



الدرس الرابع: الاشتقاق الضمني

مسألة اليوم صفحة 58

$$\tan \theta = \frac{4x}{x^2 + 252}$$

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أن:

$$\sec^2 \theta \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2 + 252)(4) - (4x)(2x)}{(x^2 + 252)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1008 - 4x^2}{\sec^2 \theta (x^2 + 252)^2}$$

$$= \frac{1008 - 4x^2}{(1 + \tan^2 \theta)(x^2 + 252)^2}$$

$$= \frac{1008 - 4x^2}{\left(1 + \frac{16x^2}{(x^2 + 252)^2}\right)(x^2 + 252)^2}$$

$$= \frac{1008 - 4x^2}{(x^2 + 252)^2 + 16x^2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 60

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$2x + 5y^2 = \sin y$$

$$2 + 10y \frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} (10y - \cos y) = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{10y - \cos y}$$

أتحقق من فهمي صفحة 62





a	$3xy^2 + y^3 = 8$ $6xy \frac{dy}{dx} + 3y^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{3y^2}{6xy + 3y^2}$
b	$\tan(x - y) = 2xy^3 + 1$ $\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) \sec^2(x - y) = 6xy^2 \frac{dy}{dx} + 2y^3$ $\sec^2(x - y) - \sec^2(x - y) \frac{dy}{dx} = 6xy^2 \frac{dy}{dx} + 2y^3$ $\frac{dy}{dx} (6xy^2 + \sec^2(x - y)) = \sec^2(x - y) - 2y^3$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(x - y) - 2y^3}{6xy^2 + \sec^2(x - y)}$
c	$x^2 = \frac{x - y}{x + y}$ $2x = \frac{(x + y) \left(1 - \frac{dy}{dx}\right) - (x - y) \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)}{(x + y)^2}$ $2x(x + y)^2 = x - x \frac{dy}{dx} + y - y \frac{dy}{dx} - x - x \frac{dy}{dx} + y + y \frac{dy}{dx}$ $2x \frac{dy}{dx} = 2y - 2x(x + y)^2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x(x + y)^2}{2x} = \frac{y - x(x + y)^2}{x}$ <p>أو يمكن تبسيط العلاقة قبل الاشتقاق كالآتي:</p> $x^2 = \frac{x - y}{x + y} \rightarrow x^3 + x^2 y = x - y$ $\rightarrow 3x^2 + x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = 1 - \frac{dy}{dx}$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2 - 2xy$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} (1 + x^2) = 1 - 3x^2 - 2xy$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3x^2 - 2xy}{1 + x^2}$

أتحقق من فهمي صفحة 63



$$y^2 = \ln x \rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

a

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2xy}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(e,1)} = \frac{1}{2e}$$

نجد قيمة y عندما $6x =$

$$(y - 3)^2 = 4(6 - 5) \rightarrow (y - 3)^2 = 4$$

$$\rightarrow y - 3 = \pm 2$$

$$\rightarrow y = 5 \text{ or } y = 1$$

باشتقاق طرفي العلاقة $(y - 3)^2 = 4(x - 5)$ بالنسبة إلى x ينتج أن:

$$2(y - 3) \frac{dy}{dx} = 4$$

b

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y - 3}$$

ميل المماس عند النقطة الأولى هو:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(6,1)} = \frac{2}{1 - 3} = -1$$

وميل المماس عند النقطة الثانية هو:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(6,5)} = \frac{2}{5 - 3} = 1$$

أتحقق من فهمي صفحة 65

منهاجي

متعة التعليم الهادف





$$x^3 + y^3 - 3xy = 17 \rightarrow 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 3x \frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

بتعويض $x=2$ و $y=3$ ينتج أن:

$$3(2)^2 + 3(3)^2 \frac{dy}{dx} - 3(2) \frac{dy}{dx} - 3(3) = 0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{(2,3)} = -\frac{1}{7}$$

ميل المماس هو: $-\frac{1}{7}$

إذن، معادلة المماس هي:

$$y - 3 = -\frac{1}{7}(x - 2)$$

$$y = -\frac{1}{7}x + \frac{23}{7}$$

أتحقق من فهمي صفحة 66

منهاجي

متعة التعليم الهادف





$$xy + y^2 = 2x \rightarrow x \frac{dy}{dx} + y + 2y \frac{dy}{dx} = 2$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2 - y}{x + 2y}$$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + 2y) \left(-\frac{dy}{dx}\right) - (2 - y) \left(1 + 2\frac{dy}{dx}\right)}{(x + 2y)^2}$$

$$= \frac{(x + 2y) \left(\frac{y - 2}{x + 2y}\right) - (2 - y) \left(1 + 2\frac{2 - y}{x + 2y}\right)}{(x + 2y)^2}$$

$$= \frac{(x + 2y)(y - 2) - (2 - y)(x + 4)}{(x + 2y)^3}$$

$$= \frac{2xy - 4x + 2y^2 - 8}{(x + 2y)^3}$$

أتحقق من فهمي صفحة 67

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 4t}{6t} = \frac{1}{2}t - \frac{2}{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2}}{6t} = \frac{1}{12t}$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=2} = \frac{1}{24}$$

أتحقق من فهمي صفحة 69

منهاجي

متعة التعليم الهادف





a	$y = x^{\sqrt{x}} \rightarrow \ln y = \ln x^{\sqrt{x}}$ $\rightarrow \ln y = \sqrt{x} \ln x$ $\rightarrow \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \sqrt{x} \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{y}{2\sqrt{x}} \ln x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \ln x$
b	$y = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}} \rightarrow \ln y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$ $\rightarrow \ln y = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x^4+1}$ $\rightarrow \ln y = \frac{1}{2} (\ln(x-1) - \ln(x^4+1))$ $\rightarrow \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{2x^3}{x^4+1}$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2(x-1)} + \frac{2x^3}{x^4+1} \right) \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$
أدرب وأحل المسائل صفحة 69	
1	$x^2 - 2y^2 = 4$ $2x - 4y \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$





2	$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$ $\frac{-2x}{x^4} + \frac{-2y \frac{dy}{dx}}{y^4} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^4} \times \frac{y^4}{-2y} = -\frac{y^3}{x^3}$
3	$(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$ $2(x^2 + y^2) \left(2x + 2y \frac{dy}{dx} \right) = 50 \left(2x - 2y \frac{dy}{dx} \right)$ $\frac{dy}{dx} (yx^2 + y^3 + 25y) = 25x - x^3 - xy^2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{25x - x^3 - xy^2}{yx^2 + y^3 + 25y}$
4	$e^x y = x e^y$ $(e^x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (y)(e^x) = (x) \left(e^y \frac{dy}{dx} \right) + (e^y)(1)$ $\frac{dy}{dx} (e^x - x e^y) = e^y - y e^x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y - y e^x}{e^x - x e^y}$
5	$3^x = y - 2xy$ $3^x \ln 3 = \frac{dy}{dx} - 2x \frac{dy}{dx} - 2y$ $\frac{dy}{dx} (1 - 2x) = 2y + 3^x \ln 3$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 3^x \ln 3}{1 - 2x}$



6	$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$
7	$x = \sec \frac{1}{y}$ $1 = -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} \sec \frac{1}{y} \tan \frac{1}{y}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{\sec \frac{1}{y} \tan \frac{1}{y}} = -y^2 \cos \frac{1}{y} \cot \frac{1}{y}$
8	$(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$ $2(\sin \pi x + \cos \pi y)^1 \left(\pi \cos \pi x - \pi \sin \pi y \frac{dy}{dx} \right) = 0$ $\frac{dy}{dx} (\pi \sin \pi y) (\sin \pi x + \cos \pi y) = (\pi \cos \pi x) (\sin \pi x + \cos \pi y)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{(\pi \cos \pi x) (\sin \pi x + \cos \pi y)}{(\pi \sin \pi y) (\sin \pi x + \cos \pi y)} = \frac{\cos \pi x}{\sin \pi y}$
9	$\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5 \rightarrow x^2 + y^4 = 5xy^2$ $\rightarrow 2x + 4y^3 \frac{dy}{dx} = 10xy \frac{dy}{dx} + 5y^2$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} (4y^3 - 10xy) = 5y^2 - 2x$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{5y^2 - 2x}{4y^3 - 10xy}$



10	$x + y = \cos xy$ $1 + \frac{dy}{dx} = - \left(x \frac{dy}{dx} + y \right) \sin xy$ $\frac{dy}{dx} (-x \sin xy - 1) = 1 + y \sin xy$ $\frac{dy}{dx} = - \frac{1 + y \sin xy}{x \sin xy + 1}$
11	$x^2 + y^2 = \ln(x + y)^2$ $2x + 2y \frac{dy}{dx} = \frac{2(x + y) \left(1 + \frac{dy}{dx} \right)}{(x + y)^2}$ $x + y \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{dy}{dx}}{x + y}$ $\frac{dy}{dx} (xy + y^2 - 1) = 1 - x^2 - xy$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2 - xy}{xy + y^2 - 1}$
12	$\sin x \cos y = x^2 - 5y$ $(\sin x) \left(-\sin y \frac{dy}{dx} \right) + (\cos y)(\cos x) = 2x - 5 \frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx} (\sin x \sin y - 5) = \cos x \cos y - 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cos y - 2x}{\sin x \sin y - 5}$



$$2y^2 + 2xy - 1 = 0$$

أجد قيمة y عندما $x = \frac{1}{2}$

$$2y^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)y - 1 = 0 \rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0$$

$$\rightarrow (2y - 1)(y + 1) = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}, y = -1$$

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أن:

13

$$4y \frac{dy}{dx} + 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2y + x}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\left(\frac{11}{2}, 2\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\left(\frac{1}{2}, -1\right)} = \frac{1}{-2 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}$$

منهاجي

متعة التعليم الهادف





14	$y^3 + 2x^2 = 11y$ <p>أجد قيمة x عندما $y = 1$:</p> $1 + 2x^2 = 11 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ <p>باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أن:</p> $3y^2 \frac{dy}{dx} + 4x = 11 \frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{11 - 3y^2}$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{(-\sqrt{5}, 1)} = \frac{-\sqrt{5}}{2}$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{(\sqrt{5}, 1)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
15	$x^2 + y^2 = 25$ $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ $2(3) + 2(-4) \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right _{(3, -4)} = \frac{3}{4}$
16	$x^2 y = 4(2 - y)$ $x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = -4 \frac{dy}{dx}$ $4 \frac{dy}{dx} + 2(2)(1) = -4 \frac{dy}{dx} \rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right _{(2, 1)} = -\frac{1}{2}$
17	$e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1$ $e^{\sin x} \cos x - e^{\cos y} \sin y \frac{dy}{dx} = 0$ $e^{\sin \frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} - e^{\cos \frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right _{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} = 0$



18	$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5$ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$ $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}(1) \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx}\bigg _{(8,1)} = -\frac{1}{2}$
19	$x^2 + xy + y^2 = 13$ $2x + x \frac{dy}{dx} + y + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ $-8 - 4 \frac{dy}{dx} + 3 + 6 \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx}\bigg _{(-4,3)} = \frac{5}{2}$ $y - 3 = \frac{5}{2}(x + 4) \rightarrow y = \frac{5}{2}x + 13$ <p>ميل المماس هو: معادلة المماس هي:</p>
20	$x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2)$ $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2y \frac{dy}{dx}}{x^2 + y^2}$ $1 + \frac{dy}{dx} = 2 \rightarrow \frac{dy}{dx}\bigg _{(1,0)} = 1$ $y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1$ <p>معادلة المماس هي:</p>
21	$x + y = \sin y$ $1 + \frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-1 + \cos y}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin y \frac{dy}{dx}}{(-1 + \cos y)^2} = \frac{\sin y \left(\frac{1}{-1 + \cos y}\right)}{(-1 + \cos y)^2} = \frac{\sin y}{(-1 + \cos y)^3}$



22	$4y^3 = 6x^2 + 1$ $12y^2 \frac{dy}{dx} = 12x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2 - 2xy \frac{dy}{dx}}{y^4} = \frac{y - 2x \left(\frac{x}{y^2} \right)}{y^3} = \frac{y^3 - 2x^2}{y^5}$
23	$xy + e^y = e$ $x \frac{dy}{dx} + y + e^y \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + e^y}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + e^y) \left(-\frac{dy}{dx} \right) + y \left(1 + e^y \frac{dy}{dx} \right)}{(x + e^y)^2}$ $= \frac{(x + e^y) \left(\frac{y}{x + e^y} \right) + y \left(1 + e^y \frac{-y}{x + e^y} \right)}{(x + e^y)^2}$ $= \frac{(x + e^y)(y) + y(x + e^y - ye^y)}{(x + e^y)^3}$ $= \frac{2yx + 2ye^y - y^2e^y}{(x + e^y)^3}$
24	$(x - 6)(y + 4) = 2$ $(x - 6) \frac{dy}{dx} + (y + 4) = 0$ $(7 - 6) \frac{dy}{dx} + (-2 + 4) = 0 \rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right _{(7,-2)} = -2$ <p>إذن ميل العمودي على المماس هو $\frac{1}{2}$</p> <p>معادلة العمودي على المماس هي:</p> $y + 2 = \frac{1}{2}(x - 7) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$



25	$3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ $6x + 2x \frac{dy}{dx} + 2y + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x - y}{x + y}$ $\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{-3x - y}{x + y} = 0 \rightarrow -3x - y = 0 \rightarrow y = -3x$ $3x^2 + 2x(-3x) + (-3x)^2 = 6 \rightarrow 6x^2 = 6 \rightarrow x = \pm 1$ <p>إذن للمنحنى مماسان أفقيان عند النقطتين $(1, -3), (-1, 3)$</p>
26	$x + y^2 = 1$ $1 + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2y}$ <p>ميل المستقيم $x + 2y = 0$ هو $-\frac{1}{2}$</p> $\frac{-1}{2y} = -\frac{1}{2} \rightarrow y = 1$ $\rightarrow x + (1)^2 = 1 \rightarrow x = 0$ <p>النقطة المطلوبة هي $(0, 1)$</p>
27	$y^3 = x^2$ $3y^2 \frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}, y \neq 0$ <p>ميل المستقيم $y + 3x - 5 = 0$ هو -3 إذن ميل العمودي عليه يساوي $\frac{1}{3}$</p> $\frac{2x}{3y^2} = \frac{1}{3} \rightarrow 2x = y^2 \rightarrow x = \frac{1}{2}y^2$ $y^3 = x^2 \rightarrow y^3 = \frac{1}{4}y^4 \rightarrow 1 = \frac{1}{4}y \rightarrow y = 4$ $\rightarrow x = \frac{1}{2}(4)^2 \rightarrow x = 8$ <p>النقطة المطلوبة هي $(8, 4)$</p>





28

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10, x \neq 0, y \neq 0$$

$$\frac{y - x \frac{dy}{dx}}{y^2} + \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{y - x \frac{dy}{dx}}{2y^2 \sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{y - x \frac{dy}{dx}}{2x^2 \sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\rightarrow \left(y - x \frac{dy}{dx} \right) \left(x^2 \sqrt{\frac{y}{x}} \right) = \left(y - x \frac{dy}{dx} \right) \left(y^2 \sqrt{\frac{x}{y}} \right)$$

$$x^2 y \sqrt{\frac{y}{x}} - x^3 \sqrt{\frac{y}{x}} \frac{dy}{dx} = y^3 \sqrt{\frac{x}{y}} - x y^2 \sqrt{\frac{x}{y}} \frac{dy}{dx}$$

$$(x y^2 \sqrt{\frac{x}{y}} - x^3 \sqrt{\frac{y}{x}}) \frac{dy}{dx} = y^3 \sqrt{\frac{x}{y}} - x^2 y \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^3 \sqrt{\frac{x}{y}} - x^2 y \sqrt{\frac{y}{x}}}{x y^2 \sqrt{\frac{x}{y}} - x^3 \sqrt{\frac{y}{x}}} = \frac{y(y^2 \sqrt{\frac{x}{y}} - x^2 \sqrt{\frac{y}{x}})}{x(y^2 \sqrt{\frac{x}{y}} - x^2 \sqrt{\frac{y}{x}})} = \frac{y}{x}$$

يمكن اختصار العامل المشترك من البسط والمقام لأنه لا يساوي صفراً إلا إذا كان $x = y$ وهذا لا يتسق مع العلاقة الأصلية.

29

$$y = x^{\frac{1}{x}}, x > 0$$

$$\ln y = \ln x^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln x$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1 - \ln x)}{x^2}$$

$$\frac{y(1 - \ln x)}{x^2} = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e \rightarrow y = e^{\frac{1}{e}}$$

النقطة المطلوبة هي $(e, e^{\frac{1}{e}})$





$$x^2 + y^2 = 100$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$-\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \rightarrow y = -\frac{4}{3}x$$

30

$$x^2 + y^2 = 100 \rightarrow x^2 + \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 = 100$$

$$\rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 100$$

$$\rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6$$

إذا كانت $x = 6$ ، فإن $y = -\frac{4}{3}(6) = -8$

وإذا كانت $x = -6$ ، فإن $y = -\frac{4}{3}(-6) = 8$

إذن، هناك نقطتان تحققان المطلوب هما $(6, -8)$ ، $(-6, 8)$

منهاجي

متعة التعليم الهادف





31	$s(t) = t^{1/t}$ $\ln s(t) = \ln t^{1/t}$ $\ln s(t) = \frac{1}{t} \ln t$ $\frac{v(t)}{s(t)} = \left(\frac{1}{t}\right) \left(\frac{1}{t}\right) + (\ln t) \left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1 - \ln t}{t^2} \rightarrow v(t) = s(t) \times \frac{1 - \ln t}{t^2}$ $\rightarrow v(t) = t^{1/t} \times \frac{1 - \ln t}{t^2}$ $\ln v(t) = \ln \left(t^{1/t} \times \frac{1 - \ln t}{t^2} \right)$ $\rightarrow \ln v(t) = \ln t^{1/t} + \ln(1 - \ln t) - \ln t^2$ $\rightarrow \ln v(t) = \frac{1}{t} \ln t + \ln(1 - \ln t) - 2 \ln t$ $\rightarrow \frac{a(t)}{v(t)} = \frac{1 - \ln t}{t^2} + \frac{-\frac{1}{t}}{1 - \ln t} - \frac{2}{t}$ $\rightarrow a(t) = v(t) \left(\frac{1 - \ln t}{t^2} + \frac{-\frac{1}{t}}{1 - \ln t} - \frac{2}{t} \right)$ $= \left(t^{1/t} \times \frac{1 - \ln t}{t^2} \right) \left(\frac{1 - \ln t}{t^2} - \frac{1}{t(1 - \ln t)} - \frac{2}{t} \right)$ $= t^{1/t} \left(\frac{(1 - \ln t)^2}{t^4} - \frac{1}{t^3} - \frac{2(1 - \ln t)}{t^3} \right)$
32	$t^{1/t} \times \frac{1 - \ln t}{t^2} = 0 \rightarrow 1 - \ln t = 0 \rightarrow \ln t = 1 \rightarrow t = e$ $a(t) = e^{1/e} \left(\frac{(1 - \ln e)^2}{e^4} - \frac{1}{e^3} - \frac{2(1 - \ln e)}{e^3} \right) = -e^{-3} \text{ m/s}^2$



33	$y = \ln x, x > 0$ $e^y = x$ <p>بالتحويل إلى الصيغة الأسية ينتج أن: باشتقاق الطرفين ضمناً بالنسبة إلى x ينتج أن:</p> $e^y \frac{dy}{dx} = 1$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$ <p>بتعويض $e^y = x$ ينتج أن:</p> $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$
34	$y = (x^2 + 3)^x \rightarrow \ln y = \ln(x^2 + 3)^x$ $\rightarrow \ln y = x \ln(x^2 + 3)$ $\rightarrow \frac{dy}{y} = (x) \left(\frac{6x}{x^2 + 3} \right) + \ln(x^2 + 3)$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{6x^2}{x^2 + 3} + \ln(x^2 + 3) \right) (x^2 + 3)^x$
35	$y = \frac{(x^4 + 1)(\sqrt{x + 2})}{2x^2 + 2x + 1} \rightarrow \ln y = \ln \frac{(x^4 + 1)(\sqrt{x + 2})}{2x^2 + 2x + 1}$ $\rightarrow \ln y = \ln(x^4 + 1) + \ln(\sqrt{x + 2}) - \ln(2x^2 + 2x + 1)$ $\rightarrow \ln y = \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2} \ln(x + 2) - \ln(2x^2 + 2x + 1)$ $\rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{4x^3}{x^4 + 1} + \frac{1}{2x + 4} - \frac{4x + 2}{2x^2 + 2x + 1}$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{4x^3}{x^4 + 1} + \frac{1}{2x + 4} - \frac{4x + 2}{2x^2 + 2x + 1} \right) \frac{(x^4 + 1)(\sqrt{x + 2})}{2x^2 + 2x + 1}$



36	$y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)} \rightarrow \ln y = \ln \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$ $\rightarrow \ln y = \frac{1}{2} \ln x^2(x+1)(x+2)$ $\rightarrow \ln y = \frac{1}{2} \ln x^2 + \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x+2)$ $\rightarrow \ln y = \ln x + \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x+2)$ $\rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+2)}$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+2)} \right) \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$
37	$y = x^{\sin x} \rightarrow \ln y = \ln x^{\sin x}$ $\rightarrow \ln y = (\sin x) \ln x$ $\rightarrow \frac{dy}{y} = (\sin x) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)(\cos x)$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{\sin x}{x} + (\ln x)(\cos x) \right) x^{\sin x}$
38	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{\cos t} = -\sec^3 t$ $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right _{t=\frac{\pi}{4}} = -\sec^3 \frac{\pi}{4} = -2\sqrt{2}$





39	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 1}{-e^{-t}} = e^t(-3t^2 - 1)$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(e^t)(-6t) + (-3t^2 - 1)(e^t)}{-e^{-t}} = e^{2t}(1 + 6t + 3t^2)$ $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right _{t=0} = e^0(1) = 1$
40	$x^3 + y^3 = 6xy$ $y = x \rightarrow x^3 + x^3 = 6x^2$ $\rightarrow x^3 = 3x^2$ $\rightarrow x^2(x - 3) = 0$ $\rightarrow x = 0 \text{ or } x = 3$ <p>نقطة التقاطع في الربع الأول هي (3, 3)</p> $3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 6x \frac{dy}{dx} + 6y \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right _{(3,3)} = \frac{6-9}{9-6} = -1$ <p>ميل المماس هو:</p> $y - 3 = -(x - 3) \rightarrow y = -x + 6$ <p>معادلة المماس هي:</p>



41

بما أن المماس أفقي، فإن $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{2y - x^2}{y^2 - 2x} = 0 \rightarrow 2y - x^2 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2$$

$$x^3 + y^3 = 6xy \rightarrow x^3 + \frac{1}{8}x^6 = 3x^3$$

$$\rightarrow \frac{1}{8}x^6 - 2x^3 = 0$$

$$\rightarrow x^6 - 16x^3 = 0$$

$$\rightarrow x^3(x^3 - 16) = 0 \rightarrow x = 0, x = \sqrt[3]{16}$$

$$\rightarrow y = 0, y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}$$

النقطة المطلوبة في الربع الأول هي: $(\sqrt[3]{16}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2})$

42

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

لتكن نقطة تماس الشعاع مع منحنى الدائرة:

$$m = \frac{0 - y}{1.25 - x} = -\frac{x}{y} \rightarrow y^2 = 1.25x - x^2$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 + 1.25x - x^2 = 1$$

$$\rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$\rightarrow y = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

فتكون النقطة $P\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$
ميل المماس عند النقطة P :

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)} = -\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$m = \frac{h - 0}{-2 - \frac{5}{4}} = -\frac{4}{3} \rightarrow h = \frac{13}{3}$$

ارتفاع المصباح يساوي $\frac{13}{3}$ وحدة



43	$x^2 - y^2 = 1 \rightarrow 2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$
44	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t}$
45	$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec t}{\tan t} = \frac{x}{y}$ <p>المقداران الجبريان اللذان يمثلان $\frac{dy}{dx}$ متكافئان، لأنه من نص السؤال: $\frac{\sec t}{\tan t} = \frac{x}{y}$ ومنه فإن $y = \tan t$ و $x = \sec t$</p>
46	$\frac{dy}{dx} = 2 \rightarrow \frac{x}{y} = 2 \rightarrow x = 2y$ $x^2 - y^2 = 1 \rightarrow (2y)^2 - y^2 = 1$ $\rightarrow y^2 = \frac{1}{3}$ $\rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}, y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ <p>النقاط التي يكون عندها ميل المماس 2 هي: $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$</p>



$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{dy}{2\sqrt{y}} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

نفرض نقطة التماس هي (x_1, y_1) فيكون ميل المماس:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_1, y_1)} = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

المقطع x والمقطع y للمماس:

$$x = 0 \rightarrow y - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(-x_1) \rightarrow y = y_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$$

$$y = 0 \rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1) \rightarrow x = x_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$$

مجموع المقطعين:

$$\begin{aligned} y_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} + x_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} &= y_1 + 2\sqrt{y_1}\sqrt{x_1} + x_1 \\ &= (\sqrt{y_1} + \sqrt{x_1})^2 \\ &= (\sqrt{k})^2 = k \end{aligned}$$

47





$$y = x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y = \sqrt{x} \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sqrt{x}) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}} (x^{\sqrt{x}})$$

48

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(4,16)} = \frac{2 + \ln 4}{2\sqrt{4}} (16) = 8 + 4 \ln 4$$

ميل المماس:

$$y - 16 = (8 + 4 \ln 4)(x - 4)$$

المقطع x والمقطع y للمماس:

$$x = 0 \rightarrow y - 16 = (8 + 4 \ln 4)(-4) \rightarrow y = -16 - 16 \ln 4$$

$$y = 0 \rightarrow -16 = (8 + 4 \ln 4)(x - 4) \rightarrow x = \frac{4 + 4 \ln 4}{2 + \ln 4}$$

مساحة المثلث OBC بوحدة المساحة هي:

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{4 + 4 \ln 4}{2 + \ln 4} \times |-16 - 16 \ln 4| = \frac{32(1 + \ln 4)^2}{2 + \ln 4}$$

منهاجي

متعة التعليم الهادف

