الدرس الثالث: الضرب القياسي

	مسألة اليوم صفحة 143
	اتجاه مسار الصاروخ الأول: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 8,11,20\rangle$ اتجاه مسار الصاروخ الثاني: $\vec{\mathbf{u}} = \langle 10,4,16\rangle$ $\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = \sqrt{64+121+400} = \sqrt{585} = 3\sqrt{65}$ $\lvert\mathbf{u}\rvert = \sqrt{100+16+256} = \sqrt{372} = 2\sqrt{93}$ $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = 8(10)+11(4)+20(16) = 80+44+320 = 444$ لتكن θ قياس الزاوية بين مساري الصاروخين، إذن: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert\lvert\mathbf{u}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{444}{3\sqrt{65}\times 2\sqrt{93}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{74}{\sqrt{6045}}\right) \approx 17.9^\circ$
	أتحقق من فهمي صفحة 144
a	$\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}} = 4(-3)+8(7)-3(2) = -12+56-6 = 38$
b	$\vec{\mathbf{m}}\cdot\vec{\mathbf{n}} = -3(-12)+5(6)-1(-8) = 36+30+8 = 74$
	أتحقق من فهمي صفحة 146
a	$\lvert\vec{\mathbf{u}}\rvert = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50}$ $\lvert\vec{\mathbf{w}}\rvert = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$ $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{w}} = -3(4)+5(2)-4(-3) = -12+10+12 = 10$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{w}}}{\lvert\vec{\mathbf{u}}\rvert\lvert\vec{\mathbf{w}}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{50}\times\sqrt{29}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{1450}}\right) \approx 74.8^\circ$

$|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{4+100+36} = \sqrt{140}$

$|\vec{\mathbf{w}}| = \sqrt{9+225+81} = \sqrt{315}$

$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 2(-3) - 10(15) + 6(9) = -6 - 150 - 54 = -210$

b

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{|\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{w}}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-210}{\sqrt{140} \times \sqrt{315}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-210}{\sqrt{44100}}\right)$$

$$= \cos^{-1}(-1) = 180°$$

ملحوظة: $\vec{\mathbf{u}} = -\frac{2}{3}\vec{\mathbf{w}}$ وبالتالي فإن اتجاهيهما متعاكسان، وقياس الزاوية بينهما $180°$

أتحقق من فهمي صفحة 147

اتجاه المستقيم l_1 هو $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, -5, -1 \rangle$ واتجاه المستقيم l_2هو $\vec{\mathbf{u}} = \langle 1,0,-3 \rangle$

$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$

$|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$

$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = 1(2) + 0(-5) - 3(-1) = 2 + 3 = 5$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{10} \times \sqrt{30}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{300}}\right) \approx 73°$$

إذن، قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1، و l_2 هو $73°$ تقريبًا.

أتحقق من فهمي صفحة 149

$\overrightarrow{GF} = \langle -1,4,6 \rangle$

$|\overrightarrow{GF}| = \sqrt{1+16+36} = \sqrt{53}$

$\overrightarrow{GE} = \langle -4,4,-2 \rangle$

$|\overrightarrow{GE}| = \sqrt{16+16+4} = 6$

$\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GE} = -1(-4) + 4(4) + 6(-2) = 4 + 16 - 12 = 8$

ليكن قياس الزاوية EGF هو θ ، إذن:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GE}}{|\overrightarrow{GF}||\overrightarrow{GE}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{8}{6\sqrt{53}}\right) \approx 79.4°$$

$$A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{GF}| \times |\overrightarrow{GE}| \sin\theta \approx \frac{1}{2} \times 6\sqrt{53} \sin 79.4° \approx 21.5$$

ويمكن إيجاد المساحة بإيجاد $\sin\theta$ من معرفتنا بقيمة $\cos\theta$ من دون إيجاد الزاوية θ كما يأتي:

$$\cos\theta = \frac{4}{3\sqrt{53}} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\sqrt{53}}\right)^2} = \sqrt{\frac{477-16}{477}} = \frac{\sqrt{461}}{3\sqrt{53}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{53} \times \frac{\sqrt{461}}{3\sqrt{53}} = \sqrt{461} \approx 21.5$$

أتحقق من فهمي صفحة 151

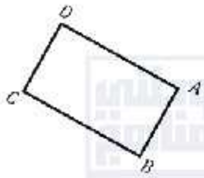
a	اتجاه المستقيم المعطى l هو: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 5,7,-3\rangle$ افرض أن مسقط النقطة P على l هو النقطة F، فيكون متجه موقعها هو: $\overrightarrow{OF} = (16+5t)\hat{\imath} + (11+7t)\hat{\jmath} - (3+3t)\hat{k}$ ويكون العمود من P على l هو $\overline{PF}$ حيث $\Rightarrow \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP} = (16+5t)\hat{\mathbf{i}} + (11+7t)\hat{\mathbf{j}} - (3+3t)\hat{\mathbf{k}} - (2\hat{\mathbf{i}} + \frac{10}{3}\hat{\mathbf{k}})$ $\overrightarrow{PF} = (14+5t)\hat{\mathbf{i}} + (11+7t)\hat{\mathbf{j}} - \left(\frac{19}{3} + 3t\right)\hat{\mathbf{k}}$ ولأن المتجهين $\overrightarrow{PF}$، و $\vec{\mathbf{v}}$ متعامدان فإن: $\overrightarrow{PF}.\vec{\mathbf{v}} = 0$ $\Rightarrow 5(14+5t) + 7(11+7t) - 3\left(-\frac{19}{3} - 3t\right) = 0 \Rightarrow t = -2$ $\Rightarrow \overrightarrow{OF} = \left(16+5(-2)\right)\hat{\imath} + \left(11+7(-2)\right)\hat{\mathbf{j}} - \left(3+3(-2)\right)\hat{\mathbf{k}} = 6\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ إذن، مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l هو النقطة F(6, -3, 3)
b	$PF = \sqrt{(6-2)^2 + (-3-0)^2 + \left(3 - \frac{10}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{226}}{3}$
	أتحقق من فهمي صفحة 154
a	$\overrightarrow{DE} = \langle 7,8,2\rangle$ $\lvert\overrightarrow{DE}\rvert = \sqrt{49+64+4} = \sqrt{117}$ $\overrightarrow{DB} = \langle 8,4,-8\rangle$ $\lvert\overrightarrow{DB}\rvert = \sqrt{64+16+64} = 12$ $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB} = 7(8) + 8(4) + 2(-8) = 72$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB}}{\lvert\overrightarrow{DE}\rvert\lvert\overrightarrow{DB}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{72}{12\sqrt{117}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{117}}\right) \approx 56.3°$

b	$AB=\sqrt{8^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{72}$ ارتفاع الهرم هو طول العمود المرسوم من الرأس E إلى قاعدته وهو EM، حيث M هي نقطة منتصف أحد قطري القاعدة المربعة: $M=(\frac{1+9}{2},\frac{1-7}{2},\frac{-1+3}{2})=(5,-3,1)$ $EM=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+(-6)^2}=9$ حجم الهرم يساوي ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه. $V=\frac{1}{3}(\sqrt{72})^2(9)=72(3)=216$ إذن، حجم الهرم يساوي 216 وحدة مكعبة.
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 154
1	$\vec{u}\cdot\vec{v}=5(7)-4(6)+3(-2)=5$
2	$\vec{u}\cdot\vec{v}=4(12)-8(9)-3(-8)=0$
3	$\vec{u}\cdot\vec{v}=-5(4)+9(6)+17(-2)=0$
4	$\vec{u}\cdot\vec{v}=1(3)-4(10)+12(-5)=-97$
5	$\lvert\vec{m}\rvert=\sqrt{16+4+25}=\sqrt{45}$ $\lvert\vec{n}\rvert=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$ $\vec{m}\cdot\vec{n}=4(3)-2(4)+5(-2)=-6$ $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\lvert\vec{m}\rvert\lvert\vec{n}\rvert}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{45}\times\sqrt{29}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{1305}}\right)=99.6^\circ$
6	$\lvert\vec{v}\rvert=\sqrt{9+4+81}=\sqrt{94}$ $\lvert\vec{w}\rvert=\sqrt{25+9+16}=\sqrt{50}$ $\vec{v}\cdot\vec{w}=3(5)-2(3)+9(-4)=-27$ $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\lvert\vec{v}\rvert\lvert\vec{w}\rvert}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-27}{\sqrt{94}\times\sqrt{50}}\right)\approx 113.2^\circ$

7	$\overrightarrow{AO} = \langle -3, -5, 4\rangle$ $\lvert\overrightarrow{AO}\rvert = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50}$ $\overrightarrow{AB} = \langle 4, -1, 1\rangle$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18}$ $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = -3(4) - 5(-1) + 4(1) = -3$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{\lvert\overrightarrow{AO}\rvert\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{50}\times\sqrt{18}}\right) = \cos^{-1}(-0.1) \approx 96°$
8	اتجاه المستقيم l_1 هو: $\vec{\mathbf{v}} = \langle -3-2, 5+1, 7-4\rangle = \langle -5, 6, 3\rangle$ اتجاه المستقيم l_2 هو: $\vec{\mathbf{w}} = \langle 1-6, 2+5, -1-3\rangle = \langle -5, 7, -4\rangle$ $\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = \sqrt{25+36+9} = \sqrt{70}$ $\lvert\vec{\mathbf{w}}\rvert = \sqrt{25+49+16} = \sqrt{90}$ $\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}} = -5(-5) + 6(7) + 3(-4) = 55$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{w}}}{\lvert\vec{\mathbf{u}}\rvert\lvert\vec{\mathbf{w}}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{55}{\sqrt{6300}}\right) \approx 46.1°$ إذن، قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1 ، و l_2 هو $46.1°$ تقريبًا.
9	اتجاه المستقيم الأول هو $\vec{\mathbf{v}} = \langle -6, q+5, 3\rangle$ واتجاه المستقيم الثاني هو $\vec{\mathbf{u}} = \langle 5, q-6, -4\rangle$ المستقيمان متعامدان، فاتجاهمها متعامدان، أي أنّ: $\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}} = 0$ $\Rightarrow -6(5) + (q+5)(q-6) + 3(-4) = 0$ $\Rightarrow q^2 - q - 72 = 0$ $\Rightarrow (q-9)(q+8) = 0$ $\Rightarrow q = 9$,or $q = -8$

10	لتكن A هي المسقط العمودي للنقطة P على المستقيم l ، فإن متجه موقعها هو: $\overrightarrow{OA} = \langle -t, 2+2t, -3+5t\rangle$ وإذا كان $\overrightarrow{AP}$ هو العمود من Pعلى المستقيم l، فإنّ: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AP} = \langle -2+t, 22-(2+2t), 5-(-3+5t)\rangle$ $= \langle -2+t, 20-2t, 8-5t\rangle$ بما أن $\overrightarrow{AP}$ يعامد l إذن: $\overrightarrow{AP}\cdot\langle -1,2,5\rangle = 0$ $\Rightarrow -1(-2+t)+2(20-2t)+5(8-5t)=0$ $\Rightarrow t = \frac{41}{15}$ $\Rightarrow \overrightarrow{OA} = \langle -\frac{41}{15}, \frac{112}{15}, \frac{32}{3}\rangle$ إذن، مسقط العمود من Pعلى المستقيم l هو $A\left(-\frac{41}{15}, \frac{112}{15}, \frac{32}{3}\right)$
11	$AP = \sqrt{\left(-2+\frac{41}{15}\right)^2 + \left(22-\frac{112}{15}\right)^2 + \left(5-\frac{32}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{54870}}{15} \approx 15.6$
12	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{16+81+1} = \sqrt{98}$ $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{81+1+16} = \sqrt{98}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 9(4)+1(9)+4(1) = 49$ ليكن θ قياس الزاوية BAC $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\lvert\overrightarrow{AC}\rvert}\right) = cos^{-1}\left(\frac{49}{\sqrt{98}\times\sqrt{98}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$ $Area = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\times\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{98}\times\sqrt{98}\sin 60° = \frac{49\sqrt{3}}{2}$

13	$\overrightarrow{AB} = \langle 1,4,-4\rangle \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1+16+16} = \sqrt{33}$ $\overrightarrow{AC} = \langle 3,-8,1\rangle \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+64+1} = \sqrt{74}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1(3)+4(-8)-4(1) = -33$ ليكن θ قياس الزاوية BAC $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-33}{\sqrt{33}\times\sqrt{74}}\right) = \cos^{-1}\left(-\sqrt{\frac{33}{74}}\right)$ $\cos\theta = -\sqrt{\frac{33}{74}} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\frac{33}{74}} = \sqrt{\frac{41}{74}}$ $Area = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{33}\times\sqrt{74}\sqrt{\frac{41}{74}} = \frac{\sqrt{1353}}{2} \approx 18.4$
14	$\vec{d} = \langle 8,3,6\rangle \quad ,\vec{F} = \langle 5,-3,1\rangle$ $W = \vec{F}.\vec{d} = 5(8)-3(3)+1(6) = 37J$
15	$\overrightarrow{RS} = \langle -16,8,12\rangle$ إذن، يمكن تبسيط اتجاه المستقيم l بقسمة $\overrightarrow{RS}$ على 4: $\mathbf{\vec{v}} = \langle -4,2,3\rangle$ معادلة المستقيم l هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 11,-9,11\rangle + t\langle -4,2,3\rangle$ النقطة Q هي المسقط العمودي للنقطة O على هذا المستقيم، فيكون متجه موقعها $\overrightarrow{OQ}$ هو: $\overrightarrow{OQ} = \langle 11-4t, -9+2t, 11+3t\rangle$ بما أن l و $\overrightarrow{OQ}$ متعامدان، فإن: $\overrightarrow{OQ}\cdot\mathbf{\vec{v}} = 0$ $\Rightarrow -4(11-4t)+2(-9+2t)+3(11+3t) = 0 \Rightarrow t = 1$ $\Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \langle 7,-7,14\rangle$

16	$\overrightarrow{OA} = \langle -4,13,22\rangle$,$\overrightarrow{OB} = \langle 4,17,14\rangle$,$\overrightarrow{OD} = \langle 2,-29,7\rangle$ $\overrightarrow{AD} = \langle 2+4,-29-13,7-22\rangle = \langle 6,-42,-15\rangle$ $\overrightarrow{AB} = \langle 4+4,17-13,14-22\rangle = \langle 8,4,-8\rangle$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6(8)-42(4)-15(-8) = 0$ إذن، $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$
17	ارسم شكل مستوي تقريبي يوضح المسألة (المهم ترتيب رؤوس المستطيل ABCD بالتوالي مع عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة) ، أينما كان موقع O، فإن:  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AD}$ $= \langle 4,17,14\rangle + \langle 6,-42,-15\rangle = \langle 10,-25,-1\rangle$ (ويمكن أيضًا إيجاد $\overrightarrow{OC}$ عبر الراس D من العلاقة: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AB}$)
18	$\lvert\overrightarrow{AD}\rvert = \sqrt{36+1764+225} = \sqrt{2025} = 45$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{64+16+64} = \sqrt{144} = 12$ $Area = (45)(12) = 540$ إذن، مساحة ABCD تساوي 540 وحدة مربعة.
19	مركز المستطيل هو نقطة تقاطع قطريه وهي نقطة منتصف كل من القطرين. نأخذ القطر $\overline{BD}$ ولتكن نقطة منتصفه E، فإن: $$E\left(\frac{4+2}{2},\frac{17-29}{2},\frac{14+7}{2}\right) = (3,-6,\frac{21}{2})$$ $$\Rightarrow \overrightarrow{OE} = \langle 3,-6,\frac{21}{2}\rangle$$

20	لإيجاد نقطة تقاطع l_1 و l_2 نساوي $\vec{\mathbf{r}}$ في معادلتيهما ونساوي الإحداثيات المتناظرة: $\langle -5+3t, 7+t, 1+4t\rangle = \langle 2+2u, 8, -1-3u\rangle$ $-5+3t = 2+2u \Rightarrow 3t-2u = 7 \ldots\ldots\ldots (1)$ $7+t = 8 \Rightarrow t = 1$ $1+4t = -1-3u \Rightarrow 4t+3u = -2 \ldots\ldots\ldots (2)$ بتعويض $t = 1$ في المعادلتين (1)، و(2) نجد أن $u = -2$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t = 1$ في معادلة l_1 $\vec{\mathbf{r}} = \langle -5+3(1), 7+1, 1+4(1)\rangle = \langle -2,8,5\rangle$ إذن نقطة تقاطع l_1 و l_2 هي $T(-2,8,5)$ F هو المسقط العمودي للنقطة T على l_3 ، إذن $\overrightarrow{OF} = \langle 3-v, 19+3v, 10+v\rangle$ $\overrightarrow{TF} = \langle 3-v-(-2), 19+3v-8, 10+v-5\rangle$ $= \langle 5-v, 11+3v, v+5\rangle$ اتجاه l_3 هو $\vec{\mathbf{w}} = \langle -1,3,1\rangle$ لكن $\overrightarrow{TF}$ يعامد l_3 إذن، $\overrightarrow{TF}\cdot\vec{\mathbf{w}} = 0$ $\Rightarrow -1(5-v)+3(11+3v)+1(v+5) = 0 \Rightarrow v = -3$ $\Rightarrow \overrightarrow{OF} = \langle 3-(-3), 19+3(-3), 10-3\rangle \Rightarrow F(6,10,7)$
21	$\overrightarrow{TF} = \langle -8,2,-2\rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{TF}\rvert = \sqrt{64+4+4} = 6\sqrt{2}$

22	$\overrightarrow{AB} = \langle 2,5,-1\rangle$ وهذا هو اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ اتجاه المستقيم l هو: $\vec{\mathbf{v}} = \langle -1,3,1\rangle$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$ $\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{\mathbf{v}} = 2(-1)+5(3)-1(1) = 12$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{30}\times\sqrt{11}}\right) \approx 48.7°$
23	بما أن A,B,C على استقامة واحدة، و AB=AC إذن، $A(3,-2,1)$ هي نقطة منتصف $\overline{BC}$ حيث : $C(x,y,z), B(5,3,0)$ $\Rightarrow \left(\frac{x+5}{2},\frac{y+3}{2},\frac{z+0}{2}\right) = (3,-2,1)$ $\Rightarrow \frac{x+5}{2} = 3 \Rightarrow x = 1$ $\frac{y+3}{2} = -2 \Rightarrow y = -7$ $\frac{z+0}{2} = 1 \Rightarrow z = 2$ إذن إحداثيات النقطة C هي: $(1,-7,2)$
24	متجه موقع أي نقطة على l_2 يكون $\vec{\mathbf{r}} = \langle 6-t, 11+3t, 7+2t\rangle$ حتى تقع Bعلى l_2 ينبغي وجود قيمة t تحقق المعادلة: $\langle 6-t, 11+3t, 7+2t\rangle = \langle 8,5,3\rangle$ $\Rightarrow 6-t = 8 \Rightarrow t = -2$ $11+3t = 5 \Rightarrow t = -2$ $7+2t = 3 \Rightarrow t = -2$ لهذه المعادلات الثلاث الحل نفسه$t = -2$ ، إذن، B تقع على المستقيم l_2 لأنها تنتج من تعويض $t = -2$ في معادلته.

25	اتجاه l_1 هو: $\overrightarrow{AB} = \langle 15,9,-6 \rangle$، ويمكن تبسيطه إلى $\vec{\mathbf{u}} = \langle 5,3,-2 \rangle$ اتجاه l_2 هو: $\vec{\mathbf{v}} = \langle -1,3,2 \rangle$ $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 5(-1) + 3(3) - 2(2) = 0$ إذن، المستقيمان l_1، و l_2 متعامدان.
26	بما أن المستقيمين l_1 و l_2 متعامدان، ونقطة التقائهما هي B (كونها واقعة على كل منهما مما سبق) إذن، $m\angle ABC = 90°$
27	المثلث ABC قائم في B. $AB = \sqrt{15^2 + 9^2 + (-6)^2} = \sqrt{342}$ $BC = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$ $Area = \frac{1}{2}(AB)(BC) = \frac{1}{2}\sqrt{342} \times 2\sqrt{14} = \sqrt{4788} \approx 69.2$ إذن، مساحة المثلث ABC تساوي 69.2 وحدة مربعة تقريبًا.
28	$\overrightarrow{AB} = \langle -8,2,3 \rangle \Longrightarrow \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{64+4+9} = \sqrt{77}$ $\overrightarrow{AC} = \langle 2,-4,1 \rangle \Longrightarrow \lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -8(2) + 2(-4) + 3(1) = -21$ ليكن θ قياس الزاوية BAC $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\lvert\overrightarrow{AC}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-21}{\sqrt{77} \times \sqrt{21}}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)$ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \Longrightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \frac{3}{11}} = \sqrt{\frac{8}{11}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$ $Area = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert \times \lvert\overrightarrow{AC}\rvert \sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{77} \times \sqrt{21} \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = 7\sqrt{6}$

29	$\overrightarrow{EA} = \langle 3,1,-2\rangle,\ \overrightarrow{ED} = \langle 9,9,18\rangle$ $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{ED} = 3(9)+1(9)-2(18)=0$ إذن، $\overrightarrow{EA}\perp\overrightarrow{ED}$ وقياس الزاوية AED هو $90°$
30	$\lvert\overrightarrow{DE}\rvert = \sqrt{81+81+324} = 9\sqrt{6}$ و يمثل ارتفاع الهرم h ، أما مساحة قاعدته فهي $A = 7\sqrt{6}$ وذلك من السؤال 28، إذن، حجم الهرم هو: $V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3}\times 7\sqrt{6}\times 9\sqrt{6} = 126$ إذن، حجم الهرم يساوي 126 وحدة مكعبة.
31	$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ وتكون قيمة n هي 5
32	$\overrightarrow{CA} = \langle -5,5,0\rangle \Longrightarrow \lvert\overrightarrow{CA}\rvert = \sqrt{25+25+0} = 5\sqrt{2}$ $\overrightarrow{CB} = \langle -3,2,6\rangle \Longrightarrow \lvert\overrightarrow{CB}\rvert = \sqrt{9+4+36} = 7$ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = -5(-3)+5(2)+0(6) = 25$ ليكن θ قياس الزاوية ACB $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\lvert\overrightarrow{AC}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{25}{35.\sqrt{2}}\right)$ $= \cos^{-1}\left(\frac{5}{7\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{14}\right)$
33	$\overrightarrow{AC} = \langle 5,-5,0\rangle$ ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم بالمتجه $\overrightarrow{AC}$ $\vec{\mathbf{v}} = \langle 1,-1,0\rangle$ وتكون معادلته: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 8,-4,-6\rangle + t\langle 1,-1,0\rangle$

34	$\overrightarrow{BD} = \langle 1,1,p\rangle$ ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{BD}$ بالمتجه $\vec{\mathbf{v}} = \langle 1,1,p\rangle$ معادلة $\overleftrightarrow{BD}$: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 5,-2,0\rangle + u\langle 1,1,p\rangle$ يتقاطع المستقيمان، إذن، يوجد u,t بحيث تتساوى لهما $\vec{\mathbf{r}}$ في المعادلتين: $\langle 8+t,-4-t,-6\rangle = \langle 5+u,-2+u,up\rangle$ $8+t = 5+u \Rightarrow t-u = -3 \dots\dots\dots (1)$ $-4-t = -2+u \Rightarrow t+u = -2 \dots\dots (2)$ $up = -6 \dots\dots\dots\dots (3)$ بجمع المعادلتين(1)و(2) ، نجد أنّ: $t = -\frac{5}{2}, u = \frac{1}{2}$ ثم بالتعويض في (3) نجد أنّ: $p = -12$ $D(6,-1,-12)$
35	$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \langle 2,-3,6\rangle \\ \overrightarrow{DC} = \langle 2,-3,6\rangle\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \dots\dots\dots\dots (1)$ $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC} = \langle 3,-2,-6\rangle \\ \overrightarrow{AD} = \langle 3,-2,-6\rangle\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \dots\dots\dots (2)$ من (1) و (2) ينتج ان الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع. والآن نجد طول $\overline{AB}$، و$\overline{AD}$: $AB = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$ $AD = \lvert\overrightarrow{AD}\rvert = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$ وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان فهو معين جميع أضلاعه متطابقة طول كل واحد منها 7 وحدات.
36	تم حل هذا السؤال في موضعه تحت عنوان "مسألة اليوم"

37	بما أن $\angle CDA$ قائمة، فالنقطة D هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ ، ويمكن إيجاد إحداثياتها كما يأتي: $\overrightarrow{AB} = \langle -2, -3, 5\rangle$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3, -2, 4\rangle + t\langle -2, -3, 5\rangle$ بما أنّ النقطة D تقع على $\overleftrightarrow{AB}$ فإن: $\overrightarrow{OD} = \langle 3-2t, -2-3t, 4+5t\rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 3-2t+4, -2-3t-5, 4+5t+1\rangle = \langle 7-2t, -7-3t, 5+5t\rangle$ $\overrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ $\Rightarrow -2(7-2t) - 3(-7-3t) + 5(5+5t) \Rightarrow t = -\frac{16}{19}$ $\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3 - 2\left(-\frac{16}{19}\right), -2 - 3\left(-\frac{16}{19}\right), 4 + 5\left(-\frac{16}{19}\right)\rangle = \langle \frac{89}{19}, \frac{10}{19}, \frac{-4}{19}\rangle$ إذن، إحداثيات D هي: $\left(\frac{89}{19}, \frac{10}{19}, \frac{-4}{19}\right)$
38	الزاوية RPQ هي الزاوية المحصورة بين المستقيمين l_1، و l_2 وتساوي الزاوية بين اتجاهيهما. اتجاه l_1 هو: $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ ، واتجاه l_2 هو: $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ $m\angle RPQ = \theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{u}}\|\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \frac{21 + 18 - 42}{\sqrt{49+9+36} \times \sqrt{9+36+49}}$ $= \frac{-3}{\sqrt{94} \times \sqrt{94}} = \frac{-3}{94}$

39

لإيجاد مساحة PQR يتعين معرفة متجهين يمثلان اثنين من أضلاعه، ولذا تلزمنا معرفة إحداثيات رؤوسه. الرأس P هو نقطة تقاطع المستقيمين l_1، و l_2، ونجدها بمساواة $\vec{\mathbf{r}}$ في المعادلتين ومساواة الإحداثيات المتناظرة:

$$\langle -8+7t, 16-3t, 1-6t\rangle = \langle -10+3u, 31-6u, -26+7u\rangle$$

$$\Rightarrow -8+7t = -10+3u \Rightarrow 7t-3u = -2 \dots\dots\dots (1)$$

$$16-3t = 31-6u \Rightarrow -3t+6u = 15 \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$1-6t = -26+7u \Rightarrow 7u+6t = 27 \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

بحل النظام نجد أنّ: $t = 1, u = 3$

لإيجاد إحداثيات P نعوض $t = 1$ في معادلة l_1:

$$\vec{\mathbf{r}} = \langle -8+7, 16-3, 1-6\rangle = \langle -1, 13, -5\rangle$$

$$\Rightarrow P(-1,13,-5)$$

نجد إحداثيات Q بتعويض $\boldsymbol{t = 3}$ في معادلة l_1:

$$\vec{\mathbf{r}} = \langle -8+21, 16-9, 1-18\rangle$$

$$\Rightarrow Q(13,7,-17)$$

النقطة R تقع على المستقيم l_2 ، فمتجه موقعها هو:

$$\langle -10+3u, 31-6u, -26+7u\rangle$$

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 13,7,-17\rangle - \langle -1,13,-5\rangle = \langle 14,-6,-12\rangle$$

$$\overrightarrow{PR} = \langle -10+3u, 31-6u, -26+7u\rangle - \langle -1,13,-5\rangle$$

$$= \langle -9+3u, 18-6u, -21+7u\rangle$$

$$PR = PQ \Rightarrow |\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PQ}|$$

$$\Rightarrow (-9+3u)^2 + (18-6u)^2 + (-21+7u)^2 = 14^2 + (-6)^2 + (-12)^2$$

$$94u^2 - 564u + 470 = 0 \Rightarrow u^2 - 6u + 5 = 0$$

$$\Rightarrow u = 1 \text{ أو } u = 5$$

لكن $u > 3$ ، فإذن $u = 5$، وتكون $R(5,1,9)$

لدينا: $R(5,1,9), Q(13,7,-17), P(-1,13,-5)$

$$|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{14^2 + (-6)^2 + (-12)^2} = \sqrt{376}$$

$$Area(PQR) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}| \times |\overrightarrow{PR}| \sin\theta$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{9}{94^2}} = \sqrt{\frac{8827}{8836}}$$

$$Area(PQR) = \frac{1}{2}\sqrt{376} \times \sqrt{376} \times \sqrt{\frac{8827}{8836}} = 2\sqrt{8827}$$

40	لتكن $H(x,y,z)$ $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} \qquad (\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE})$ $\langle x-8, y-3, z+2\rangle = \langle -2,-4,-4\rangle + \langle -10,10,-5\rangle + \langle -6,-3,6\rangle$ $\Rightarrow \langle x-8, y-3, z+2\rangle = \langle -18,3,-3\rangle$ $\Rightarrow x-8 = -18 \Rightarrow x = -10$ $y-3 = 3 \Rightarrow y = 6$ $z+2 = -3 \Rightarrow z = -5$ $\Rightarrow H(-10,6,-5)$ ملحوظة: توجد طرق أخرى للحل، منها التدرج بإيجاد إحداثيات A ثم E ثم H...
41	يمكن بالطرق الواردة في حل السؤال السابق إيجاد إحداثيات كل من C, G وإكمال الحل لحساب قياس الزاوية المطلوبة تقليديًا، هنا سنستفيد من حقيقة أن GC و AC متعامدان (أي أن ΔACG قائم في C) ليكن $m\angle GAC = \theta$ $\tan\theta = \dfrac{\lvert\overrightarrow{CG}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert} = \dfrac{\lvert\overrightarrow{AE}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\rvert} = \dfrac{\lvert\langle -6,-3,6\rangle\rvert}{\lvert\langle 2,4,4\rangle + \langle -10,10,-5\rangle\rvert} = \dfrac{\lvert\langle -6,-3,6\rangle\rvert}{\lvert\langle -8,14,-1\rangle\rvert}$ $= \dfrac{\sqrt{36+9+36}}{\sqrt{64+196+1}} = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{261}} = \dfrac{9}{3\sqrt{29}} = \dfrac{3}{\sqrt{29}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{29}} \approx 29.1°$

42	$\overrightarrow{XD} = \overrightarrow{XE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}$ $= \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$ $= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$ $= \langle -1,-2,-2\rangle - \langle -6,-3,6\rangle + \langle -10,10,-5\rangle$ $= \langle -5,11,-13\rangle$ $\Rightarrow \lvert\overrightarrow{XD}\rvert = \sqrt{25+121+169} = \sqrt{315}$ $\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}$ $= \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$ $= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$ $= \langle 1,2,2\rangle - \langle -6,-3,6\rangle + \langle -10,10,-5\rangle$ $= \langle -3,15,-9\rangle$ $\Rightarrow \lvert\overrightarrow{XD}\rvert = \sqrt{9+225+81} = \sqrt{315}$ $\overrightarrow{XD}\cdot\overrightarrow{XC} = -5(-3) + 11(15) - 13(-9) = 297$ $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{XD}\cdot\overrightarrow{XC}}{\lvert\overrightarrow{XD}\rvert\lvert\overrightarrow{XC}\rvert} = \frac{297}{315} = \frac{33}{35}$