الدرس الثاني: القيم القصوى والتقعر

مسألة اليوم صفحة 93	
	$C(t) = 3.95 + 8(1.5e^{-0.4t-1} - e^{-0.6t})$ المطلوب هو قيمة t التي يكون عندها للاقتران $C(t)$ قيمة عظمى مطلقة في $[0, 12]$، لذا نجد القيم الحرجة: $C'(t) = 8(-0.6e^{-0.4t-1} + 0.6e^{-0.6t}) = 0 \rightarrow e^{-0.4t-1} = e^{-0.6t}$ $\rightarrow 0.4t + 1 = 0.6t$ $\rightarrow t = 5$ توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن مجال الاقتران هي $t = 5$ نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي مجاله باستخدام الآلة الحاسبة: $C(0) = 3.59 + 8\left(1.5e^{-0.4(0)-1} - e^{-0.6(0)}\right) \approx 0.005$ $C(5) = 3.59 + 8\left(1.5e^{-0.4(5)-1} - e^{-0.6(5)}\right) \approx 3.79$ $C(12) = 3.59 + 8\left(1.5e^{-0.4(12)-1} - e^{-0.6(12)}\right) \approx 3.62$ وبما أن $C(5)$ هو أكبر هذه القيم فإن تركيز الدواء يكون أكبر ما يمكن بعد 5 ساعات من تناوله.
أتحقق من فهمي صفحة 96	
a	ليس للاقتران f قيم قصوى مطلقة للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$ وله قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ هي $f(2) = -4$
b	للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 1$ و $x = -1$ هي $f(\pm1) = 1$ وله قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

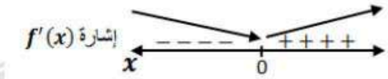
أتحقق من فهمي صفحة 102	
a	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$ $f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \rightarrow 3x(x-4) = 0 \rightarrow x = 0, x = 4$ وتكون قيم x الحرجة هي: $x = 0, x = 4,$ نقارن قيم الاقتران عند النقط الحرجة وعند طرفي مجاله $f(-3) = -27 - 54 + 5 = -76, f(0) = 5$ $f(4) = 64 - 96 + 5 = -27, f(5) = 125 - 150 + 5 = -20$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -3$ هي $f(-3) = -76$ وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 5$
b	$f(x) = x^{\frac{1}{3}}, \quad [-8, 8]$ $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $f'(x)$ لا تساوي صفرًا لأي قيمة في $(-8, 8)$، وهي غير موجودة عند $x = 0$ وهذه هي القيمة الحرجة فقط. $f(-8) = -2$ $f(0) = 0$ $f(8) = 2$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -8$ هي $f(-8) = -2$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x = 2$ هي $f(8) = 2$

	$f(x) = \sin^2 x + \cos x, \qquad [0, 2\pi]$
	أجد القيم الحرجة في الفترة $(0,\ 2\pi)$
	$f'(x) = 2\sin x \cos x - \sin x = 0 \rightarrow \sin x\,(2\cos x - 1) = 0$
	$\rightarrow \sin x = 0 \quad or \quad \cos x = \frac{1}{2}$
	$\rightarrow x = \pi, or\ x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$
	وتكون قيم x الحرجة هي: $x = \pi, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$
	أجد قيم الاقتران عند القيم الحرجة وطرفي مجاله
c	$f(0) = 1$
	$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$
	$f(\pi) = -1$
	$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$
	$f(2\pi) = 1$
	للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = \pi$ هي $f(\pi) = -1$
	وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$ هي $\frac{5}{4}$

أتحقق من فهمي صفحة 105

$f(x) = (x-1)e^x$

$f'(x) = (x-1)e^x + e^x = 0 \rightarrow xe^x = 0 \rightarrow x = 0$



للاقتران قيمة حرجة وحيدة هي $x = 0$

بما أن إشارة المشتقة الأولى تغيرت من السالب إلى الموجب عند هذه القيمة، لذا يكون للاقتران قيمة صغرى محلية هي: $f(0) = -1$

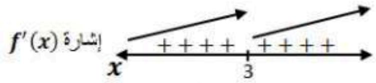
أتحقق من فهمي صفحة 106

$f(x) = \sqrt[3]{x-3} = (x-3)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x-3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$

$f'(x)$ لا تساوي صفرًا لأي عدد حقيقي x ، لكن $f'(x)$ غير موجودة عند $x = 3$

إذن القيمة الحرجة الوحيدة هي $x = 3$



الاقتران f متزايد على R ولا يوجد له قيم قصوى محلية ولا مطلقة. النقطة (3, 0) نقطة حرجة لكنها ليست نقطة قيمة قصوى لعدم تغير إشارة المشتقة حولها.

أتحقق من فهمي صفحة 111

a

$$f(x) = (x-2)^3(x-1)$$

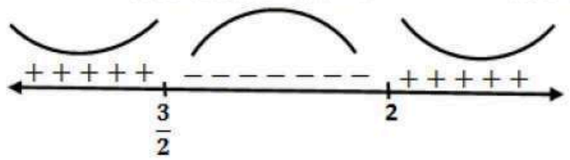
$$f'(x) = (x-2)^3 + 3(x-1)(x-2)^2$$

$$f''(x) = 3(x-2)^2 + 6(x-1)(x-2) + 3(x-2)^2$$

$$= 3(x-2)\big((x-2) + 2(x-1) + (x-2)\big)$$

$$= 3(x-2)(4x-6) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \ \ or \ \ x = \frac{3}{2}$$

إشارة $f''(x)$



إذن منحنى $f(x)$ مقعر للأعلى في $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ و $(2,\infty)$، ومقعر للأسفل في $\left(\frac{3}{2},2\right)$

وله نقطتا انعطاف هما $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{16}\right)$ و $(2,0)$

b

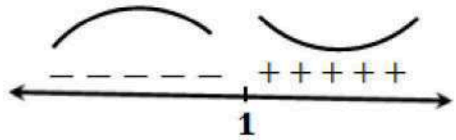
$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$f''(x)$ لا تساوي صفرًا لأي عدد حقيقي x ، لكن $f''(x)$ غير موجودة عند $x = 1$

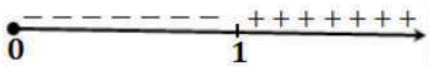
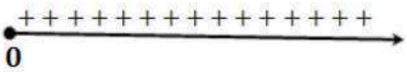
إشارة $f''(x)$



إذن منحنى $f(x)$ مقعر للأعلى في $(-\infty,1)$، ومقعر للأسفل في $(1,\infty)$

ولا توجد نقاط انعطاف مع أن المنحنى غيّر من اتجاه تقعره عند $x = 1$ وذلك لأنها خارج مجال $f(x)$

أتحقق من فهمي صفحة113

	$f(x) = xe^x$ $f'(x) = xe^x + e^x = 0 \ \rightarrow e^x(x+1) = 0 \ \rightarrow x = -1$ القيمة الحرجة هي $x = -1$ $f''(x) = xe^x + e^x + e^x = e^x(x+2)$ $f''(-1) = e^{-1} > 0$ إذن توجد قيمة صغرى محلية للاقتران f هي $f(-1) = -e^{-1}$
	أتحقق من فهمي صفحة115
a	$s(t) = t^3 - 3t + 3 \ , t \geq 0$ $v(t) = 3t^2 - 3 = 0 \ \ \rightarrow t = 1$ إشارة $v(t)$  يتحرك الجسم في الاتجاه السالب في الفترة $(0, 1)$ يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب في الفترة $(1, \infty)$
b	$a(t) = 6t = 0 \ \ \rightarrow t = 0$ إشارة $a(t)$  تكون سرعة الجسم متزايدة في الفترة $(0, \infty)$ ولا تتناقص أبدًا

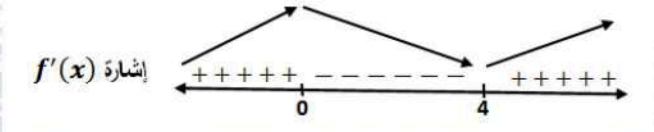
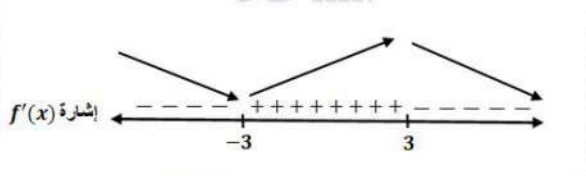
أتدرب وأحل المسائل صفحة 115	
1	قيم x الحرجة هي: $x = 3$(المشتقة عندها غير موجودة) ، ولا توجد قيم تكون عندها $f'(x) = 0$ توجد قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$ توجد قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 3$ هي $f(3) = 3.5$
2	ألاحظ أن المشتقة تساوي صفرًا عند $x = 3$، و$x = 6$، وأنها غير موجودة عند $x = 4$، إذن توجد 3 قيم حرجة هي $x = 3$، و$x = 4$، و$x = 6$ توجد قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = 4$ هي $g(4) = 1$ توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 3$ هي $g(3) = 4$ ، وعند $x = 6$ هي$g(6) = 3$ لا توجد قيمة عظمى مطلقة
3	قيم x الحرجة هي: $x = 1, x = 2$ (المشتقة عندهما غير موجودة) توجد قيمة صغرى مطلقة هي $f(-1) = -2$ توجد قيمة عظمى مطلقة هي $f(3) = 3$ لا توجد قيم قصوى محلية
4	$f(x) = 1 + 6x - 3x^2, \quad [0,4]$ $f'(x) = 6 - 6x = 0 \rightarrow x = 1$ وتكون قيم x الحرجة هي: $x = 1$ $f(0) = 1$ $f(1) = 4$ $f(4) = -23$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 4$ هي $f(4) = -23$ وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 1$ هي $f(1) = 4$

5	$f(x) = (x+3)^{\frac{2}{3}} - 5, \quad [-3, 3]$ $f'(x) = \frac{2}{3}(x+3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+3}}$ $f'(x)$ لا تساوي صفرًا لأي قيمة في الفترة $(-3, 3)$، وهي غير موجودة عند $x = -3$ ولا توجد قيم حرجة في الفترة $(-3, 3)$. $f(-3) = -5$ $f(3) = \sqrt[3]{36} - 5$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -3$ هي $f(-3) = -5$ للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 3$ هي $f(3) = \sqrt[3]{36} - 5 \approx -1.7$
6	$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad [-2, 2]$ $f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$ القيم الحرجة هي: $x = 0$ $f(-2) = \frac{4}{5}$ $f(0) = 0$ $f(2) = \frac{4}{5}$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x = 2$ و $x = -2$ هي $\frac{4}{5}$

7	$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}, \quad [8,64]$ $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $f'(x)$ موجودة ولا تساوي صفرًا لأي عدد x،وهي موجبة لجميع قيم x في $(8, 64)$، و $f(x)$ متزايد $f(8)=2$ $f(64)=8$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=8$ هي $f(8)=2$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x=64$ هي $f(64)=8$
8	$f(x)=2\cos x+\sin 2x, \quad \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $f'(x)=-2\sin x+2\cos 2x=-2\sin x+2(1-2\sin^2 x)=0$ $\rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0$ $\rightarrow (2\sin x-1)(\sin x+1)=0$ $\rightarrow \sin x=\frac{1}{2} \quad or \ \sin x=-1 \rightarrow x=\frac{\pi}{6}$ القيمة الحرجة في الفترة $(0,\frac{\pi}{2})$هي $x=\frac{\pi}{6}$ $f(0)=2$ $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=\frac{\pi}{2}$ هي $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x=\frac{\pi}{6}$ هي $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2.6$

9	$f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}, \quad [0,3]$ $f'(x) = \dfrac{(1+x^2)e^x - 2xe^x}{(1+x^2)^2} = 0 \to e^x(x^2-2x+1) = 0$ $\to e^x(x-1)^2 = 0 \to x = 1$ القيم الحرجة هي $x = 1$ $f(0) = 1$ $f(1) = \dfrac{1}{2}e$ $f(3) = \dfrac{1}{10}e^3$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 1$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x = 3$ هي $f(3) = \frac{1}{10}e^3 \approx 2.0$
10	$f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}, \quad \left[\dfrac{1}{2}, 4\right]$ $f'(x) = \dfrac{(x^2)\left(\frac{1}{x}\right) - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{1-2\ln x}{x^3} = 0 \to \ln x = \dfrac{1}{2} \to x = \sqrt{e}$ القيمة الحرجة هي $x = \sqrt{e}$ $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -4\ln 2 \approx -2.8$ $f(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2e} \approx 0.18$ $f(4) = \dfrac{1}{16}\ln 4 = \dfrac{1}{8}\ln 2 \approx 0.09$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = \frac{1}{2}$ هي $f\left(\frac{1}{2}\right) = -4\ln 2 \approx -2.8$ للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = \sqrt{e}$ هي $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e} \approx 0.18$

11	$f(x) = \sec x, \quad \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ $f'(x) = \sec x \tan x = 0$ بما أن $\sec x \neq 0$ فإن $\tan x = 0$، ومنها $x = 0$ القيمة الحرجة هي $x = 0$ $f(0) = \frac{1}{\cos(0)} = 1$ $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\cos(-\frac{\pi}{6})} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.15$ $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})} = 2$ للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 1$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x = \frac{\pi}{3}$ هي $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$
12	$f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad [-2, 2]$ $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$ القيمة الحرجة هي $x = 0$ $f(-2) = 0$ $f(0) = 2$ $f(2) = 0$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -2, x = 2$ هي 0 للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 2$

13	$f(x) = x^3 - 6x^2 - 135$ $f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \rightarrow 3x(x-4) = 0 \rightarrow x = 0 \ or \ x = 4$ القيم الحرجة هي $x = 0, x = 4$  f متزايد على $(-\infty, 0), (4, \infty)$ f متناقص على $(0, 4)$ له قيمة عظمى محلية هي $f(0) = -135$ له قيمة صغرى محلية هي $f(4) = -167$
14	$f(x) = \dfrac{2x}{x^2+9}$ $f'(x) = \dfrac{(x^2+9)(2) - (2x)(2x)}{(x^2+9)^2} = 0 \rightarrow \dfrac{18 - 2x^2}{(x^2+9)^2} = 0 \rightarrow x = 3 \ or \ x = -3$ القيم الحرجة هي $x = 3, x = -3$  f متناقص على $(-\infty, -3), (3, \infty)$ f متزايد على $(-3, 3)$ له قيمة عظمى محلية هي $f(3) = \frac{1}{3}$ له قيمة صغرى محلية هي $f(-3) = -\frac{1}{3}$

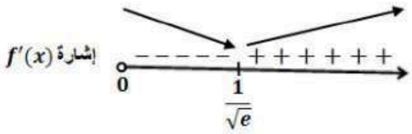
15

$f(x) = x^2 \ln x \;, \qquad x > 0$

$f'(x) = (x^2)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(2x) = 0 \rightarrow x(1 + 2\ln x) = 0$

$\rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

القيمة الحرجة هي $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$



f متزايد على $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$

f متناقص على $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

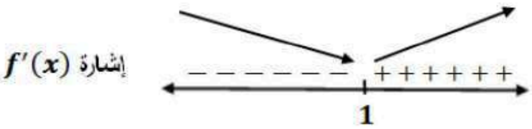
له قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$

16

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

$f'(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = 0 \quad \rightarrow x = 1$

القيمة الحرجة هي $x = 1$



f متزايد على $(1, \infty)$

f متناقص على $(-\infty, 1)$

له قيمة صغرى محلية هي $f(1) = 1$

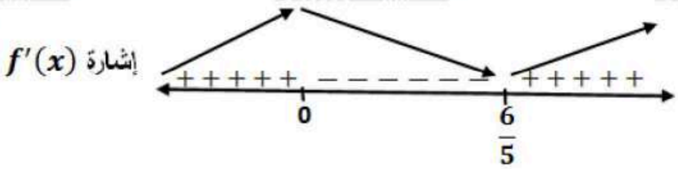
<table>
<tr>
<td>17</td>
<td>

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-3) = x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \to 5x - 6 = 0 \to x = \frac{6}{5}$

وكذلك $f'(x)$ غير موجودة عند $x = 0$

يوجد له قيمتان حرجتان هما $x = 0$، و $x = \frac{6}{5}$



f متزايد على $(-\infty, 0)$, $\left(\frac{6}{5}, \infty\right)$

f متناقص على $\left(0, \frac{6}{5}\right)$

له قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{6}{5}\right) = -\frac{9}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

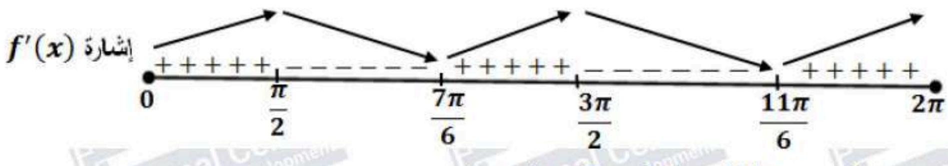
له قيمة عظمى محلية هي $f(0) = 0$

</td>
</tr>
<tr>
<td>18</td>
<td>

$f(x) = \sin^2 x + \sin x, [0, 2\pi]$

$f'(x) = 2\cos x \sin x + \cos x = \cos x\,(2\sin x + 1) = 0$

$\to \cos x = 0 \text{ or } \sin x = -\frac{1}{2} \to x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$



f متزايد على $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$

f متناقص على $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$

له قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}, f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$

له قيمتان عظميان محليتان هما $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

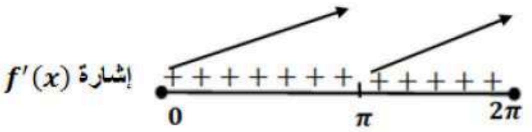
</td>
</tr>
</table>

19

$f(x) = x + \sin x , [0, 2\pi]$

$f'(x) = 1 + \cos x = 0 \rightarrow \cos x = -1 \rightarrow x = \pi$

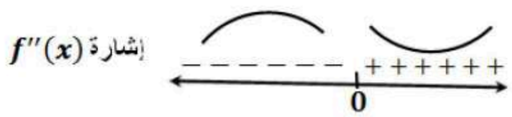
القيمة الحرجة هي $x = \pi$



f متزايد على $(0, 2\pi)$
ليس له قيم قصوى محلية

20

$f(x) = x^3 - 12x + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 12$
$f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$



f مقعر للأعلى في $(0, \infty)$
f مقعر للأسفل في $(-\infty, 0)$
للاقتران f نقطة انعطاف هي $(0, 1)$

21

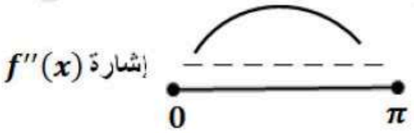
$f(x) = \sqrt{\sin x}\ , [0, \pi]$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$f''(x) = \frac{\left(2\sqrt{\sin x}\right)(-\sin x) - (\cos x)\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right)}{4 \sin x} = -\frac{2\sin^2 x + \cos^2 x}{4 \sin x \sqrt{\sin x}}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + 1}{4 \sin x \sqrt{\sin x}}$$

$f''(x) \neq 0$



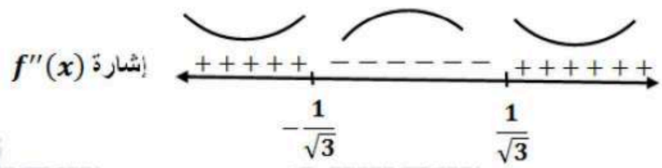
fمقعر للأسفل على $(0, \pi)$ ، وليس له نقاط انعطاف

22

$$f(x) = \frac{3}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(-6) - (-24x^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{18x^2-6}{(x^2+1)^3} = 0 \to x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$



f مقعر للأعلى على $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$

f مقعر للأسفل على $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

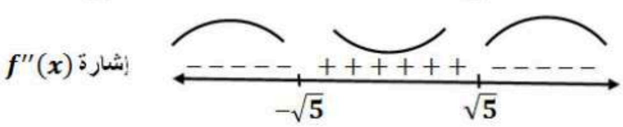
وله نقطتا انعطاف هما: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4}\right)$ و $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4}\right)$

23

$$f(x) = \ln(x^2+5)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+5}$$

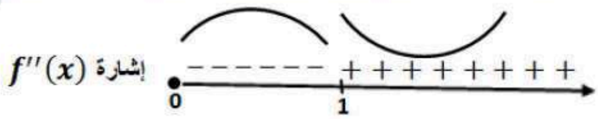
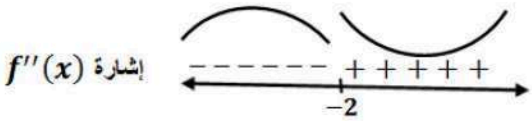
$$f''(x) = \frac{(x^2+5)(2) - (2x)(2x)}{(x^2+5)^2} = \frac{10-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \to x = \pm\sqrt{5}$$



f مقعر للأعلى على $\left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$ ،

f مقعر للأسفل على $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right), \left(\sqrt{5}, \infty\right)$،

وله نقطتا انعطاف هما: $\left(\sqrt{5}, \ln 10\right)$ و $\left(-\sqrt{5}, \ln 10\right)$

24	$f(x) = \sqrt{x}(x+3) = x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}, \quad x \geq 0$ $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad x > 0$ $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}\right) = 0 \rightarrow x = 1$  f مقعر للأعلى على $(1,\infty)$ ، f مقعر للأسفل على $(0,1)$ ، وله نقطة انعطاف هي: $(1,4)$
25	$f(x) = xe^x$ $f'(x) = xe^x + e^x$ $f''(x) = xe^x + e^x + e^x = e^x(x+2) = 0 \rightarrow x = -2$  f مقعر للأعلى على $(-2,\infty)$ ، f مقعر للأسفل على $(-\infty,-2)$ ، وله نقطة انعطاف هي: $(-2,-2e^{-2})$
26	$f(x) = 6x - x^2$ $f'(x) = 6 - 2x = 0 \rightarrow x = 3$ $f''(x) = -2 \rightarrow f''(3) = -2 < 0$ للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $f(3) = 9$

27

$f(x) = \cos x - x, [0, 4\pi]$

$f'(x) = -\sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{2}$

$f''(x) = -\cos x$

$\rightarrow f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \,, f''\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 0$

ويكون اختبار المشتقة الثانية قد فشل في تحديد نوع القيم $f\left(\frac{3\pi}{2}\right), f\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ ، لذا نستخدم اختبار المشتقة الأولى والذي يعتمد على دراسة إشارتها:

إشارة $f'(x)$ ------ ------- ------

$0 \qquad \frac{3\pi}{2} \qquad \frac{7\pi}{2} \qquad 4\pi$

نلاحظ أن $f'(x)$ لا تغير إشارتها أبدًا، إذن ليس للاقتران f قيم قصوى محلية .

28

$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

$f'(x) = \frac{(x-1)(2x) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$

$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$

$f''(0) = -2 < 0 \;, f''(2) = 2 > 0$

للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $f(0) = 0$

وله قيمة صغرى محلية هي $f(2) = 4$

29

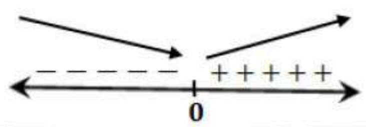
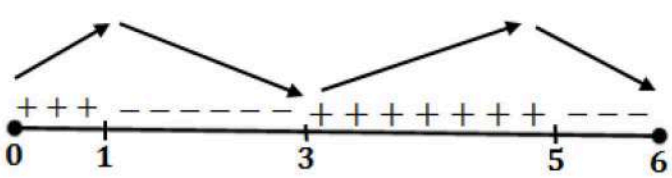
$f(x) = x \ln x$

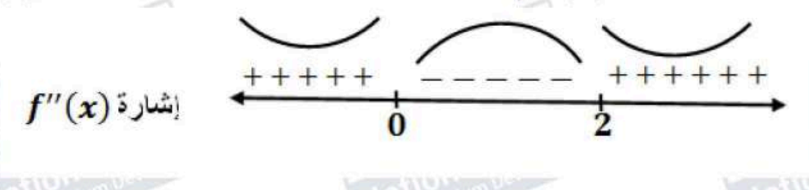
$f'(x) = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = 1 + \ln x = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1}$

$f''(x) = \frac{1}{x}$

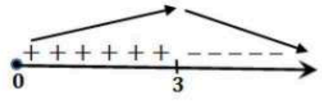
$\rightarrow f''(e^{-1}) = e > 0$

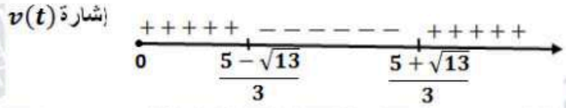
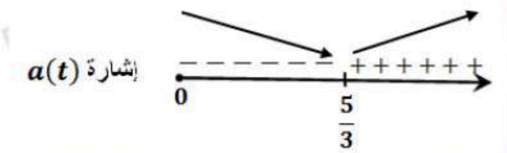
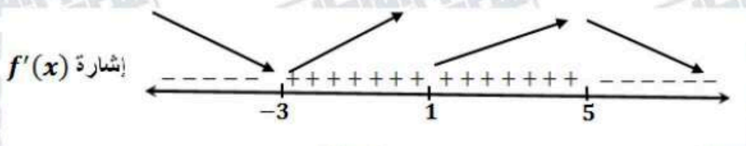
للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $f(e^{-1}) = -e^{-1}$

30	$f(x)=\frac{x}{2^x}$ $f'(x)=\frac{2^x-(x)(2^x\ln 2)}{2^{2x}}=2^{-x}-(x)(2^{-x}\ln 2)=2^{-x}(1-x\ln 2)=0$ $\rightarrow x=\frac{1}{\ln 2}$ $f''(x)=(2^{-x})(-\ln 2)+(1-x\ln 2)(-2^{-x}\ln 2)$ $=-2^{-x}\ln 2\,(2-x\ln 2)$ $\rightarrow f''\left(\frac{1}{\ln 2}\right)=-2^{-\frac{1}{\ln 2}}\ln 2\left(2-\frac{1}{\ln 2}\times\ln 2\right)=-2^{-\frac{1}{\ln 2}}\ln 2\ <0$ للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $f\left(\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{\frac{1}{\ln 2}}{2^{\frac{1}{\ln 2}}}$
31	$f(x)=x^{\frac{2}{3}}-3$ $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $f'(x)$ لا تساوي صفرًا أبدًا، لكنها غير موجودة عند $x=0$ ، فلا يمكن تطبيق اختبار المشتقة الثانية لمعرفة القيم القصوى، لذا نستخدم اختبار المشتقة الأولى بدراسة إشارتها:  للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $f(0)=-3$
32	نلاحظ من الرسم المعطى أن $f'(x)=0$ عند $\mathrm{x}=1,\mathrm{x}=3,\mathrm{x}=5$، وأن إشارة $f'(x)$ على النحو الآتي:  للاقتران f قيمة صغرى محلية عند $x=3$ للاقتران f قيمة عظمى محلية عند $x=1,x=5$
33	الاقتران f متزايد على $(0,1),(3,5)$، ومتناقص على $(1,3),(5,6)$

<table>
<tr><td>34</td><td>
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
الاقتران f كثير حدود فهو قابل للاشتقاق على R ، بما أن كل نقطة قيمة قصوى هي نقطة حرجة، فإن
$f'(1) = 0$ و $f'(-3) = 0$
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
$f'(-3) = 27 - 6a + b = 0 \ldots.(1)$
$f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \ldots\ldots\ldots(2)$
النقطة (1, -14) تقع على منحنى الاقتران، لذا فإن $f(1) = -14$
$f(1) = 1 + a + b + c = -14 \ldots.(3)$
بطرح المعادلتين (1) و (2) نجد أنّ: $a = 3$
ثم بتعويض قيمة a في المعادلة (2) نجد أنّ: $b = -9$
ثم بتعويض قيمة كل من a و b في المعادلة (3) نجد أنّ: $c = -9$
</td></tr>
<tr><td>35</td><td>
$f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{b}{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{b}{x^2}$
$f''(x) = \frac{-1}{4(x+1)\sqrt{x+1}} + \frac{2b}{x^3}$
بما أنه يوجد نقطة انعطاف عند $x = 3$ فإما أن يكون $f''(3) = 0$ أو $f''(3)$ غير موجودة،
لكن بالنظر إلى قاعدة الاقتران f'' فإن $f''(x)$ غير موجودة عند $x = -1$ و $x = 0$ ،
إذن $f''(3) = 0$ ، ومنه:
$f''(3) = \frac{-1}{32} + \frac{2b}{27} = 0 \quad \to b = \frac{27}{64}$
</td></tr>
<tr><td>36</td><td>
نلاحظ من الشكل أنّ $f''(x) = 0$ عند $x = 0$ و $x = 2$ ، وأنّ إشارة $f''(x)$ على النحو الآتي:


f مقعر للأسفل على $(0, 2)$ ،
f مقعر للأعلى على $(-\infty, 0), (2, \infty)$
</td></tr>
<tr><td>37</td><td>
توجد نقطتا انعطاف عند $x = 0$ و $x = 2$
</td></tr>
</table>

38	$B(x) = 305x^2 - 1830x^3, \;\; 0 \le x \le 0.16$ $B'(x) = 610x - 5490x^2 = 0 \;\; \to 610x(1-9x) = 0$ $\to x = 0\,, x = \frac{1}{9} \approx 0.11$ القيمة الحرجة هي: $x = \frac{1}{9}$ $B(0) = 0$ $B\left(\frac{1}{9}\right) = 305\left(\frac{1}{9}\right)^2 - 1830\left(\frac{1}{9}\right)^3 \approx 1.26$ $B(0.16) = 305(0.16)^2 - 1830(0.16)^3 \approx 0.31$ الحد الأقصى لضغط الدم هو 1.26 ويحدث عند تناول $\frac{1}{9}\ \mathrm{cm}^3$ من الدواء
39	يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$ أي: $s'(t) = 0$ وهذا يحدث عندما يكون لمنحنى $s(t)$ مماس أفقي، أي عند $t = 2$ و $t = 6$
40	يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب أو السالب تبعًا لإشارة $s'(t) = v(t)$، وهذه الإشارة ترتبط بكون منحنى $s(t)$ متزايدًا أو متناقصًا: يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب في كل من الفترتين: $(6, 7)$,$(0, 2)$لأن اقتران الموقع متزايد فيهما. ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $(2, 6)$ لأن اقتران الموقع متناقص فيها.
41	تتزايد $v(t)$ عندما $s''(t) = v'(t)$ يكون موجبًا أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعرًا للأعلى، أي في الفترة $(4, 7)$ تتناقص $v(t)$ عندما $s''(t) = v'(t)$ يكون سالبًا أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعرًا للأسفل، أي في الفترة $(0, 4)$
42	$f(x) = \frac{1500}{x^2 - 6x + 10} - 150$ $f'(x) = \frac{-1500(2x-6)}{(x^2 - 6x + 10)^2} = 0 \;\; \to x = 3$ القيمة الحرجة الوحيدة هي $x = 3$ لأن المقام لا يساوي صفرًا $f'(x)$ إشارة  بدراسة إشارة $f'(x)$ نلاحظ أن للاقتران f قيمة عظمى عندما $x = 3$ ، أي أنّ عدد مكبرات الصوت اللازم إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح أسبوعي ممكن هو 3

43	$s(t)=t^3-5t^2+4t, t\geq 0$ $v(t)=3t^2-10t+4=0 \quad \rightarrow t=\frac{5\pm\sqrt{13}}{3}$  يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب في كل من الفترتين: $\left(0,\frac{5-\sqrt{13}}{3}\right),\left(\frac{5+\sqrt{13}}{3},\infty\right)$ ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{3},\frac{5+\sqrt{13}}{3}\right)$
44	تتزايد $v(t)$ وتتناقص وفقًا لإشارة $a(t)=v'(t)$ $a(t)=6t-10=0 \quad \rightarrow t=\frac{5}{3}$  تتزايد سرعة الجسم المتجهة في الفترة $\left(\frac{5}{3},\infty\right)$ وتتناقص على الفترة $\left(0,\frac{5}{3}\right)$
45	تكون $f'(x)>0$ ، و $f''(x)>0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متزايدًا ومنحناه مقعرًا للأعلى. النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: l
46	تكون $f'(x)<0$ ، و $f''(x)<0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متناقصًا ومنحناه مقعرًا للأسفل. النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: p
47	تكون $f'(x)<0$ ، و $f''(x)>0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متناقصًا ومنحناه مقعرًا للأعلى. النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: k
48	نلاحظ من الرسم أنّ $f'(x)=0$ عند $x=-3, x=1, x=5$ ، وأنّ إشارة $f'(x)$ على النحو الآتي:  للاقتران f قيمة صغرى محلية عند $x=-3$ وله قيمة عظمى محلية عند $x=5$
49	الاقتران f متزايد على $(-3,5)$ ومتناقص على $(-\infty,-3),(5,\infty)$

50	يكون منحنى f مقعرًا للأعلى في الفترة (أو الفترات) التي يكون فيها f' متزايدًا حيث تكون في هذه الفترات مشتقة f' أي f'' موجبة. يتضح من الرسم أنّ f' متزايدة في الفترتين: $(-\infty,-2),(1,4)$ وعندما تكون f' متناقصة في فترة ما تكون f'' سالبة ويكون منحنى f مقعرًا للأسفل، ويتضح من الرسم أنّ f' متناقصة في الفترتين: $(-2,1),(4,\infty)$ إذن، منحنى f مقعر للأسفل في الفترتين $(-2,1),(4,\infty)$ ومقعر للأعلى في الفترتين $(-\infty,-2),(1,4)$.
51	f له ثلاث نقاط انعطاف عند $x=-2, x=1, x=4$ لأن للاقتران f' قيم قصوى عندها.
52	$h(x)$ هو مشتقة $g(x)$ أي $g'(x)=h(x)$ وليس العكس التبرير: بما أن أحدهما هو مشتقة الآخر (من المعطيات)، يكفي ملاحظة الفترة $x<-2$ حيث g متزايد و h أكبر من الصفر، وهذا ينسجم مع كون h هو مشتقة g بينما في هذه الفترة نفسها h متناقص و g لا يحافظ على الإشارة السالبة، وهذا يؤكد أن g ليس مشتقة h والنظر لباقي الفترات بالمنهجية نفسها يؤدي إلى ذات النتيجة. كذلك للاقتران g قيمة صغرى محلية عند $x=-2$، ونلاحظ أن $h(-2)=0$، ما يؤكد أن $g'(x)=h(x)$.

53	$f(x)=x^a(1-x)^b$, $x\in[0,1], a>0, b>0$ $f'(x)=-bx^a(1-x)^{b-1}+ax^{a-1}(1-x)^b$ $=x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a(1-x)-bx)$ $=x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a-(a+b)x)$ $f'(x)=0 \quad \to x=0\,, x=1\,, x=\dfrac{a}{a+b}$ **بما أن** a ، و b موجبان، فإن: $0< a< a+b$ وبقسمة حدود المتباينة على $(a+b)$ ينتج أنّ: $0<\dfrac{a}{a+b}<1$ أي أنّ العدد $\frac{a}{a+b}$ يقع ضمن مجال الاقتران f وهو $[0,1]$ **إذن القيمة الحرجة في الفترة (0, 1)هي:** $x=\frac{a}{a+b}$ **أجد قيمة الاقتران عند القيمة الحرجة وطرفي المجال.** $f\left(\dfrac{a}{a+b}\right)=\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^a\left(1-\dfrac{a}{a+b}\right)^b=\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^a\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^b$ $f(0)=0, f(1)=0$ **إذن القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي** $f\left(\frac{a}{a+b}\right)=\left(\frac{a}{a+b}\right)^a\left(\frac{b}{a+b}\right)^b$