 - h \Rightarrow h = \frac{5}{2}$ $(k-1)c = -3 \Rightarrow k - 1 = -3 \Rightarrow k = -2$

11	$\overrightarrow{AB} = \langle -2,-3,2\rangle$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3,-2,4\rangle + t\langle -2,-3,2\rangle$ $\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3-2t,-2-3t,4+2t\rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 3-2t,-2-3t,4+2t\rangle - \langle -4,5,-1\rangle = \langle 7-2t,-7-3t,5+2t\rangle$ $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ $\Rightarrow -2(7-2t)-3(-7-3t)+2(5+2t) = 0$ $\Rightarrow t = -1$ $\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3+2,-2+3,4-2\rangle = \langle 5,1,2\rangle \Rightarrow D(5,1,2)$
12	لإيجاد نقطة التقاطع، نساوي $\vec{\mathbf{r}}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيمة الوسيطين μ، وλ: $\langle -2-5\lambda,-5,9+7\lambda\rangle = \langle -3+2\mu,-17+4\mu,5-\mu\rangle$ $-17+4\mu = -5 \Rightarrow \mu = 3$ $-2-5\lambda = -3+2\mu \Rightarrow \lambda = -1$ وهاتان القيمتان تحققان المعادلة الثالثة الآتية: $9+7\lambda = 5-\mu$ $9+7(-1) = 5-3$ $2 = 2$ ✓ نجد نقطة تقاطعهما بتعويض $\lambda = -1$ في معادلة l_1 ، وهي النقطة $(3,-5,2)$
13	اتجاه المستقيم l_1 : $\vec{\mathbf{v}} = \langle -5,0,7\rangle$ اتجاه المستقيم l_2 : $\vec{\mathbf{u}} = \langle 2,4,-1\rangle$ $\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}} = -5(2)+0+7(-1) = -17$ $\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = \sqrt{25+0+49} = \sqrt{74}$ $\lvert\vec{\mathbf{u}}\rvert = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$ لتكن θ قياس الزاوية بين $\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}}$ إذن: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}}}{\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert\lvert\vec{\mathbf{u}}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{\sqrt{74}\times\sqrt{21}}\right) \approx 115.5^\circ$ فيكون قياس الزاوية الحادة بين l_1, l_2 هو α حيث: $\alpha = 180^\circ - 115.5^\circ = 64.5^\circ$

14	$\overrightarrow{AB} = \langle 2,-4,7\rangle$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 1,4,-5\rangle + t\langle 2,-4,7\rangle$
15	$\overrightarrow{AC} = \langle -5,-3,8\rangle$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 1,4,-5\rangle + u\langle -5,-3,8\rangle$
16	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{4+16+49} = \sqrt{69}$ $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{25+9+64} = \sqrt{98}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2(-5) - 4(-3) + 7(8) = 58$ $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\lvert\overrightarrow{AC}\rvert} = \frac{58}{\sqrt{69}\times\sqrt{98}} = \frac{58}{\sqrt{69\times 49\times 2}} = \frac{58}{7\sqrt{138}}$
17	$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{3364}{6762}} = \frac{\sqrt{3398}}{7\sqrt{138}}$ $Area(ABC) = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\times\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\sin\theta = \frac{1}{2}\times 7\sqrt{138}\times\frac{\sqrt{3398}}{7\sqrt{138}} = \frac{\sqrt{3398}}{2}$
18	V نقطة على l إذن يكون متجه موقعها: $\overrightarrow{OV} = \langle 3+4t, -25+5t, 13-t\rangle$ اتجاه l هو: $\vec{\mathbf{w}} = \langle 4,5,-1\rangle$ وبما أن $\overrightarrow{OV} \perp l$ إذن يكون: $\vec{\mathbf{w}}.\overrightarrow{OV} = 0$ ومنه: $4(3+4t) + 5(-25+5t) - 1(13-t) = 0 \Rightarrow t = 3$ $\Rightarrow \overrightarrow{OV} = \langle 3+12, -25+15, 13-3\rangle \Rightarrow V(15,-10,10)$

19	$\overrightarrow{EF} = \langle -2,3,-18 \rangle$ $\overrightarrow{GH} = \langle -14,-35,21 \rangle$ نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي k يحقق $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{GH}$ كون النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير متساوية، فالمستقيمان غير متوازيين. معادلة l_1 هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 7,6,34 \rangle + t\langle -2,3,-18 \rangle$ معادلة l_2 هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 1,21,-2 \rangle + u\langle -14,-35,21 \rangle$ نساوي $\vec{\mathbf{r}}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم t,u لمعرفة نقطة التقاطع: $\langle 7-2t, 6+3t, 34-18t \rangle = \langle 1-14u, 21-35u, -2+21u \rangle$ $7-2t = 1-14u \Rightarrow -2t+14u = -6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $6+3t = 21-35u \Rightarrow 3t+35u = 15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $34-18t = -2+21u \Rightarrow 18t+21u = 36 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$ $(1)\times 9+(3):\ u = -\frac{6}{49} \quad , \quad t = \frac{15}{7}$ $3\left(\frac{15}{7}\right) + 35\left(-\frac{6}{49}\right) = 2.14 \neq 15$ هذه القيم لا تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان ليسا متقاطعين ولا متوازيين، فهما متخالفان.

<table>
<tr><td>20</td><td>

$\overrightarrow{EF} = \langle 15,5,-15\rangle$

$\overrightarrow{GH} = \langle -6,-24,12\rangle$

بما أن النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير ثابتة، فإنه لا يوجد عدد حقيقي k حيث

$\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{GH}$ وهذا يعني أن المستقيمين غير متوازيين.

بتبسيط اتجاه $\overrightarrow{EF}$ بقسمته على 5 تكون معادلته: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -3,-5,16\rangle + t\langle 3,1,-3\rangle$

بتبسيط اتجاه $\overrightarrow{GH}$ بقسمته على 6 تكون معادلته: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 7,2,11\rangle + u\langle -1,-4,2\rangle$

نساوي $\vec{\mathbf{r}}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم t, u لمعرفة نقطة التقاطع:

$\langle -3+3t, -5+t, 16-3t\rangle = \langle 7-u, 2-4u, 11+2u\rangle$

$-3+3t = 7-u \Rightarrow 3t+u = 10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$-5+t = 2-4u \Rightarrow t+4u = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$16-3t = 11+2u \Rightarrow 3t+2u = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$(3)-(1): u = -5 \quad \Rightarrow t = 5$

لكن هذه القيم لا تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان ليسا متقاطعين ولا متوازيين، فهما متخالفان.

</td></tr>
<tr><td>21</td><td>

$AD = 2DE \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DE}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(-14\vec{\mathbf{b}}) = -7\vec{\mathbf{b}}$

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} = 7\vec{\mathbf{b}} + 5\vec{\mathbf{a}}$

$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = 21\vec{\mathbf{b}} + 15\vec{\mathbf{a}} = 3(7\vec{\mathbf{b}} + 5\vec{\mathbf{a}})$

$\Rightarrow \overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{EC}$

وهذا يعني أن $\overrightarrow{EB} \parallel \overrightarrow{EC}$

لكن المتجهين ينطلقان من النقطة E نفسها، إذن النقاط الثلاثة B, C, E تقع على استقامة واحدة.

</td></tr>
</table>