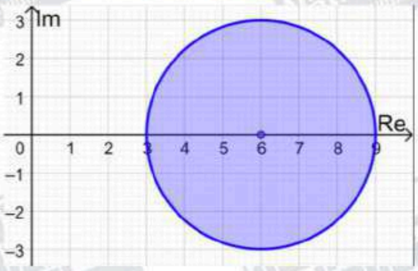
اختبار نهاية الوحدة الثالثة

1	c
2	b
3	c
4	b
5	a
6	d
7	$\sqrt{45-28i} = x+iy \to 45-28i = x^2-y^2+2ixy$ $\to x^2-y^2=45 \quad ,2xy=-28 \to y=-\frac{14}{x}$ $\to x^2-\frac{196}{x^2}=45$ $\to x^4-45x^2-196=0$ $\to (x^2-49)(x^2+4)=0$ $\to x=7, y=-2 \quad or\ x=-7, y=2$ الجذران التربيعيان للعدد $45-28i$ هما: $7-2i$، و $-7+2i$
8	$\lvert w\rvert = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{12}}$ $Arg(\omega) = -\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)\right) = -\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -2.28$
9	$z+w=a-8+10i \to \lvert z+\omega\rvert = \sqrt{(a-8)^2+100}=26$ $\to (a-8)^2+100=676 \to (a-8)^2=576 \to a-8=-24 \to a=-16$
10	$\omega = \frac{14-31i}{3-2i}\times\frac{3+2i}{3+2i} = \frac{104-65i}{9+4} = 8-5i$

11	$(8-5i)^2+c(8-5i)+d=0 \to 64-80i-25+8c-5ci+d=0$ $\to 39+d+8c-i(80+5c)=0$ $\to 39+d+8c=0\,, 80+5c=0$ $\to c=-16, d=89$ **حل آخر:** $\omega=8-5i \to \bar{\omega}=8+5i$ $\to c=-(\omega+\bar{\omega})=-16$ $\to d=\omega\times\bar{\omega}=64+25=89$
12	$\lvert z-6\rvert \le 3$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\lvert z-6\rvert=3$ ، وهو دائرة مركزها $(6,0)$ وطول نصف قطرها 3 وحدات. وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلاً. أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها. 

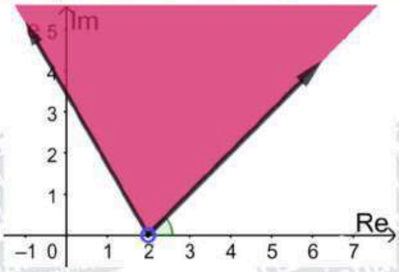
13

$$\frac{\pi}{4} \leq \mathbf{Arg}(z-2) \leq \frac{2\pi}{3}$$

يمثل منحنى المعادلة $\mathbf{Arg}(z-2) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2, 0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي

ويمثل منحنى المعادلة $\mathbf{Arg}(z-2) = \frac{2\pi}{3}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2, 0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



14

$$|z+1+i| > |z-3-3i|$$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z+1+i| = |z-3-3i|$

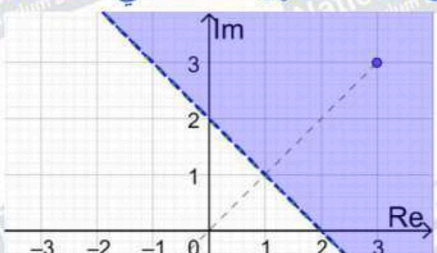
وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(3, 3)$و $(-1, -1)$.

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة،

$$|0+1+i| > |0-3-3i| \rightarrow \sqrt{2} > \sqrt{18} \quad ✗$$

بما أن العدد لا يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي $z = 0$

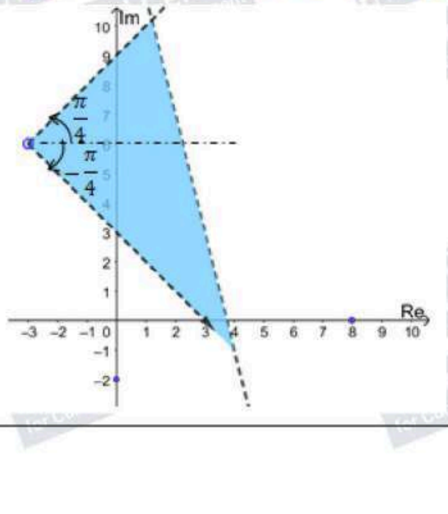


15

$$NO = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$

$$MO = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$$

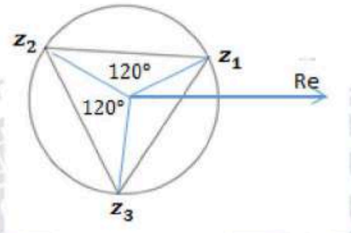
إذن المثلث OMN متطابق الضلعين

16	باستخدام قانون جيوب التمام في المثلث OMN: $(NM)^2 = (NO)^2 + (MO)^2 - 2(NO)(MO)\cos\angle MON$ $\rightarrow \cos\angle MON = -\frac{234-130}{130} = -\frac{4}{5}$
17	$A = \frac{1}{2}(NO)(MO)\sin\angle MON = \frac{1}{2}\times 65 \times \frac{3}{5} = \frac{39}{2}$
18	$\lvert z-8\rvert > \lvert z+2i\rvert$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\lvert z-8\rvert = \lvert z+2i\rvert$ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,-2)$و $(8,0)$. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا. $-\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z+3-6i) < \frac{\pi}{4}$ يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+3-6i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-3,6)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي ويمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+3-6i) = \frac{2\pi}{3}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-3,6)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي. المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه: 

19

$r = |4+2i| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = |z_1| = |z_2| = |z_3|$

إذا وقعت رؤوس مثلث متطابق الأضلاع على دائرة، فإن قياس الزاوية المركزية التي ضلعاها يمران برأسين من رؤوس هذا المثلث يساوي $\frac{2\pi}{3}$



نفرض z_1, z_2, z_3 الأعداد المركبة التي تمثل هذه الرؤوس، حيث $z_1 = 4+2i$ ، وهو في الربع الأول

فإن العدد z_2 يقع في الربع الثاني، والعدد z_3 يقع في الربع الثالث.

$Arg(z_2) = Arg(z_1) + \frac{2\pi}{3},\ Arg(z_2) = Arg(z_1) - \frac{2\pi}{3}$

بما أن $Arg(z_2) = Arg(z_1) + \frac{2\pi}{3}$، و$|z_1| = |z_2|$، فإن z_2 هو ناتج ضرب z_1 في العدد المركب الذي مقياسه 1، و سعته$\frac{2\pi}{3}$ وهو:

$$z = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

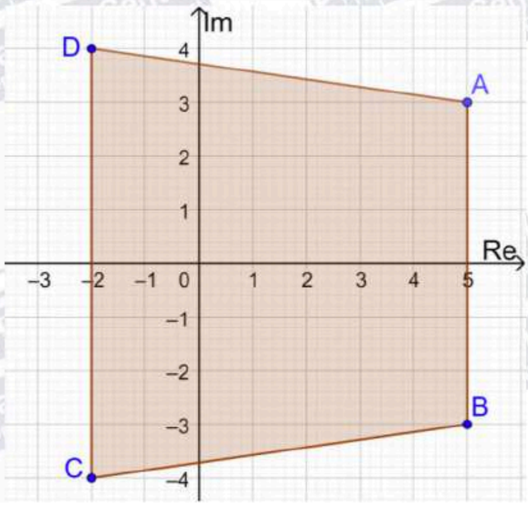
$$z_2 = (4+2i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2i\sqrt{3} - i - 2\sqrt{3}$$

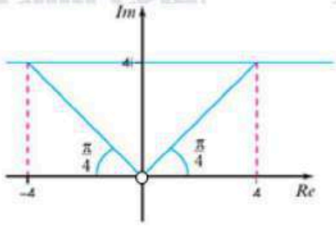
$$= -(2+2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3}-1)i$$

بما أن $Arg(z_3) = Arg(z_1) - \frac{2\pi}{3}$، و$|z_1| = |z_3|$، فإن z_3 هو ناتج قسمة z_1 على العدد $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z_3 = \frac{4+2i}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4+2i}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-2 - 2i\sqrt{3} - i + \sqrt{3}}{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$= \frac{-2 - 2i\sqrt{3} - i + \sqrt{3}}{1} = -2 + \sqrt{3} - (2\sqrt{3}+1)i$$

20	$z^4-6z^3+14z^2-64z+680=0$ بما أن العدد $-2+4i$ هو حل لهذه المعادلة، إذن مرافقه $-2-4i$ يكون حلًّا أيضًا لها ويكون ناتج ضربهما أحد عوامل كثير الحدود المرتبط بهذه المعادلة. $(z-(-2+4i))(z-(-2-4i))=z^2+4z+20$ نقسم $z^4-6z^3+14z^2-64z+680$ على $z^2+4z+20$ فنجد أنّ: $z^4-6z^3+14z^2-64z+680=(z^2+4z+20)(z^2-10z+34)=0$ لإيجاد جذور المعادلة $z^2-10z+34=0$ نستخدم القانون العام لحل المعادلة التربيعية: $z=\frac{10\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{10\pm 6i}{2}=5\pm 3i$ فتكون الجذور الثلاثة المطلوبة هي: $-2-4i$, $5-3i$, $5+3i$
21	 الرباعي ABCD هو شبه منحرف، مساحته بالوحدات المربعة تساوي: $A=\frac{1}{2}(7)(6+8)=49$
22	$0\le \text{Arg}(z-3i)\le\frac{\pi}{3}$

23	$z^2+2z+10=0$ $\Delta=4-40=-36$ مميز المعادلة التربيعية سالب، إذن لهذه المعادلة جذران مركبان مترافقان، وحسب النظرية فإن العددان المركبان المترافقان لهما المقياس نفسه
24	$z_1=\frac{-2+\sqrt{-36}}{2}=-1+3i \rightarrow \text{Arg}(z_1)=\pi-\tan^{-1}3$ $z_2=\frac{-2-\sqrt{-36}}{2}=-1-3i \rightarrow \text{Arg}(z_2)=-(\pi-\tan^{-1}3)$
25	$w=\frac{22+4i}{(2-i)^2}=\frac{22+4i}{3-4i}\times\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{50+100i}{25}=2+4i$
26	$\frac{\pi}{4}\leq \text{Arg}(w+p)\leq\frac{3\pi}{4}$ $\rightarrow\frac{\pi}{4}\leq \text{Arg}(2+4i+p)\leq\frac{3\pi}{4}$ $\rightarrow\frac{\pi}{4}\leq \text{Arg}(2+p+4i)\leq\frac{3\pi}{4}$  نفرض أن العدد $2+p+4i$ هو z، فيكون التمثيل البياني للمتباينة $\frac{\pi}{4}\leq \text{Arg}(z)\leq\frac{3\pi}{4}$ كما في الشكل المجاور والأعداد التي تحقق هذه المتباينة هي الأعداد الواقعة بين الشعاعين المارين بنقطة الأصل وتلاحظ من الرسم أن الجزء الحقيقي للعدد z الذي يحقق هذه المتباينة ينحصر بين 4-، و4 إذن، $-4\leq 2+p\leq 4\rightarrow -6\leq p\leq 2$
27	$u+2v=2i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $iu+v=3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $i\times(2)+(1): v(2+i)=5i \rightarrow v=\frac{5i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}=\frac{10i+5}{4+1}=1+2i$ $\rightarrow u=2i-2(1+2i)=-2-2i$