إجابات كتاب الطالب – مادة الرياضيات – الصف الثاني الثانوي العلمي ف1

الوحدة الثانية: تطبيقات التفاضل

الدرس الأول: المعدلات المرتبطة

مسألة اليوم صفحة 76

$$S = \frac{\sqrt{hw}}{60} = \frac{\sqrt{170w}}{60} = \frac{\sqrt{170}}{60}\sqrt{w}$$

معدل التغير المعطى:

$$\frac{dw}{dt} = -2 \text{ kg/month}$$

معدل التغير المطلوب:

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{w=70}$$

العلاقة بين الكتلة ومساحة سطح الجسم:

$$S = \frac{\sqrt{170w}}{60}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{170}}{120\sqrt{w}}\frac{dw}{dt}$$

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{w=70} = \frac{\sqrt{170}}{120\sqrt{70}} \times -2$$

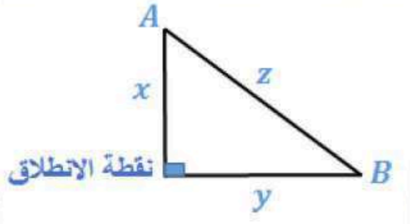
$$= -0.03 \text{ cm}^2\text{/month}$$

أتحقق من فهمي صفحة 78

منهاجي
متعة التعليم الهادف

ليكن حجم الكرة V وطول نصف قطرها r معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 80 \text{ cm}^3/\text{s}$ معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=6}$ حجم البالون الكروي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{r=6} = 4\pi(6)^2 \left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=6}$ $80 = 144\pi \left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=6}$ $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=6} = \frac{80}{144\pi}$ $= \frac{5}{9\pi} \text{ cm/s}$	
أتحقق من فهمي صفحة 80	

ليكن بعد A عن نقطة الانطلاق يساوي x ، و بعد B عن نقطة الانطلاق يساوي y ، والبعد بين A ، و B يساوي z



معدلات التغير المعطاة: $\frac{dx}{dt} = 45\text{km/h}, \quad \frac{dy}{dt} = 40\text{ km/h}$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2}$

بعد ساعتين من الحركة يكون:

$$x = 45 \times 2 = 90\text{ km} \quad , y = 40 \times 2 = 80\text{ km}$$

من نظرية فيثاغورس:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{90 \times 45 + 80 \times 40}{\sqrt{8100 + 6400}}$$

$$= \frac{7250}{10\sqrt{145}} = \frac{725}{\sqrt{145}} \approx 60.21\text{ km/h}$$

<u>الحل بطريقة ثانية:</u>

بعد t ساعة من الحركة يكون:

$$x = 45t\text{ km} \quad , y = 40t\text{ km}$$

من نظرية فيثاغورس:

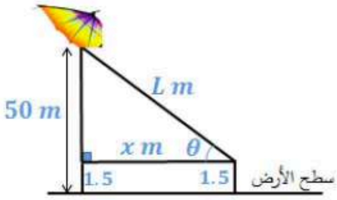
$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z = \sqrt{(45t)^2 + (40t)^2} = \sqrt{3625}\,t$$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{3625} \approx 60.21$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} \approx 60.21\text{ km/h}$$

أتحقق من فهمي صفحة 82



ليكن طول الخيط L وقياس الزاوية بين الخيط والأفقي θ ، و بعد الطائرة أفقيًا هو x .

المعطى: $\frac{dx}{dt} = 2 \text{ m/s}$

المطلوب: $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{L=100}$

$$\tan\theta = \frac{50 - 1.5}{x} = \frac{48.5}{x}$$

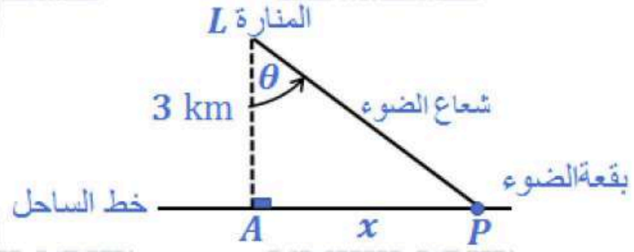
$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\frac{L^2}{x^2} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5\left(\frac{dx}{dt}\right)}{x^2} \times \frac{x^2}{L^2} = \frac{48.5\left(\frac{dx}{dt}\right)}{L^2}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{L=100} = -\frac{48.5(2)}{(100)^2} \approx -0.0097 \text{ rad/s}$$

أتحقق من فهمي صفحة 84



لتكن الأبعاد والقياسات كما في الشكل أعلاه

المعطى: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4(2\pi) = 8\pi$ rad/min

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=1}$

$$\tan\theta = \frac{x}{3}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{x^2+9}{3} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = (x^2+9)\ \frac{d\theta}{dt}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=1} = (1+9)\ (8\pi) = 80\pi \text{ km/min}$$

سرعة بقعة الضوء على الساحل 80π km/min عندما تبعد 1 km عن A.

أتحقق من فهمي صفحة 86

a	يصل الطرف العلوي للذراع إلى أعلى نقطة عندما يكون وضع الذراع رأسيا، وتكون النقطة المطلوبة هي $(0, 1)$

b

المعطى: $x(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$

المطلوب: $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}$

عندما $x = \frac{1}{4}$، فإن:

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\sin\frac{\pi t}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{6} \rightarrow t = 1$$

العلاقة المعطاة: $x(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi t}{6}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1} = \frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\pi}{24}$$

من نظرية فيثاغورس: $x^2 + y^2 = 1$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

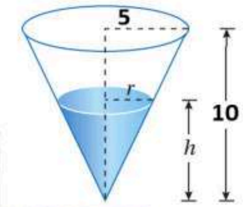
$$2x\frac{dx}{dt} + 2\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}} = -\frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{16}}}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}\pi}{96} \times \frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{\pi}{24\sqrt{5}} \text{ m/s}$$

إذن، يتحرك طرف الذراع الواقع على المحور y للأسفل بمعدل $\frac{\pi}{24\sqrt{5}}$ m/s عندما $x = \frac{1}{4}$.

	أتحقق من فهمي صفحة 88
	 ليكن حجم الماء في الخزان V ونصف قطر قاعدته r وارتفاعه h المعطى: $\frac{dV}{dt} = \pi \text{ m}^3/\text{min}$ المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right\|_{h=8}$ من التشابه: $\frac{r}{h} = \frac{5}{10} \rightarrow r = \frac{1}{2}h$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h$ $V = \frac{\pi}{12}h^3$ $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$ $\pi = \frac{\pi}{4}(8)^2\frac{dh}{dt}$ $\left.\frac{dh}{dt}\right\|_{h=8} = \frac{1}{16} \text{ m/min}$ إذن، يزداد ارتفاع الماء في الخزان بمعدل $\frac{1}{16}$ m/min عندما يكون ارتفاعه 8 m
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 88
1	ليكن طول المستطيل x وعرضه y ومساحته A ومحيطه C وطول قطره R المعطى: $\frac{dy}{dt} = -3\text{cm/s}, \ \frac{dx}{dt} = 2\text{cm/s}$ المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{x=20,y=50}$ $A = xy \ \rightarrow \frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$ $\rightarrow \left.\frac{dA}{dt}\right\|_{x=20,y=50} = 20(-3) + 50(2) = 40 \text{ cm}^2/\text{s}$
2	$C = 2x + 2y \ \rightarrow \frac{dC}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt}$ $\rightarrow \left.\frac{dC}{dt}\right\|_{x=20,y=50} = 2(2) + 2(-3) = -2 \text{ cm/s}$

3	$$R^2 = x^2 + y^2$$ $$2R\frac{dR}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$ $$\sqrt{(20)^2 + (50)^2}\ \frac{dR}{dt}\Big\vert_{x=20,y=50} = 20(2) + 50(-3)$$ $$\frac{dR}{dt}\Big\vert_{x=20,y=50} = -\frac{110}{10\sqrt{29}} = -\frac{11}{\sqrt{29}}\ \text{cm/s}$$
4	في اللحظة المذكورة تكون المساحة متزايدة (لأن معدل تغيرها موجب)، بينما يتناقص كل من المحيط وطول القطر(لأن معدل تغير كل منهما سالب).
5	ليكن حجم المكعب V وطول ضلعه (حرفه) x المعطى: $\frac{dx}{dt} = 6\ \text{cm/s}$ المطلوب: $\frac{dV}{dt}\Big\vert_{t=4}$ بعد مرور t ثانية يصبح طول ضلع المكعب: $x = 10 + 6t$ ويكون حجمه: $V = x^3 = (10 + 6t)^3$ $\frac{dV}{dt} = 3(10 + 6t)^2 \times 6$ $\frac{dV}{dt}\Big\vert_{t=4} = 3(34)^2(6) = 20808\ \text{cm}^3/\text{s}$
6	لتكن مساحة سطح المكعب A بعد مرور t ثانية تصبح مساحة سطح المكعب: $A = 6x^2 = 6(10 + 6t)^2$ $\frac{dA}{dt} = 12(10 + 6t) \times 6$ $\frac{dA}{dt}\Big\vert_{t=6} = 12(46)(6) = 3312\ \text{cm}^2/\text{s}$

7	ليكن ارتفاع الوقود في الخزان h ، سيكون طول نصف قطر قاعدته 1 m، ويكون حجمه: $V = \pi r^2 h = \pi h$ المعطى: $\frac{dV}{dt} = 500\text{L/min} = 0.5\ \text{m}^3/\text{min}$ المطلوب: $\frac{dh}{dt}$ العلاقة التي تربط الحجم بالارتفاع: $V = \pi h$ $\frac{dV}{dt} = \pi \frac{dh}{dt}$ $0.5 = \pi \frac{dh}{dt}$ $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi}\ \text{m/min}$
8	$A = 2\pi rh = 2\pi h$ $\frac{dA}{dt} = 2\pi \frac{dh}{dt}$ $= 2\pi \times \frac{1}{2\pi} = 1\ \text{m}^2/\text{min}$
9	المعطى: $\frac{dR}{dt} = -0.0002\ \text{mm/s}$ المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right\vert_{R=0.075}$ العلاقة المعطاة: $V = \frac{3125}{6}(R^2 - (0.0005)^2)$ $\frac{dV}{dt} = \frac{3125}{6}\left(2R\frac{dR}{dt}\right)$ $\left.\frac{dV}{dt}\right\vert_{R=0.075} = \frac{3125}{6}(2(0.075)(-0.0002))$ $\approx -0.0156\ \text{mm/s}^2$

10

المعطى: $\frac{dx}{dt} = 2\ m/s$

المطلوب: $\left.\frac{dT}{dt}\right|_{x=5}$

$$T(x) = \frac{200}{1+x^2}$$

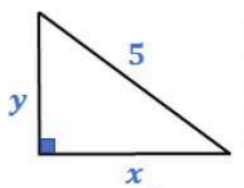
$$\frac{dT}{dt} = -\frac{400x\frac{dx}{dt}}{(1+x^2)^2}$$

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{x=5} = -\frac{400(5)(2)}{(1+(5)^2)^2} = -5.9\ ^\circ\mathrm{C}/s$$

أي أن درجة الحرارة التي يشعر بها ستقل بمعدل $6\ ^\circ\mathrm{C/s}$ تقريبًا عندما يكون على بعد 5 أمتار من مصدر النار.

11

نفرض أن بعد الطرف السفلي عن الجدار هو x، وأن بعد الطرف العلوي عن الأرض هو y.



المعطى: $\frac{dy}{dt} = 0.15\ \mathrm{m/s}$

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3}$

من نظرية فيثاغورس: $x^2 + y^2 = 25$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y\frac{dy}{dt}}{x}$$

عندما $x = 3$، يكون:

$$y^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow y = 4$$

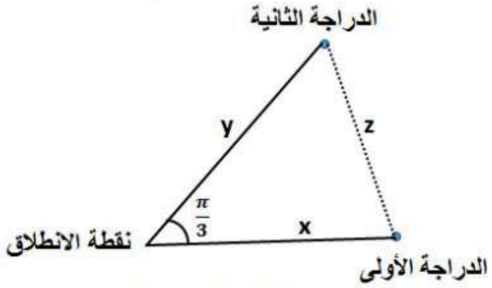
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3} = -\frac{4(0.15)}{3} = -0.2\ \mathrm{m/s}$$

إذن يتحرك الطرف السفلي في تلك اللحظة بسرعة $0.2\ \mathrm{m/s}$ نحو اليسار مقتربًا من الجدار.

12	ليكن حجم كومة الرمل V ، وارتفاعها h ، وطول نصف قطر قاعدتها r المعطى: $\frac{dV}{dt} = 10\ m^3/min \qquad , h = \frac{3}{8}(2r)$ المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right\|_{h=4}$ $h = \frac{3}{8}(2r) \quad \rightarrow r = \frac{4}{3}h$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{3}h\right)^2 h$ $V = \frac{16}{27}\pi h^3$ $\frac{dV}{dt} = \frac{16}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$ $10 = \frac{16}{9}\pi(4)^2\frac{dh}{dt}$ $\left.\frac{dh}{dt}\right\|_{h=4} = \frac{45}{128\pi}\ \mathrm{m/min}$ إذن يزداد ارتفاع الكومة المخروطية عند تلك اللحظة بمعدل 0.112 مترًا لكل ثانية تقريبًا.
13	$r = \frac{4}{3}h$ $\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\frac{dh}{dt}$ $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{h=4} = \frac{4}{3}\left.\frac{dh}{dt}\right\|_{h=4} = \frac{4}{3}\times\frac{45}{128\pi} = \frac{15}{32\pi}\ \mathrm{m/min}$ إذن يزداد نصف القطر عند تلك اللحظة بمعدل 0.149 مترًا لكل ثانية تقريبًا.

14	ليكن بعد الطائرة الأولى عن نقطة التقاء المسارين في لحظة ما هو x، وبعد الطائرة الثانية عن نقطة التقاء المسارين في تلك اللحظة هو y، والبعد بين الطائرتين هو s. المعطى: $\frac{dy}{dt} = -600$ km/h $\quad \frac{dx}{dt} = -450$ km/h المطلوب: $\left.\frac{ds}{dt}\right\|_{x=225, y=300}$ $s^2 = x^2 + y^2$ $2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$ $\frac{ds}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{s} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\left.\frac{ds}{dt}\right\|_{x=225, y=300} = \frac{225(-450) + 300(-600)}{\sqrt{(225)^2 + (300)^2}} = -750$ km/h إذن في تلك اللحظة تقل المسافة بين الطائرتين بمعدل 750 كيلومترًا في الساعة.
15	نحسب الوقت الذي تحتاجه كل من الطائرتين للوصول لنقطة التقاء المسارين: $t_1 = \frac{x}{v_x} = \frac{225}{450} = 0.5\ h$ $t_2 = \frac{y}{v_y} = \frac{300}{600} = 0.5\ h$ بما أن الطائرتين ستصلان لنقطة التقاء المسارين بعد نصف ساعة من لحظة رصدهما من قبل المراقب الجوي، فإن اصطدامهما متوقع، ويجب على مراقب الحركة الجوية التوجيه بالتغيير اللازم في مسار إحداهما أو في سرعتها على الأقل حتى لا تصلان إلى نقطة التقاء المسارين معًا في الوقت نفسه.

<table>
<tr>
<td>16</td>
<td>
لتكن المسافات كما في الشكل أدناه:



المعطى: $\frac{dy}{dt} = 20\text{ km/h}$ $\quad \frac{dx}{dt} = 15\text{ km/h}$

المطلوب: $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2}$

بعد t ساعة من انطلاقهما يكون: $x = 15t, \quad y = 20t$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$z = \sqrt{(15t)^2 + (20t)^2 - 2(15t)(20t)\left(\frac{1}{2}\right)} = 5\sqrt{13}t$$

$$\frac{dz}{dt} = 5\sqrt{13}$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} = 5\sqrt{13}\text{ km/h}$$

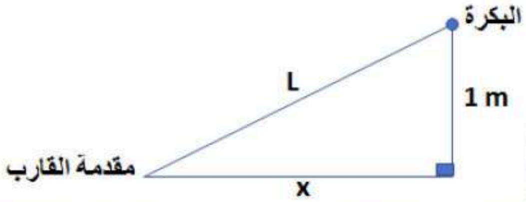
إذن بعد ساعتين من انطلاقهما تتباعد الدراجتان كل منهما عن الاخرى بسرعة $5\sqrt{13}$ كيلومتر كل ساعة
</td>
</tr>
<tr>
<td>17</td>
<td>

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$A = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$$
</td>
</tr>
</table>

18	المعطى: $\frac{dx}{dt} = 4$ المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{x=4}$ $A = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$ $\frac{dA}{dt} = (2x)\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{dt}\right) + \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(2\frac{dx}{dt}\right)$ $= 2e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2)\frac{dx}{dt}$ $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{x=4} = 2e^{-\frac{(4)^2}{2}}(1 - (4)^2)(4)$ $= -120e^{-8}\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{min}$
19	عندما $R_1 = 80$، $R_2 = 100$: يكون: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{80} + \frac{1}{100} = \frac{180}{8000}$ $R = \frac{800}{18} = \frac{400}{9}\ \Omega$ المعطى: $\frac{dR_1}{dt} = 0.3,\ \frac{dR_2}{dt} = 0.2$ المطلوب: $\left.\frac{dR}{dt}\right\|_{R_1=80, R_2=100}$ العلاقة المعطاة: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ $-\frac{\frac{dR}{dt}}{R^2} = -\frac{\frac{dR_1}{dt}}{{R_1}^2} - \frac{\frac{dR_2}{dt}}{{R_2}^2}$ $\frac{dR}{dt} = R^2\left(\frac{\frac{dR_1}{dt}}{{R_1}^2} + \frac{\frac{dR_2}{dt}}{{R_2}^2}\right)$ $\left.\frac{dR}{dt}\right\|_{R_1=80, R_2=100} = \frac{160000}{81}\left(\frac{0.3}{6400} + \frac{0.2}{10000}\right) \approx 0.132\ \Omega/s$

لتكن الأبعاد كما في الشكل:



المعطى: $\frac{dL}{dt} = -1 \text{ m/s}$

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8}$

20 $L^2 = x^2 + 1$

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

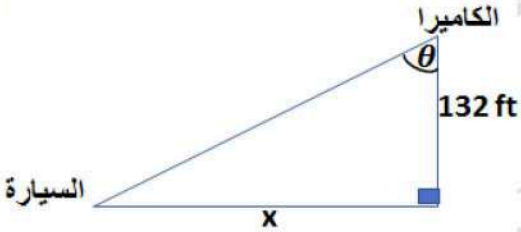
$$\frac{dx}{dt} = \frac{L}{x} \times \frac{dL}{dt} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \times \frac{dL}{dt}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8} = \frac{\sqrt{8^2+1}}{8} \times -1 = -\frac{\sqrt{65}}{8} \text{ m/s}$$

إذن في تلك اللحظة يقترب القارب من الرصيف بسرعة $\frac{\sqrt{65}}{8}$ m/s

21

لتكن x كما في الشكل:



المعطى: $\frac{dx}{dt} = -264 \text{ ft/s}$

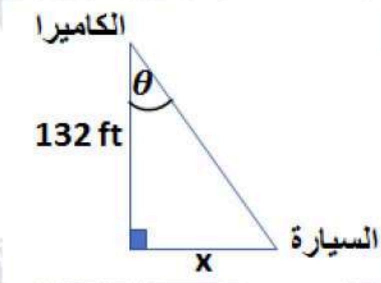
المطلوب: $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=0}$

$$\tan\theta = \frac{x}{132}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt} \times \cos^2\theta$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=0} = \frac{1}{132}(-264)\cos^2 0 = -2 \text{ rad/s}$$

22	لتكن x كما في الشكل:  بعد تجاوز السيارة للكاميرا تتزايد المسافة x حيث يصبح $\frac{dx}{dt} = 264 \text{ ft/s}$ المطلوب: $\left.\frac{d\theta}{dt}\right\|_{t=0.5\text{ s}}$ بعد نصف ثانية: $x = 0.5 \times 264 = 132$ $\tan\theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ $\tan\theta = \frac{x}{132}$ $\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$ $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt} \times \cos^2\theta$ $\left.\frac{d\theta}{dt}\right\|_{t=0.5\text{ s}} = \frac{1}{132}(264) \times \cos^2(\frac{\pi}{4})$ $= 2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1 \text{ rad/s}$ يزداد قياس الزاوية θبسرعة 1 rad/s في تلك اللحظة.

23

ليكن الجسيم عند النقطة $P\left(x, 2\sin\frac{\pi x}{2}\right)$ في أي لحظة، O نقطة الأصل، وليكن $PO = L$

المعطى: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{1}{3}} = \sqrt{10}$ units/s

المطلوب: $\left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=\frac{1}{3}}$

$$L^2 = (x-0)^2 + \left(2\sin\frac{\pi x}{2} - 0\right)^2$$

$$L^2 = x^2 + 4\sin^2\frac{\pi x}{2}$$

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 8\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{L}\left(x + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\pi x\right)\frac{dx}{dt}$$

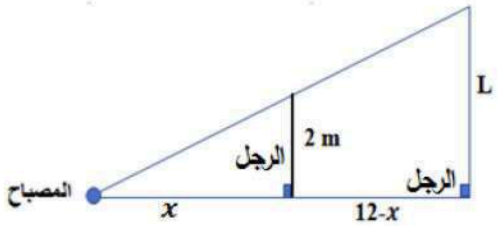
عندما $x = \frac{1}{3}$ ، فإن:

$$L = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

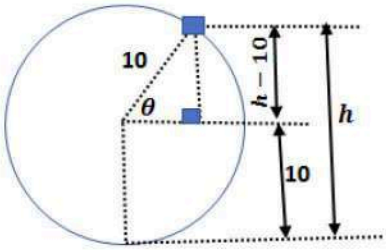
$$\left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{3}}\left(\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{3}\right)\sqrt{10}$$

$$= 1 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$$

إذن يزداد بعد الجسيم عن نقطة الأصل في تلك اللحظة بسرعة $\left(1 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\right)$ وحدة/ثانية

24	ليكن بعد الرجل عن المصباح أفقيا x ، وطول ظله على الجدار L  المعطى: $\frac{dx}{dt} = 1.6 \text{ m/s}$ المطلوب: $\left.\frac{dL}{dt}\right\|_{x=8}$ من تشابه المثلثات: $\frac{L}{2} = \frac{12}{x} \rightarrow L = \frac{24}{x}$ $\frac{dL}{dt} = \frac{-24\frac{dx}{dt}}{x^2}$ $\left.\frac{dL}{dt}\right\|_{x=8} = \frac{-24(1.6)}{64} = -0.6 \text{ m/s}$ إذن يتناقص طول ظل الرجل عند تلك اللحظة بمعدل 0.6 متر لكل ثانية
25	المعطى: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 10 \times 2\pi = 20\pi \text{ rad/s}$ المطلوب: $\frac{dx}{dt}$ $\cos\theta = \frac{x}{30} \rightarrow x = 30\cos\theta$ $\rightarrow \frac{dx}{dt} = -30\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$ $= -30(20\pi)\sin\theta = -600\pi\sin\theta$
26	$\left.\frac{dx}{dt}\right\|_{\theta=45^\circ} = -600\pi\sin 45^\circ = -\frac{600\pi}{\sqrt{2}} \text{ cm/s}$

ليكن h ارتفاع الراكب عن سطح الأرض



المعطى: $\frac{d\theta}{dt}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ rad/min

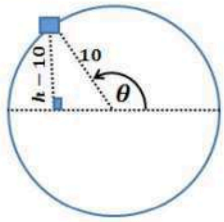
المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=16}$

بما أن $\sin\theta=\frac{h-10}{10}$ فعندما $h=16$ يكون: $\sin\theta=0.6$ ومنه $\cos\theta=0.8$

27 $h=10+10\sin\theta$

$$\frac{dh}{dt}=10\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=16}=10\times0.8\times\pi=8\pi\ \text{m/min}$$

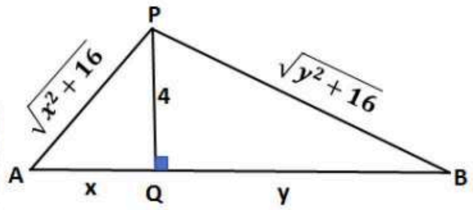


ويمكن أن يكون الارتفاع 16 m والعربة نازلة بعد إكمال نصف دورة. عندئذ يكون $\cos\theta=-0.8$ لأن θ تكون زاوية منفرجة، ويكون:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=16}=10\times-0.8\times\pi=-8\pi\ \text{m/min}$$

إذن، على ارتفاع 16m يكون الراكب في حالة صعود أو في حالة هبوط بسرعة مقدارها 8π m/min

لتكن الأبعاد كما في الشكل أدناه:



المعطى: $\frac{dx}{dt} = 0.5 \text{ m/s}$

المطلوب: $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=3}$

طول الحبل: $AP + BP = \sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$

28 عندما $x = 3$ فإن: $\sqrt{9+16} + \sqrt{y^2+16} = 12 \rightarrow \sqrt{y^2+16} = 7 \rightarrow y = \sqrt{33}$

$$\sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$$

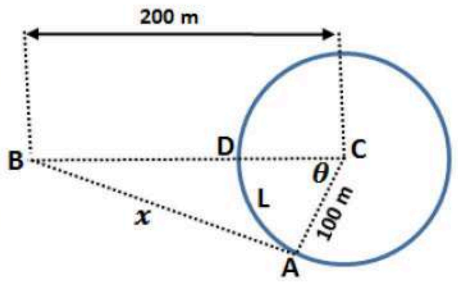
$$\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}} = 0$$

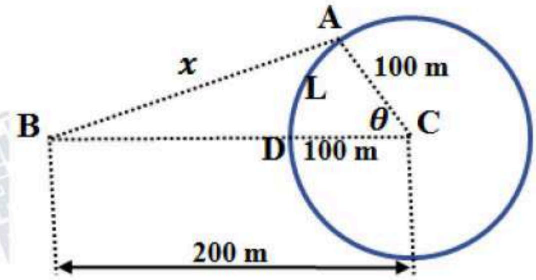
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x\sqrt{y^2+16}}{y\sqrt{x^2+16}}\frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=3} = -\frac{3\sqrt{33+16}}{\sqrt{33}\sqrt{25}} \times 0.5 = -\frac{21}{10\sqrt{33}} \text{ m/s}$$

إذن، تقترب العربة B من النقطة Q بسرعة مقدارها $\frac{21}{10\sqrt{33}}$ m/s

ليكن العداء الأول A، والعداء الثاني B، والبعد بينهما x كما في الشكل، وليكن L هو طول القوس الأصغر AD. توجد حالتان لموقع العداء **A كما في الرسمين الآتيين:**





<u>الحالة الأولى:</u> العداء A إلى يمين B

المعطى: (تكون L متناقصة) ويكون : $\frac{dL}{dt} = -7$ m/s

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=200\,m}$

$$L = r\theta = 100\theta \rightarrow \frac{dL}{dt} = 100\frac{d\theta}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -0.07 \text{ rad/s}$$

$$x^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta$$

$$x^2 = 50000 - 40000\cos\theta$$

29 $$2x\frac{dx}{dt} = 40000\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20000\sin\theta}{x}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\cos\theta = \frac{50000 - x^2}{40000}$$

عندما $x = 200$ فإن: $\cos\theta = \frac{50000-40000}{40000} = \frac{1}{4}$

ومنه: $\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=200} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200} \times -0.07 = -\frac{7\sqrt{15}}{4} \text{ m/s}$$

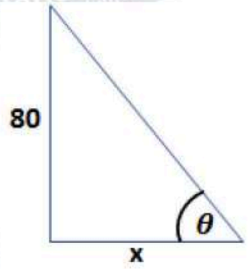
<u>الحالة الثانية:</u> العداء A إلى يسار B

عندئذ يتزايد طول القوس L، ويكون $\frac{dL}{dt} = 7$ ، ويكون $\frac{d\theta}{dt} = 0.07$ rad/s، وعليه فإن:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=200} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200} \times 0.07 = \frac{7\sqrt{15}}{4} \text{ m/s}$$

إذن، عندما تكون المسافة بين العدائين 200 m، فإنهما يقتربان من بعضهما أو يتباعدان عن بعضهما بسرعة مقدارها $\frac{7\sqrt{15}}{4}$ m/s

ليكن طول ظل المبنى x ، وزاوية ارتفاع الشمس θ.



الشمس في هذا اليوم ستمر فوق المبنى تمامًا، يعني أن الزاوية θ متزايدة.

المعطى: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi \text{ rad}}{24h} = \frac{\pi}{12}\frac{\text{rad}}{h} = \frac{\pi \text{ rad}}{12\times 60 \text{ min}} = \frac{\pi}{720} \text{ rad/min}$

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=60}$

30

العلاقة التي تربط بين المتغيرين هي: $\tan\theta = \frac{80}{x}$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{80}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x^2\sec^2\theta}{80} \times \frac{d\theta}{dt}$$

عندما $x = 60$ فإن: طول وتر المثلث القائم في الشكل أعلاه يساوي $100 = \sqrt{60^2+80^2}$

ومنه: $\sec\theta = \frac{100}{60} = \frac{5}{3}$

إذن: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=60} = -\frac{60^2\left(\frac{25}{9}\right)}{80} \times \frac{\pi}{720} = -\frac{25\pi}{144} \text{ m/min}$

لتحويل الوحدة إلى cm/ min نضرب السرعة في 100، فتكون $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=60} = -\frac{2500\pi}{144} \text{ cm/min}$

إذن يتناقص طول ظل البناية في تلك اللحظة بسرعة مقدارها 54.5 cm/min تقريبًا.