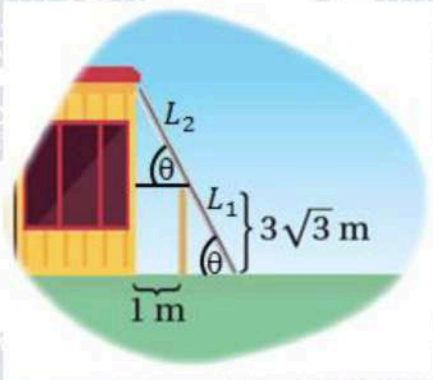
الدرس الثالث: تطبيقات القيم القصوى

مسألة اليوم صفحة 119

ليكن θ قياس الزاوية بين السلم والأرض، L طول السلم، كما في الشكل:



$$\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{L_1} \ , \cos\theta = \frac{1}{L_2} \ , 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$L = L_1 + L_2 = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{-3\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

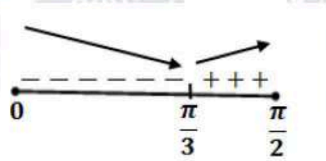
$$\frac{dL}{d\theta} = 0 \ \rightarrow 3\sqrt{3}\cos^3\theta = \sin^3\theta$$

$$\rightarrow \tan^3\theta = 3\sqrt{3} = \sqrt{3}^3$$

$$\rightarrow \tan\theta = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ قيمة حرجة وحيدة، نستخدم اختبار المشتقة الأولى وندرس إشارة $\frac{dL}{d\theta}$:



للاقتران L قيمة صغرى محلية عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$

إذن أقل طول ممكن للسلم هو $L\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = 6 + 2 = 8\ m$

أتحقق من فهمي صفحة 121

ليكن حجم الصندوق V ومساحة سطحه الكلية A

$$A = 4xh + x^2 = 1080 \quad \rightarrow h = \frac{1080 - x^2}{4x}$$
$$V = x^2 h$$
$$V(x) = x^2\left(\frac{1080 - x^2}{4x}\right) = \frac{1}{4}(1080x - x^3), \;\; 0 \le x \le \sqrt{1080}$$
$$V'(x) = \frac{1}{4}(1080 - 3x^2)$$
$$V'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{360}$$

القيمة الحرجة هي: $\sqrt{360}$

أجد حجم الصندوق عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال.

$$V(0) = 0$$
$$V(\sqrt{360}) = \frac{1}{4}(1080\sqrt{360} - 360\sqrt{360}) = 180\sqrt{360} = 1080\sqrt{10}$$
$$V(\sqrt{1080}) = 0$$

إذن يكون الحجم أكبر ما يمكن عندما $x = 6\sqrt{10}$ cm وعندها يكون الارتفاع $h = 3\sqrt{10}$ cm

أتحقق من فهمي صفحة 124

ليكن طول السياج L ومساحة الحظيرة A

$$A = xy = 245000 \quad \rightarrow y = \frac{245000}{x}$$
$$L = x + 2y$$
$$L(x) = x + \frac{490000}{x}, x > 0$$
$$L'(x) = 1 - \frac{490000}{x^2}$$
$$L'(x) = 0 \quad \rightarrow x = 700$$

قيمة x الحرجة هي: 700

$$L''(x) = \frac{980000}{x^3} \rightarrow \quad L''(700) = \frac{980000}{(700)^3} > 0$$

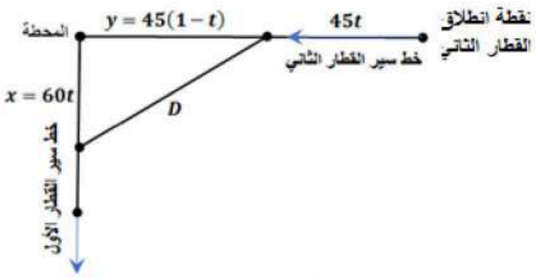
إذن، يكون طول سياج أقل ما يمكن عندما $x = 700$ m و $y = \frac{245000}{700} = 350$ m

أتحقق من فهمي صفحة 126

نفرض x بعد القطار الأول عن المحطة، y بعد القطار الثاني عن المحطة

ونفرض D البعد بين القطارين،

القطار الثاني استغرق ساعة واحدة للوصول إلى المحطة، إذن فقد انطلق من نقطة تبعد 45 كيلومترًا عنها،



بعد t ساعة من انطلاقهما يكون: $x = 60t$ ، ويكون $y = 45 - 45t = 45(1-t)$

$$D(t) = \sqrt{(60t)^2 + \left(45(1-t)\right)^2} = \sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2} \quad , 0 \le t \le 1$$

$$D'(t) = \frac{7200t - 4050(1-t)}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}} = \frac{11250t - 4050}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}}$$

$$D'(t) = 0 \quad \to t = \frac{4050}{11250} = \frac{9}{25}$$

القيمة الحرجة هي: $t = \frac{9}{25}$

أجد المسافة D عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال.

$$D(0) = \sqrt{2025} = 45$$

$$D(1) = \sqrt{3600} = 60$$

$$D\left(\frac{9}{25}\right) = \sqrt{3600\left(\frac{9}{25}\right)^2 + 2025\left(1 - \frac{9}{25}\right)^2} = 36$$

إذن يكون القطاران أقرب ما يمكن إلى بعضهما عندما $t = \frac{9}{25}\ h$ أي بعد 21 دقيقة و36 ثانية

وتكون الساعة حينئذ $10:21:36$

أتحقق من فهمي صفحة 128

ليكن سعر بيع الشاشة الواحدة هو x دينار
أي إن مقدار الخصم من سعر بيع الشاشة الواحدة هو $350 - x$ دينار
وبالتالي تحصل زيادة في عدد الشاشات المبيعة مقدارها $\frac{20}{10}(350 - x) = 700 - 2x$ شاشة
إذن عدد الشاشات المبيعة سيكون: $200 + 700 - 2x = 900 - 2x$
الإيراد= عدد الشاشات المبيعة × سعر بيع الشاشة الواحدة بعد الخصم:

$$R(x) = (900 - 2x)x = 900x - 2x^2$$
$$R'(x) = 900 - 4x$$
$$R'(x) = 0 \quad \rightarrow x = 225$$

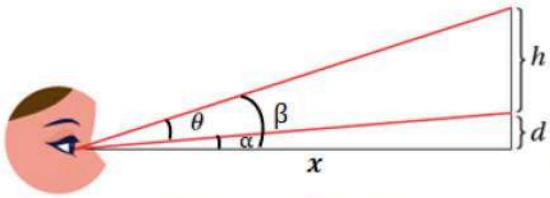
توجد قيمة حرجة وحيدة هي 225

$$R''(x) = -4 \quad \rightarrow \ R''(225) = -4 < 0$$

نلاحظ أن اقتران الإيراد له قيمة عظمى عندما $x = 225$
إذن يحقق المتجر أعلى إيراد ممكن عندما يكون سعر بيع الشاشة الواحدة هو 225 دينارًا

أتحقق من فهمي صفحة 129

نسمي الأبعاد وقياسات الزوايا كما في الشكل:



$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} = \frac{\frac{h+d}{x} - \frac{d}{x}}{1+\frac{d(h+d)}{x^2}} \quad , x > 0$$

$$\tan\theta = \frac{xh}{x^2+d(h+d)}$$

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dx} = \frac{\left(x^2+d(h+d)\right)(h) - xh(2x)}{\left(x^2+d(h+d)\right)^2}$$

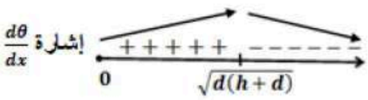
$$\frac{d\theta}{dx} = \cos^2 x \times \frac{\left(-x^2+d(h+d)\right)(h)}{(x^2+d(h+d))^2} = 0$$

بما أن $\theta < \frac{\pi}{2}$، فإن $\cos^2 x \neq 0$، إذن، $\left(-x^2+d(h+d)\right)(h) = 0$

$$x^2 = d(h+d) \;\rightarrow x = \sqrt{d(h+d)}$$

توجد قيمة حرجة وحيدة هي $x = \sqrt{d(h+d)}$

نستخدم اختبار المشتقة الأولى، وندرس إشارة $\frac{d\theta}{dx}$



أعوض $x = \sqrt{dh}$

$$\frac{d\theta}{dx} = \cos^2\sqrt{dh} \times \frac{(-dh+d(h+d))(h)}{(dh+d(h+d))^2}$$

$$= \cos^2\sqrt{dh} \times \frac{d^2h}{(dh+d(h+d))^2} > 0$$

أعوض $x = \sqrt{d(2h+d)}$

$$\frac{d\theta}{dx} = \cos^2\sqrt{d(2h+d)} \times \frac{(-d(2h+d)+d(h+d))(h)}{(dh+d(h+d))^2}$$

$$= \cos^2\sqrt{d(2h+d)} \times \frac{-dh^2}{(dh+d(h+d))^2} < 0$$

إذن يجب أن تبتعد سارة عن الجدار مسافة $\sqrt{d(h+d)}$ m لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يمكن

تحقق من فهمي صفحة 131

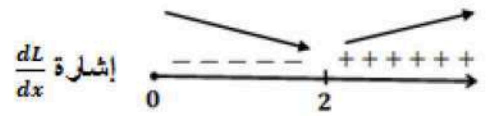
لتكن النقطة (x, y) على منحنى $f(x) = \sqrt{8x}$ ، ولتكن المسافة بينها وبين النقطة $(4, 2)$ هي L حيث:

$$L = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\sqrt{8x} - 2\right)^2}$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x - 4 + \left(\sqrt{8x} - 2\right)\left(\frac{4}{\sqrt{8x}}\right)}{\sqrt{(x-4)^2 + \left(\sqrt{8x} - 2\right)^2}} = \frac{x - \frac{8}{\sqrt{8x}}}{\sqrt{(x-4)^2 + \left(\sqrt{8x} - 2\right)^2}}$$

$$\frac{dL}{dx} = 0 \rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{8x}} \rightarrow x\sqrt{8x} = 8 \rightarrow 8x^3 = 64 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$$

نستخدم اختبار المشتقة الأولى وندرس إشارة $\frac{dL}{dx}$



إذن أقرب نقطة من نقاط المنحنى f للنقطة $(4, 2)$ هي: $(2, 4)$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 131

1 $V(x) = (12 - x)(9 - 2x)x = 2x^3 - 33x^2 + 108x$

2 حتى يتشكل لدينا صندوق، يجب أن تكون أبعاده كلها موجبة، وذلك بتحقق الشروط الثلاثة الآتية معًا:

$x > 0$ و $12 - x > 0$ و $9 - 2x > 0$ $\rightarrow$ $x > 0$ و $x < 12$ و $x < \frac{9}{2}$

أي أن مجال الاقتران $V(x)$ هو $\left(0, \frac{9}{2}\right)$

3

$V'(x) = 6x^2 - 66x + 108$

$V'(x) = 0 \rightarrow 6(x - 9)(x - 2) = 0 \rightarrow x = 9 \;, x = 2$

القيمة 9 خارج المجال، إذن تُهمل، فتكون القيمة الحرجة الوحيدة ضمن المجال هي $x = 2$

$V''(x) = 12x - 66$

$V''(2) = 12(2) - 66 = -42 < 0$

وعليه فإن حجم الصندوق يكون أكبر ما يمكن عندما تكون أبعاده: 2 m, 5 m, 10m،

ويكون حجمه عندئذ $V(2) = 100 \text{ m}^3$

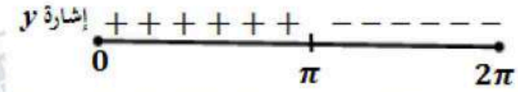
4	لتكن النقطة (x, y) على منحنى العلاقة $4x^2 + y^2 = 4$ ، ولتكن المسافة بينها وبين النقطة $(0, 1)$ هي L حيث: $L = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{\frac{4-y^2}{4} + y^2 - 2y + 1}$ $= \sqrt{\frac{3}{4}y^2 - 2y + 2} \quad , y \in [-2, 2]$ $\frac{dL}{dy} = \frac{\frac{3}{4}y - 1}{\sqrt{\frac{3}{4}y^2 - 2y + 2}}$ $\frac{dL}{dy} = 0 \to y = \frac{4}{3}$ إذن توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن مجال $L(y)$هي $y = \frac{4}{3}$ وبمقارنة $L\left(\frac{4}{3}\right)$، مع $L(-2)$، و$L(2)$ نجد أن $L\left(\frac{4}{3}\right)$ قيمة صغرى مطلقة لأن: $L(-2) = \sqrt{3+4+2} = 3$ $L(2) = \sqrt{3-4+2} = 1$ $L\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.82$ تكون L قيمة صغرى محلية ومطلقة عندما $y = \frac{4}{3}$، وتكون $x = \mp\sqrt{\frac{4-y^2}{4}} = \mp\sqrt{\frac{4-\frac{16}{9}}{4}} = \mp\frac{\sqrt{5}}{3}$ إذن أقرب نقطتين من نقاط المنحنى إلى النقطة $(0, 1)$ هما: $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right)$، و$\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right)$
5	المثلث قائم ومتطابق الضلعين، إذن قياس كل زاوية من زوايا قاعدته $\frac{\pi}{4}$ *ميل المستقيم* $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$ *وهو يمر بالنقطة* $A(1, 0)$ *معادلة* $\overleftrightarrow{AB}$ *هي:* $y - 0 = -1(x - 1) \to y = 1 - x$ *إذن، الإحداثي* y للنقطة P هو $1 - x$
6	مساحة المستطيل = طوله × عرضه $A = 2xy = 2x(1-x) = 2x - 2x^2 \quad , 0 < x < 1$

7	$A'(x) = 2 - 4x$ $A'(x) = 0 \rightarrow 2 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ $A(0) = A(1) = 0, \quad A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ للاقتران A قيمة عظمى مطلقة هي: $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ، إذن أكبر مساحة ممكنة للمستطيل هي $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.
8	الأبعاد التي تجعل مساحة المستطيل أكبر ما يمكن هي: الطول: $2x = 1$، والعرض: $y = 1 - x = \frac{1}{2}$
9	$s_1 = s_2 \rightarrow 2\sin t = \sin 2t \quad , t > 0$ $2\sin t - 2\sin t\cos t = 0$ $2\sin t\,(1 - \cos t) = 0$ $\sin t = 0 \quad or \quad \cos t = 1$ $t = n\pi$, حيث n عدد طبيعي

لتكن المسافة الرأسية بين الكتلتين y حيث:

$$y = |s_1 - s_2| = |2\sin t - \sin 2t|$$

لإعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة ندرس إشارة $(2\sin t - \sin 2t)$ على الفترة $[0, 2\pi]$



$$y = \begin{cases} 2\sin t - \sin 2t, & 0 \le t \le \pi \\ \sin 2t - 2\sin t, & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

❶ $y = 2\sin t - \sin 2t \quad , 0 \le t \le \pi$

$$y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t$$

$$y'(t) = 0 \rightarrow 2\cos t - 2\cos 2t = 0 \quad \rightarrow 2\cos t - 2(2\cos^2 t - 1) = 0$$

$$\rightarrow 2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$$

$$\rightarrow (2\cos t + 1)(\cos t - 1) = 0$$

$$\rightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \quad or \quad \cos t = 1$$

$$\rightarrow t = \frac{2\pi}{3}, t = 0$$

لإيجاد القيم القصوى نستطيع استخدام اختبار المشتقة الثانية:

$$y''(t) = -2\sin t + 4\sin 2t$$

$$y''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\sin\frac{2\pi}{3} + 4\sin 2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -3\sqrt{3} < 0$$

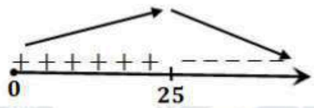
$$y(0) = 0$$

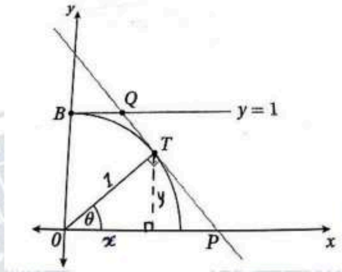
$$y(\pi) = 0$$

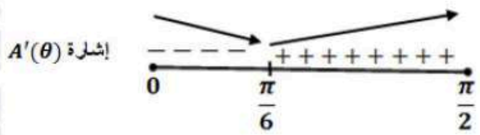
$$y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\,sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - sin\,2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

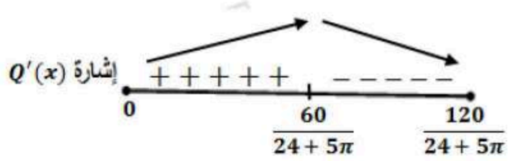
إذن أكبر قيمة لـ y في الفترة $[0, \pi]$ هي: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

10	❷ $y = \sin 2t - 2\sin t \quad ,\pi \le t \le 2\pi$ $y'(t) = 2\cos 2t - 2\cos t$ $y'(t) = 0 \quad \rightarrow 2\cos 2t - 2\cos t = 0 \quad \rightarrow 2(2\cos^2 t - 1) - 2\cos t = 0$ $\rightarrow 2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$ $\rightarrow (2\cos t + 1)(\cos t - 1) = 0$ $\rightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \quad or \quad \cos t = 1$ $\rightarrow t = \frac{4\pi}{3}, t = 2\pi$ لإيجاد القيم القصوى نستطيع استخدام اختبار المشتقة الثانية: $y''(t) = -4\sin 2t + 2\sin t$ $y''\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -4\sin\frac{8\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} - \sqrt{3} = -3\sqrt{3} < 0$ إذن، $y\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ قيمة عظمى $y(\pi) = 0$ $y(2\pi) = 0$ $y\left(\frac{4\pi}{3}\right) = sin\, 2\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 2sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ إذن أكبر قيمة لـ y في الفترة $[\pi, 2\pi]$ هي: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ إذن، قيم t التي تكون عندها المسافة بين الكتلتين أكبر ما يمكن هي: $t = \frac{2\pi}{3}, t = \frac{4\pi}{3}$
11	$R(x) = xp(x) = 150x - 0.5x^2$
12	$P(x) = R(x) - C(x) = 150x - 0.5x^2 - 4000 - 0.25x^2$ $= 150x - 0.75x^2 - 4000$

13	$P'(x) = 150 - 1.5x$ $P'(x) = 0 \ \rightarrow 150 - 1.5x = 0 \ \rightarrow x = 100$ $P''(x) = -1.5 \rightarrow P''(100) = -1.5 < 0$ إذن لتحقيق أكبر ربح ممكن يلزم بيع 100 بدلة، وتكون عندها قيمة الربح: $P(100) = 15000 - 7500 - 4000 = 3500\, JD$
14	عندما $x = 100$ ، فإن سعر البدلة الواحدة يساوي: $p(100) = 150 - 0.5(100) = 100\, JD$
15	ليكن عدد الأشجار التي ستُزرع في الفدان هو x شجرة حيث $x \geq 20$ إذن عدد الأشجار الزائدة على العشرين شجرة هو: $x - 20$ سينقص عدد الصناديق التي تنتجها كل شجرة بمقدار $(x - 20)$ صندوق ويكون عدد الصناديق التي تنتجها كل شجرة: $30 - (x - 20) = 50 - x$ سيكون اقتران الانتاج الكلي من الفدان:(عدد الأشجار×عدد الصناديق من كل شجرة) $N(x) = x(50 - x) = 50x - x^2$ $N'(x) = 50 - 2x$ $N'(x) = 0 \ \rightarrow 50 - 2x = 0 \rightarrow x = 25$ إشارة $N'(x)$  إذن يتحقق أكبر إنتاج عندما يتم زرع 25 شجرة في كل فدان.
16	ليكن L طول قوس القطاع الدائري المظلل، إذن: $P = r + r + L = 2r + r\theta = r(2 + \theta)$
17	لتكن A مساحة القطاع الدائري المظلل، إذن: $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ وبما أن $P = r(2 + \theta)$ فإن $\theta = \frac{P-2r}{r} = \frac{P}{r} - 2$ $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{P}{r} - 2\right) = \frac{1}{2}Pr - r^2$

18	$A'(r) = \frac{1}{2}P - 2r$ $A'(r) = 0 \ \rightarrow \frac{1}{2}P - 2r = 0 \ \rightarrow r = \frac{1}{4}P$ $A''(r) = -2 \rightarrow A''\left(\frac{1}{4}P\right) = -2 < 0$ تكون مساحة الحقل أكبر ما يمكن عندما $r = \frac{1}{4}P$
19	 $\sin\theta = \frac{y}{1} \ ,\cos\theta = \frac{x}{1} \ \ \rightarrow T(\cos\theta, \sin\theta)$ ميل OT يساوي $tan\,\theta$ لأن زاوية ميله θ ، ومنه فإن ميل TP يساوي $\frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{-1}{\tan\theta}$ لأنه يعامد OT معادلة TP : $y - \sin\theta = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}(x - \cos\theta) \ \ \rightarrow y\sin\theta - \sin^2\theta = -\cos\theta\,(x - \cos\theta)$ $\rightarrow y\sin\theta - \sin^2\theta = -x\cos\theta + \cos^2\theta$ $\rightarrow y\sin\theta + x\cos\theta = 1$

20	$A=\frac{1}{2}(OP+BQ)(OB)$ لإيجاد OP نضع y=0 في معادلة المستقيم TP فنجد أنّ : $0+x\cos\theta=1 \rightarrow x=\frac{1}{\cos\theta}=OP$ لإيجاد BQ نضع y=1 في معادلة المستقيم TP فنجد أنّ: $\sin\theta+x\cos\theta=1 \rightarrow x=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=BQ$ ومنه تكون مساحة شبه المنحرف هي: $A(\theta)=\frac{1}{2}(OP+BQ)(OB)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1)=\frac{2-\sin\theta}{2\cos\theta}$
21	$A'(\theta)=\frac{(2\cos\theta)(-\cos\theta)-(2-\sin\theta)(-2\sin\theta)}{4\cos^2\theta}=\frac{2\sin\theta-1}{2\cos^2\theta}$ $A'(\theta)=0 \ \rightarrow 2\sin\theta-1=0 \ \rightarrow \sin\theta=\frac{1}{2} \ \rightarrow \ \theta=\frac{\pi}{6}$  تكون مساحة شبه المنحرف أقل ما يمكن عندما $\theta=\frac{\pi}{6}$

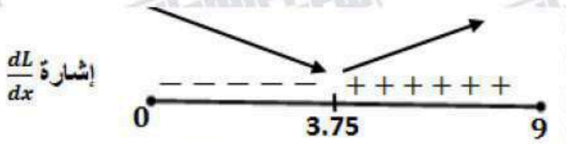
22	لتكن كمية الضوء المارّة خلال النافذة كاملة Q $Q = 3xy + \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 3xy + \frac{1}{8}\pi x^2$ محيط النافذة بالإضافة إلى القطعة الفاصلة بين الجزأين هو L $L = 2x + 2y + \pi\frac{x}{2} = 10 \quad \rightarrow y = 5 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x$ ومنه فإن كمية الضوء تصبح: $Q(x) = 3x\left(5 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x\right) + \frac{1}{8}\pi x^2 \quad ,0 \leq x \leq \frac{120}{24+5\pi}$ $= 15x - \left(3 + \frac{5\pi}{8}\right)x^2$  $Q'(x) = 15 - \left(6 + \frac{5\pi}{4}\right)x$ $Q'(x) = 0 \quad \rightarrow x = \frac{60}{24+5\pi}$ إذن تكون كمية الضوء المار خلال النافذة أكبر ما يمكن عندما: $x = \frac{60}{24+5\pi}$ ، $y = \frac{60+10\pi}{24+5\pi}$
23	$L = AE + EB = \sqrt{x^2+25} + \sqrt{(9-x)^2+49} \quad ,0 \leq x \leq 9$
24	$\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} + \frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2+49}}$ $\frac{dL}{dx} = 0 \quad \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} = \frac{9-x}{\sqrt{(9-x)^2+49}} \quad \rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$

25

من الفرع السابق، بما أن $\sin\alpha = \sin\beta$ ، والزاويتان α و β حادتان، إذن $\beta = \alpha$

ومنه فإن $\tan\alpha = \tan\beta$ أي:

$$\frac{x}{5} = \frac{9-x}{7} \quad \rightarrow 7x = 45 - 5x \quad \rightarrow 12x = 45 \quad \rightarrow x = \frac{15}{4} = 3.75$$



إذن قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يمكن هي 3.75 km

26

ليكن حجم العلبة V ومساحة سطحها الكلية مع الغطاء A وارتفاعها h

$$A = 2(\pi x^2) + 2\pi xh + 2\pi x = 80\pi \quad \rightarrow x^2 + (1+h)x = 40$$

$$\rightarrow h = \frac{40}{x} - x - 1$$

$$V = \pi x^2 h = \pi x^2\left(\frac{40}{x} - x - 1\right) = \pi(40x - x^3 - x^2)$$

$$\frac{dV}{dx} = \pi(40 - 3x^2 - 2x)$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad \rightarrow \pi(40 - 3x^2 - 2x) = 0$$

$$\rightarrow 3x^2 + 2x - 40 = 0$$

$$\rightarrow (3x-10)(x+4) = 0 \quad \rightarrow x = \frac{10}{3}$$

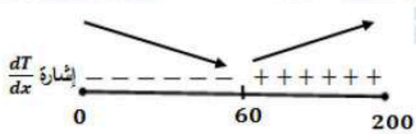
$$\frac{d^2V}{dx^2} = \pi(-6x - 2)$$

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=\frac{10}{3}} = -22\pi < 0$$

إذن قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يمكن هي $x = \frac{10}{3}$

27

$$V\left(\frac{10}{3}\right) = \pi\left(40\left(\frac{10}{3}\right) - \left(\frac{10}{3}\right)^3 - \left(\frac{10}{3}\right)^2\right) = \frac{2300}{27}\pi \text{ cm}^3$$

28	لتكن مساحة الغطاء الكلية A_c $A_c = \pi x^2 + 2\pi x(1) = \pi x(x+2)$ $A_c\left(\frac{10}{3}\right) = \pi\left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{10}{3}+2\right) = \frac{160\pi}{9}$ النسبة المئوية للجزء المستعمل لصنع الغطاء من مساحة الصفيحة هي: $\frac{A_c}{80\pi} \times 100\% = \frac{\frac{160\pi}{9}}{80\pi} \times 100\%$ $= \frac{200}{9}\% \approx 22.2\%$
29	$T = T_{AD} + T_{DC} = \frac{200-x}{10} + \frac{\sqrt{x^2+6400}}{6}$
30	$\frac{dT}{dx} = -\frac{1}{10} + \frac{x}{6\sqrt{x^2+6400}}$ $\frac{dT}{dx} = 0 \rightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2+6400}} = \frac{1}{10}$ $\rightarrow 10x = 6\sqrt{x^2+6400}$ $\rightarrow 25x^2 = 9(x^2+6400)$ $\rightarrow 16x^2 = 9(6400)$ $\rightarrow x = 60 \text{ m}$  إذن قيمة x التي يكون عندها الزمن T أقل ما يمكن هي: $x = 60 \text{ m}$

ليكن L طول AB ، النقاط A و B و P على استقامة واحدة، إذن المثلثان القائمان AQP,PRB متشابهان،

ينتج عن ذلك: $\frac{BR}{1}=\frac{8}{x} \rightarrow BR=\frac{8}{x}$

31

$$L=AP+PB=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{64+\left(\frac{8}{x}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{\frac{64x^2+64}{x^2}}$$

$$=\sqrt{1+x^2}+\frac{8}{x}\sqrt{1+x^2}$$

$$=\sqrt{1+x^2}\left(1+\frac{8}{x}\right) \quad ,x>0$$

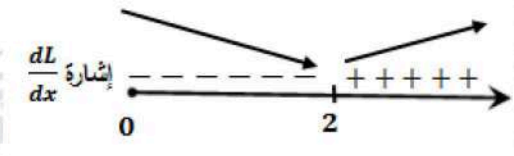
$$\frac{dL}{dx}=\sqrt{1+x^2}\left(-\frac{8}{x^2}\right)+\left(1+\frac{8}{x}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{-8\sqrt{1+x^2}}{x^2}+\frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

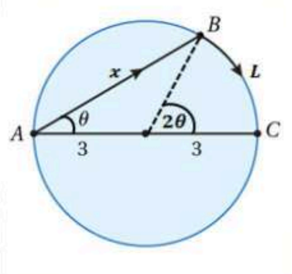
$$\frac{dL}{dx}=0 \rightarrow \frac{8\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\rightarrow 8(1+x^2)=8x^2+x^3$$

$$\rightarrow x^3=8 \rightarrow x=2$$



إذن قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن هي: $x=2$ km



المثلث ABC قائم الزاوية في B لأن الزاوية ABC محيطية على قطر، ومنه

فإن: $\cos\theta = \frac{x}{6}$

قياس الزاوية COB يساوي 2θ لأنها مركزية مشتركة مع المحيطية CAB

بالقوس نفسه.

ليكن الزمن الكلي الذي يحتاجه الرجل للوصول إلى النقطة C هو T

$$T = T_{A\to B} + T_{B\to C} = \frac{x}{3} + \frac{L}{6}$$

$$= \frac{6\cos\theta}{3} + \frac{3(2\theta)}{6} = 2\cos\theta + \theta \quad , 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

32 $$\frac{dT}{d\theta} = 1 - 2\sin\theta$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 0 \ \to \sin\theta = \frac{1}{2} \ \to \theta = \frac{\pi}{6}$$

نقارن الزمن عند النقطة الحرجة مع الزمن عند طرفي المجال وهما $0, \frac{\pi}{2}$

$$T(0) = 2 \text{ h}$$

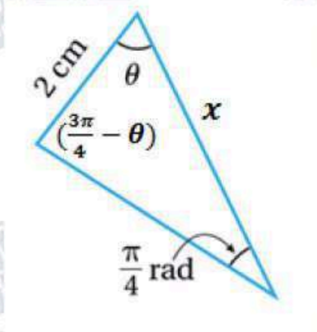
$$T\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 2.25 \text{ h}$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57 \text{ h}$$

إذن القيمة الصغرى للزمن تكون عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، أي عندما تنطبق B على A ويقطع الرجل القوس $\widehat{AB}$

كاملًا راكضًا على اليابسة دون تجديف في الماء.

33



ليكن طول الضلع الآخر من ضلعي الزاوية θ هو x، فيكون قياس الزاوية المقابلة له هو $(\pi - \theta - \frac{\pi}{4})$ أي $\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)$

ولتكن مساحة هذا المثلث A ، فإنّ: $A = \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin\theta$

وبتطبيق قانون الجيوب على هذا المثلث ينتج أن:

$$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{x}{\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)}$$

$$x = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{4}\sin\theta\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$$

$$= 2(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2(\cos\theta + \sin\theta) \times \sin\theta$$

$$= 2(\cos\theta + \sin\theta) \times \sin\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta + 1 - \cos^2\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 1$$

$$= \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$$

إذن، مساحة المثلث المعطى هي: $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$

34

المجال هو الفترة التي تكون فيها مساحة المثلث عددًا حقيقيًا موجبًا وهو هنا الفترة $(0, \frac{3\pi}{4})$ التي طرفاها جذري اقتران المساحة لأن المساحة عند هذين الحدين تكون صفرًا وعند أي عدد بينهما تكون عددًا موجبًا،

فإذا كانت $\theta = \frac{\pi}{6}$، **تكون مساحة المثلث:**

$$A = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 1 \approx 1.37 > 0$$

35	$A'(\theta)=2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta = 0$ $2\sin 2\theta = -2\cos 2\theta$ $\tan 2\theta = -1 \rightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{4} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{8}$ توجد قيم حرجة وحيدة ضمن مجال الاقتران هي $\theta = \frac{3\pi}{8}$ لذلك نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال. $A(0) = \sin 0 - \cos 0 + 1 = 0$ $A\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2} + 1$ $A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} - \cos\frac{3\pi}{2} + 1 = -1 - 0 + 1 = 0$ إذن، أكبر قيمة ممكنة (العظمى المطلقة) لمساحة المثلث هي : $A\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2} + 1 = 1 + \sqrt{2}$