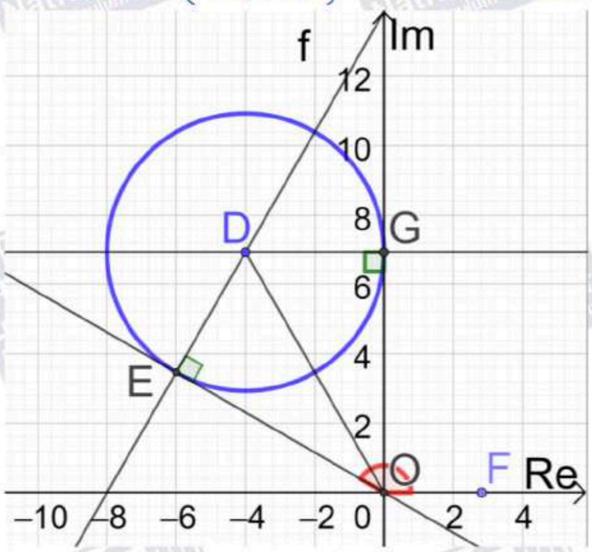
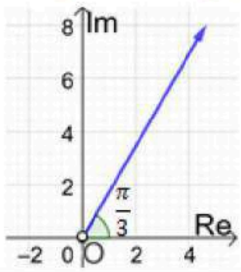
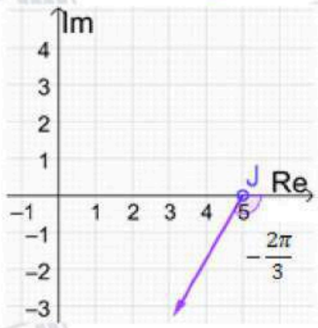
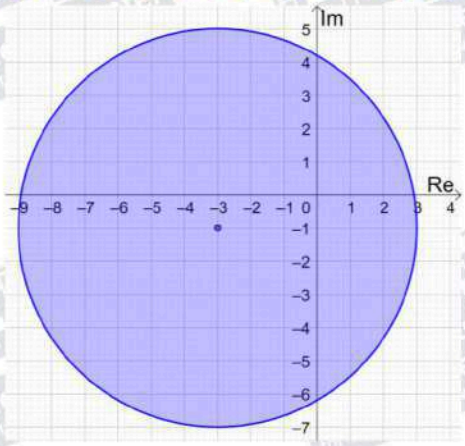
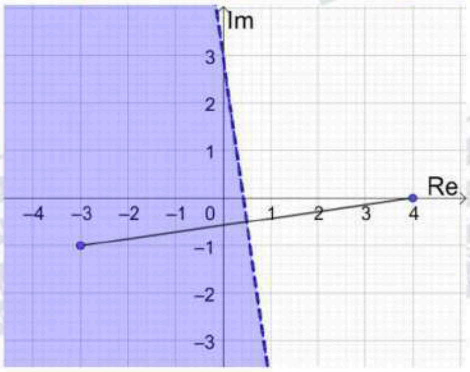
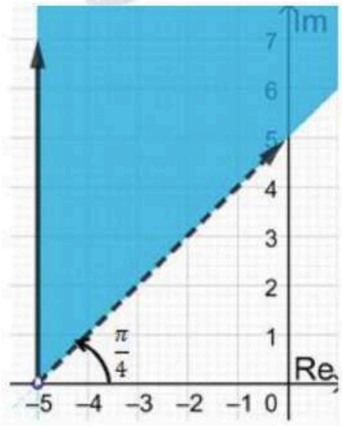
الدرس الثالث: المحل الهندسي في المستوى المركب

<table>
<tr><td colspan="2">مسألة اليوم صفحة 168</td></tr>
<tr><td></td><td>المنطقة المظللة تمثل الأعداد المركبة التي تبعد عن العدد $2+3i$ مسافة تقل عن 4 وحدات، فتكون المتباينة المطلوبة هي:
$|z-(2+3i)|<4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 169</td></tr>
<tr><td></td><td>$|z+5-4i|=7 \ \rightarrow |z-(-5+4i)|=7$
وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها $(-5,4)$ وطول نصف قطرها 7
$|z+5-4i|=7 \ \rightarrow |x+iy+5-4i|=7$
$\rightarrow |(x+5)+(y-4)i|=7$
$\rightarrow \sqrt{(x+5)^2+(y-4)^2}=7$
$\rightarrow (x+5)^2+(y-4)^2=49$
وهذه معادلة دائرة مركزها $(-5,4)$ وطول نصف قطرها 7</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 171</td></tr>
<tr><td>a</td><td>$|z+4-4\sqrt{3}i|=4 \ \rightarrow |z-(-4+4\sqrt{3}i)|=4$
وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها $(-4,4\sqrt{3})$ وطول نصف قطرها 4
</td></tr>
</table>

b	أكبر سعة للعدد المركب z تساوي قياس الزاوية $\angle FOE$ المحصورة بين مماس الدائرة OE والمحور الحقيقي الموجب مماسا الدائرة OG وOE عموديان على الترتيب على نصفي القطرين DG وDE، المثلثان OGD وOED متطابقان بثلاثة أضلاع، إذن الزاويتان $\angle GOD$ و $\angle EOD$ متطابقتان $\tan \angle GOD = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \angle GOD = \frac{\pi}{6}$ $Arg(z) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة المعطاة هي $\frac{5\pi}{6}$
	أتحقق من فهمي صفحة 172
	$\|z+1\| = \|z-5i\| \rightarrow \|z-(-1)\| = \|z-(5i)\|$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,5)$, $(-1,0)$ $\|z+1\| = \|z-5i\| \rightarrow \|x+iy+1\| = \|x+iy-5i\|$ $\rightarrow \|(x+1)+iy\| = \|x+i(y-5)\|$ $\rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-5)^2}$ $\rightarrow (x+1)^2+y^2 = x^2+(y-5)^2$ $\rightarrow x^2+2x+1+y^2 = x^2+y^2-10y+25$ $\rightarrow 2x+10y-24=0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $x+5y-12=0$
	أتحقق من فهمي صفحة 174

a	$Arg(z) = \frac{\pi}{3} \rightarrow Arg\big(z-(0)\big) = \frac{\pi}{3}$ هذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(0,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي 
b	$Arg(z-5) = -\frac{2\pi}{3} \rightarrow Arg\big(z-(5)\big) = -\frac{2\pi}{3}$ هذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(5,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي 
	أتحقق من فهمي صفحة 177

a	$\lvert z+3+i\rvert \le 6$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\lvert z+3+i\rvert = 6$ وهو دائرة مركزها $(-3,-1)$، وطول نصف قطرها 6 وحدات. وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا. أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد مسافة تقل عن 6 وحدات عن مركز الدائرة أو تساويها. 
b	$\lvert z+3+i\rvert < \lvert z-4\rvert$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\lvert z+3+i\rvert = \lvert z-4\rvert$ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(-3,-1)$ و $(4,0)$. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا. نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار نقطة الأصل مثلاً وتعويضها في المتباينة، $\lvert 0+3+i\rvert < \lvert 0-4\rvert \rightarrow \sqrt{10} < 4$ ✓ بما أن نقطة الأصل تحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي نقطة الأصل. 

c	$\frac{\pi}{4} < \mathbf{Arg}(z+5) \leq \frac{\pi}{2}$ يمثل منحنى المعادلة $\mathbf{Arg}(z+5) = \frac{\pi}{2}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-5, 0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي. و يمثل منحنى المعادلة $\mathbf{Arg}(z+5) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-5, 0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي. المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء المظلل من المستوى المركب كالآتي: 

أتحقق من فهمي صفحة 178

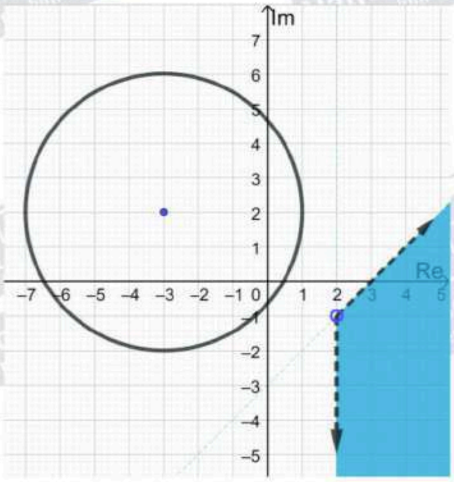
$|z+3-2i| \geq 4 \quad , \qquad -\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$

تمثل المعادلة $|z+3-2i| = 4$ دائرة مركزها النقطة $(-3,2)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات، وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

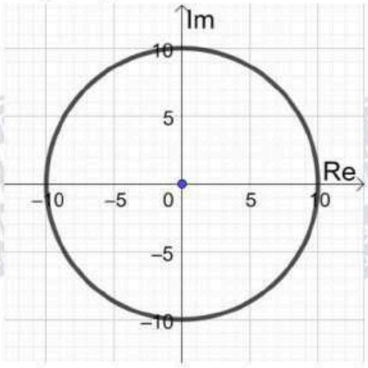
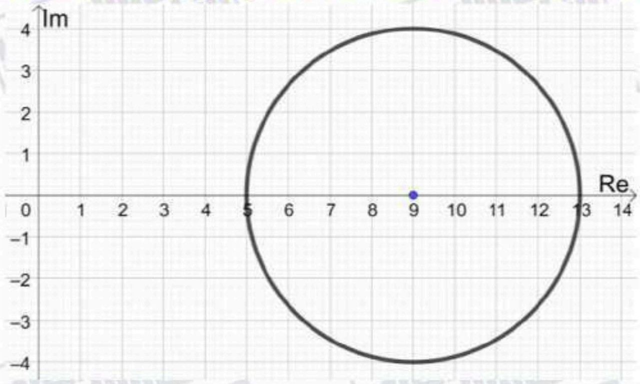
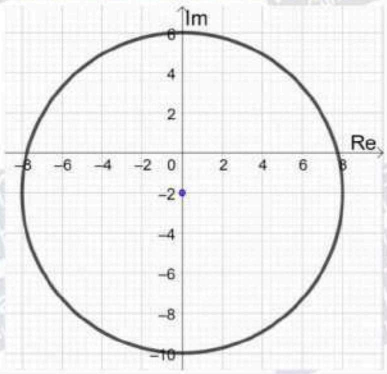
تمثل المعادلة $\text{Arg}(z-2+i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا يبدأ بالنقطة $(2,-1)$ ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم الشعاع متقطعًا.

تمثل المعادلة $\text{Arg}(z-2+i) > -\frac{\pi}{2}$ شعاعًا يبدأ بالنقطة $(2,-1)$ ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم الشعاع متقطعًا.

تمثل المتباينة $|z+3-2i| \geq 4$ النقاط الواقعة على الدائرة أو خارجها، وتمثل المتباينة $-\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$ النقاط الواقعة بين الشعاعين. المنطقة التي تحقق المتباينتين هي الجزء المظلل في الرسم أدناه.



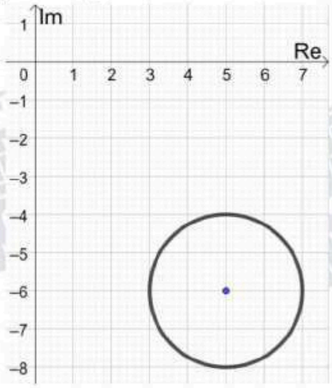
أتدرب وأحل المسائل صفحة 178

1	$\lvert z\rvert = 10 \quad \to \lvert x + iy\rvert = 10 \quad \to x^2 + y^2 = 100$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,0)$ وطول نصف قطرها 10 وحدات 
2	$\lvert z - 9\rvert = 4 \quad \to \lvert (x-9) + iy\rvert = 16 \quad \to (x-9)^2 + y^2 = 16$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(9,0)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات 
3	$\lvert z + 2i\rvert = 8 \quad \to \lvert x + i(y+2)\rvert = 8 \quad \to x^2 + (y+2)^2 = 64$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,-2)$ وطول نصف قطرها 8 وحدات 

<table>
<tr><td>4</td><td>

$|z-5+6i|=2 \quad \rightarrow |(x-5)+i(y+6)|=2 \quad \rightarrow (x-5)^2+(y+6)^2=4$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(5,-6)$ وطول نصف قطرها وحدتان

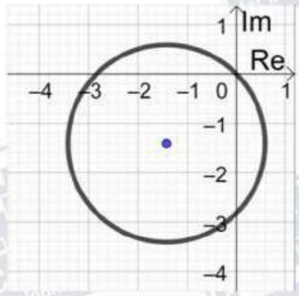


</td></tr>
<tr><td>5</td><td>

$|z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}|=2 \quad \rightarrow \left|\left(x+\sqrt{2}\right)+i\left(y+\sqrt{2}\right)\right|=2$

$\rightarrow \left(x+\sqrt{2}\right)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2=4$

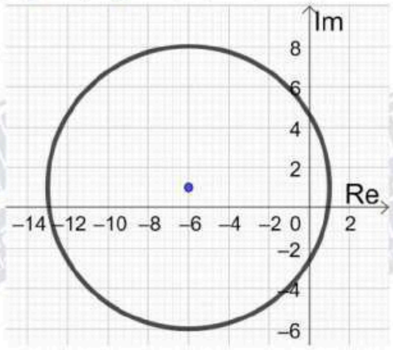
المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ وطول نصف قطرها وحدتان



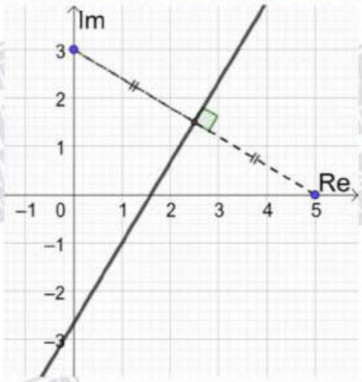
</td></tr>
<tr><td>6</td><td>

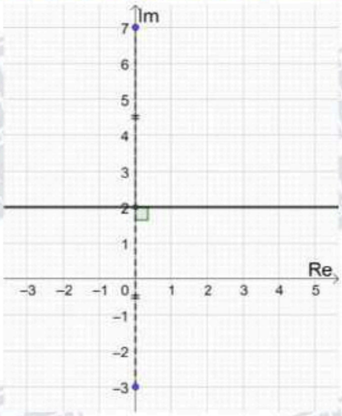
$|z+6-i|=7 \quad \rightarrow |(x+6)+i(y-1)|=7 \quad \rightarrow (x+6)^2+(y-1)^2=49$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-6,1)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات



</td></tr>
</table>

7	$\|z-5\| = \|z-3i\| \rightarrow \|z-(5)\| = \|z-(3i)\|$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(5,0), (0,3)$ $\|z-5\| = \|z-3i\| \rightarrow \|(x-5)+iy\| = \|x+i(y-3)\|$ $\rightarrow \sqrt{(x-5)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$ $\rightarrow (x-5)^2+y^2 = x^2+(y-3)^2$ $\rightarrow x^2-10x+25+y^2 = x^2+y^2-6y+9$ $\rightarrow 10x-6y-16=0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $5x-3y-8=0$ 

8	$\lvert z+3i\rvert = \lvert z-7i\rvert \rightarrow \lvert z-(-3i)\rvert = \lvert z-(7i)\rvert$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,-3), (0,7)$ $\lvert z+3i\rvert = \lvert z-7i\rvert \rightarrow \lvert x+i(y+3)\rvert = \lvert x+i(y-7)\rvert$ $\rightarrow \sqrt{x^2+(y+3)^2} = \sqrt{x^2+(y-7)^2}$ $\rightarrow x^2+(y+3)^2 = x^2+(y-7)^2$ $\rightarrow x^2+y^2+6y+9 = x^2+y^2-14y+49$ $\rightarrow 20y-40=0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $y=2$ 

9

$|z+5+2i| = |z-7| \rightarrow |z-(-5-2i)| = |z-(7)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(7,0)$, $(-5,-2)$

$|z+5+2i| = |z-7| \rightarrow |(x+5)+i(y+2)| = |(x-7)+iy|$

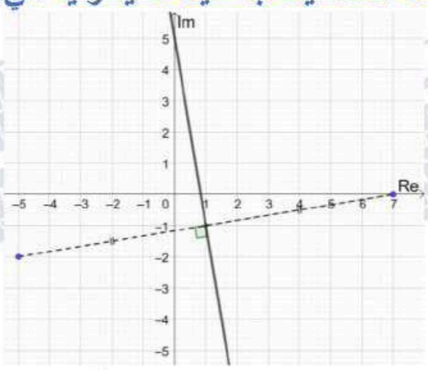
$\rightarrow \sqrt{(x+5)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-7)^2+y^2}$

$\rightarrow (x+5)^2+(y+2)^2 = (x-7)^2+y^2$

$\rightarrow x^2+10x+25+y^2+4y+4 = x^2-14x+49+y^2$

$\rightarrow 24x+4y-20=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $6x+y-5=0$



10

$|z-3| = |z-2-i| \rightarrow |z-(3)| = |z-(2+i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(2,1)$, $(3,0)$

$|z-3| = |z-2-i| \rightarrow |(x-3)+iy| = |(x-2)+i(y-1)|$

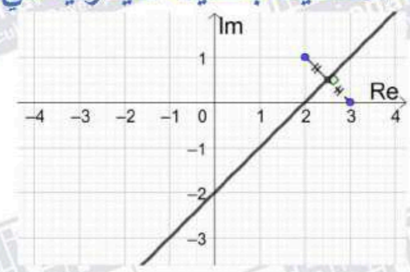
$\rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$

$\rightarrow (x-3)^2+y^2 = (x-2)^2+(y-1)^2$

$\rightarrow x^2-6x+9+y^2 = x^2-4x+4+y^2-2y+1$

$\rightarrow 2x-2y-4=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $x-y-2=0$



11

$$\frac{|z+6-i|}{|z-10-5i|}=1 \quad \rightarrow |z+6-i|=|z-10-5i|$$

$$\rightarrow |z-(-6+i)|=|z-(10+5i)|$$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-6,1),(10,5)$

$$|z+6-i|=|z-10-5i| \rightarrow |(x+6)-i(y-1)|=|(x-10)+i(y-5)|$$

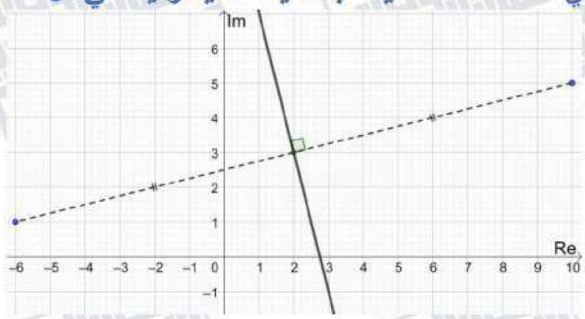
$$\rightarrow \sqrt{(x+6)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}$$

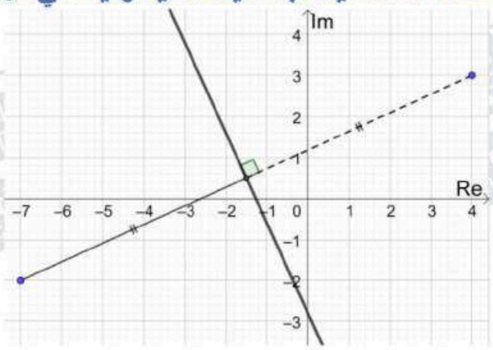
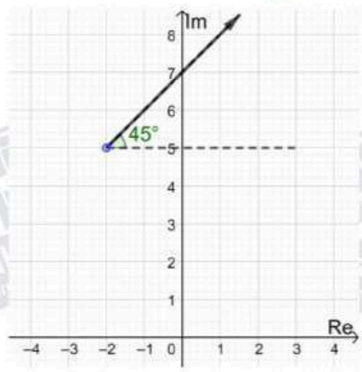
$$\rightarrow (x+6)^2+(y-1)^2=(x-10)^2+(y-5)^2$$

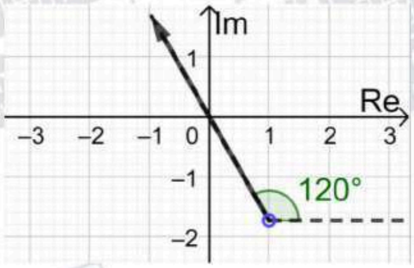
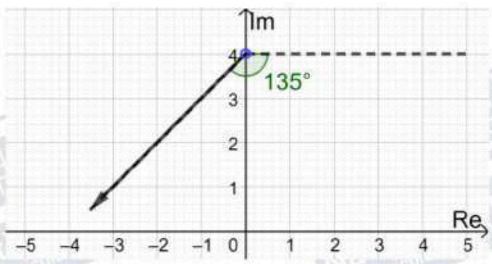
$$\rightarrow x^2+12x+36+y^2-2y+1=x^2-20x+100+y^2-10y+25$$

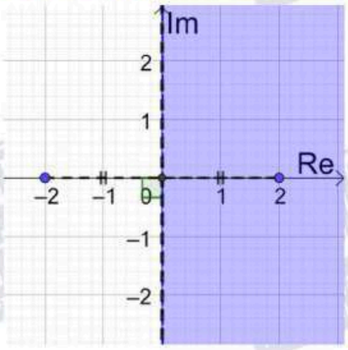
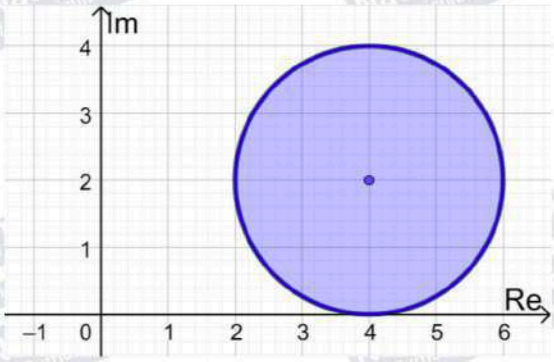
$$\rightarrow 32x+8y-88=0$$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $4x+y-11=0$



12	$\|z+7+2i\| = \|z-4-3i\| \rightarrow \|z-(-7-2i)\| = \|z-(4+3i)\|$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(4,3)$,$(-7,-2)$ $\|z+7+2i\| = \|z-4-3i\| \rightarrow \|(x+7)+i(y+2)\| = \|(x-4)+i(y-3)\|$ $\rightarrow \sqrt{(x+7)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$ $\rightarrow (x+7)^2+(y+2)^2 = (x-4)^2+(y-3)^2$ $\rightarrow x^2+14x+49+y^2+4y+4 = x^2-8x+16+y^2-6y+9$ $\rightarrow 22x+10y+28=0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $11x+5y+14=0$ 
13	$\text{Arg}(z+2-5i) = \frac{\pi}{4} \rightarrow \text{Arg}(z-(2+5i)) = \frac{\pi}{4}$ المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. 

14	$\mathbf{Arg}\left(z-1+i\sqrt{3}\right)=\frac{2\pi}{3} \rightarrow \mathbf{Arg}\left(z-\left(1-i\sqrt{3}\right)\right)=\frac{2\pi}{3}$ المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $\left(1,-\sqrt{3}\right)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. 
15	$\mathbf{Arg}(z-4i)=-\frac{3\pi}{4} \rightarrow \mathbf{Arg}\left(z-(4i)\right)=-\frac{3\pi}{4}$ المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(0,4)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{3\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. 

16	$\|z-2\| < \|z+2\|$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\|z-2\| = \|z+2\|$ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(-2,0)$و $(2,0)$. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا. نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 1 + i$ مثلاً وتعويضه في المتباينة، $\|1+i-2\| < \|1+i+2\| \rightarrow \|-1+i\| < \|3+i\| \rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{10}$ ✓ بما أن $z = 1 + i$ حقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z = 1 + i$ (أي نختار الجهة التي يكون فيها بعد النقاط عن النقطة $(2,0)$ أقل من بعدها عن النقطة $(-2,0)$) 
17	$\|z-4-2i\| \leq 2 \rightarrow \|z-(4+2i)\| \leq 2$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\|z-4-2i\| = 2$ ، وهو دائرة مركزها $(4,2)$ وطول نصف قطرها وحدتان. وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلاً. أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها. 

<table>
<tr>
<td>18</td>
<td>

$|z-4| > |z-6|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-4| = |z-6|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(6,0)$و $(4,0)$.

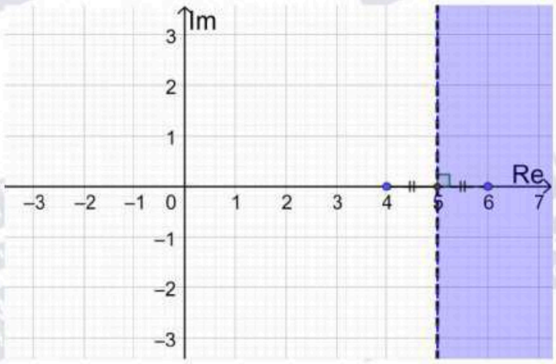
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة،

$|0-4| > |0-6| \to 2 > \sqrt{6}$ ✖

بما أن العدد لا يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي $z = 0$.

(أي نختار الجهة التي يكون فيها بعد النقاط عن النقطة $(4,0)$ أكبر من بعدها عن النقطة $(6,0)$)

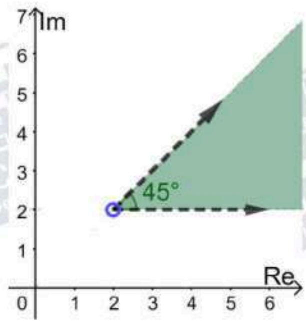


</td>
</tr>
<tr>
<td>19</td>
<td>

$0 < \mathrm{Arg}(z-2-2i) < \frac{\pi}{4}$

يمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z-2-2i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. ويمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z-2-2i) = 0$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,2)$ ولا يشملها، ويوازي المحور الحقيقي.

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء من المستوى المركب المحصور بين هذين الشعاعين.



</td>
</tr>
</table>

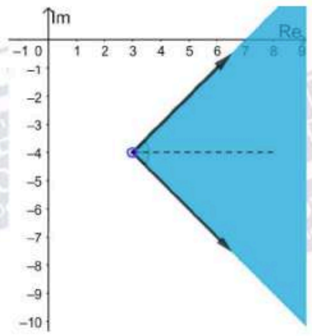
20

$-\frac{\pi}{4} \leq \mathbf{Arg}(z-3+4i) \leq \frac{\pi}{4}$

يمثل منحنى المعادلة $\mathbf{Arg}(z-3+4i)=\frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(3,-4)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي.

و يمثل منحنى المعادلة $\mathbf{Arg}(z-3+4i)=-\frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(3,-4)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي.

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء من المستوى المركب كما في الشكل:



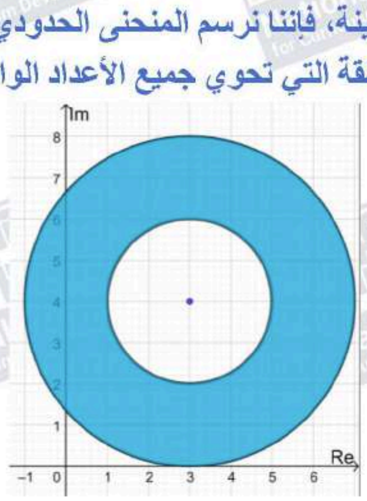
21

$2 \leq |z-3-4i| \leq 4 \ \rightarrow 2 \leq |z-(3+4i)| \leq 4$

يمثل منحنى المعادلة $|z-(3+4i)|=2$ دائرة مركزها $(3,4)$ وطول نصف قطرها وحدتان، وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

ويمثل منحنى المعادلة $|z-(3+4i)|=4$ دائرة مركزها $(3,4)$ وطول نصف قطرها 4 وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

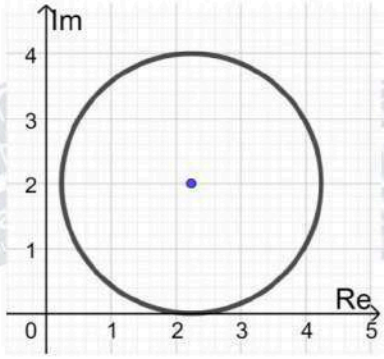
أما منطقة المحل الهندسي فهي المنطقة التي تحوي جميع الأعداد الواقعة على الدائرتين أو بينهما.



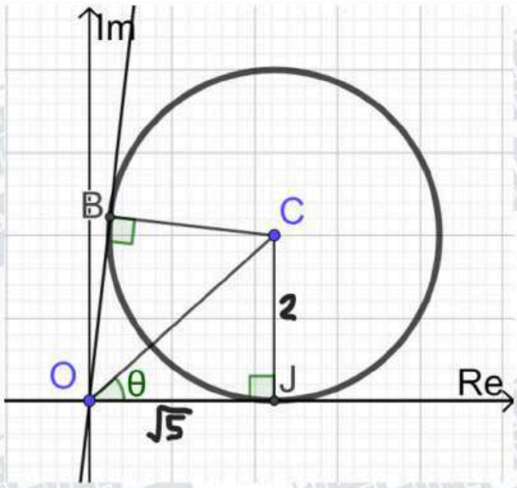
<table>
<tr><td>22</td><td>

$|z-\sqrt{5}-2i|=2 \quad \rightarrow |z-(\sqrt{5}+2i)|=2$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(\sqrt{5},2)$ وطول نصف قطرها وحدتان



</td></tr>
<tr><td>23</td><td>



أكبر سعة للعدد المركب z تساوي قياس الزاوية $\angle JOB$ المحصورة بين مماس الدائرة OB والمحور الحقيقي الموجب

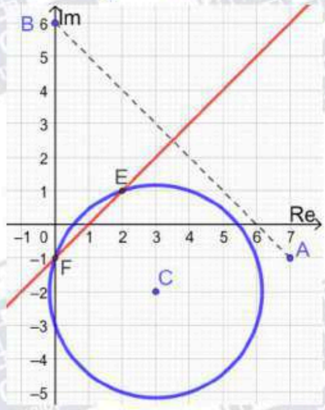
مماسا الدائرة OJ وOB عموديان على الترتيب على نصفي القطرين CJ وCB،

المثلثان OJC وOBC متطابقان بثلاثة أضلاع، إذن الزاويتان $\angle JOC$ و $\angle BOC$ متطابقتان

$\tan\angle\theta=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \rightarrow \theta=\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow \angle JOB=2\times\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\approx 1.46$

القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة المعطاة هي 1.46

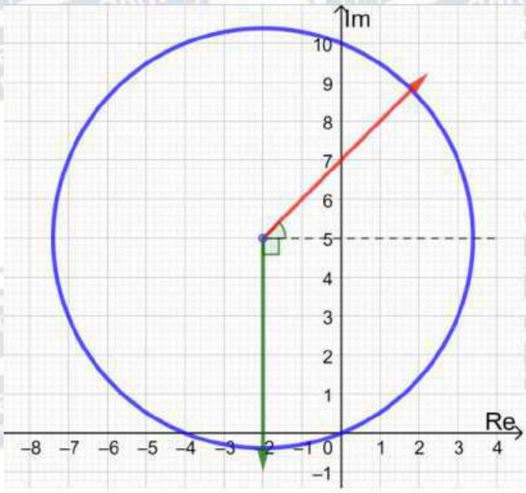
</td></tr>
</table>

24	المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $\|z-3+2i\| = \sqrt{10}$ هو دائرة مركزها $(3,-2)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{10}$ وحدات، ومعادلتها الديكارتية هي: $(x-3)^2+(y+2)^2=10$ المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $\|z-7+i\| = \|z-6i\|$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,6)$ و $(7,-1)$ ، نستطيع إيجاد معادلته الديكارتية عن طريق ميل العمودي ونقطة منتصف القطعة المستقيمة: $m=1 \rightarrow y-\frac{5}{2}=x-\frac{7}{2} \Rightarrow y=x-1$  لإيجاد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معًا، نجد نقاط تقاطع المنحنيين: $y=x-1$ و $(x-3)^2+(y+2)^2=10$ بالتعويض: $(x-3)^2+(y+2)^2=10 \rightarrow (x-3)^2+(x-1+2)^2=10$ $\rightarrow 2x^2-4x=0 \rightarrow 2x(x-2)=0$ $\rightarrow x=0, x=2 \rightarrow y=-1 \; or \; y=1$ العددان المركبان اللذان يحققان المعادلتين معًا هما: $z_1=-i, z_2=2+i$
25	$\|z-3\|=\|z+2i\| \rightarrow \|(x-3)+iy\|=\|x+i(y+2)\|$ $\rightarrow (x-3)^2+y^2=x^2+(y+2)^2$ $\rightarrow -6x+9=4y+4$ $\rightarrow 6x+4y=5 \dots\dots\dots\dots (1)$ $\|z+3-i\|=\|z-1+5i\| \rightarrow \|(x+3)+i(y-1)\|=\|(x-1)+i(y+5)\|$ $\rightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+5)^2$ $\rightarrow x^2+6x+9+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2+10y+25$ $\rightarrow 8x-12y-16=0$ $\rightarrow 2x-3y=4 \dots\dots\dots\dots (2)$ بحل المعادلتين (1) و (2) نجد: $y=-\frac{7}{13}$ و $x=\frac{31}{26}$ ويكون العدد المركب الذي يحقق كلًّا من المعادلتين هو: $z=\frac{31}{26}-\frac{7}{13}i$

يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}$ شعاعًا يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي

و يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+2-5i)=-\frac{\pi}{2}$ شعاعًا يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي

و يمثل منحنى المعادلة $|z+2-5i|=\sqrt{29}$ دائرة مركزها $(-2,5)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{29}$



1) $|z-3| > |z+2i|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-3| = |z+2i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,-2)$ و $(3,0)$.

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة،

$|0-3| > |0+2i| \to 3 > 2$ ✓

بما أن العدد0 يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z = 0$ (نقطة الأصل)

2) $|z+3-i| < |z-1+5i|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z+3-i| = |z-1+5i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(1,-5)$ و $(-3,1)$.

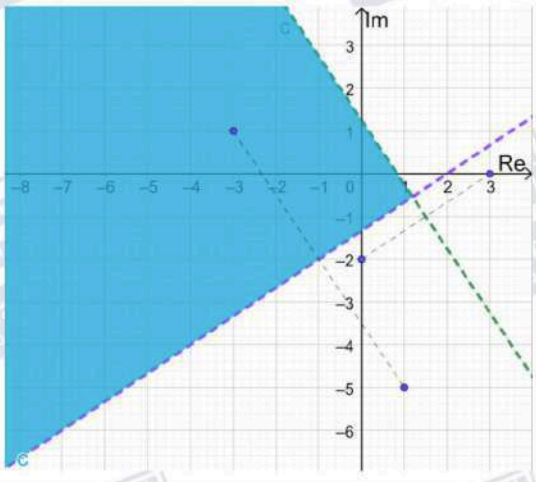
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة،

27 $|0+3-i| < |0-1+5i| \to \sqrt{10} < \sqrt{26}$ ✓

بما أن العدد0 يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z = 0$ (نقطة الأصل)

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معًا هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



28

1) $-\frac{\pi}{2} < \mathbf{Arg}(z + 2 - 5i) < \frac{\pi}{4}$

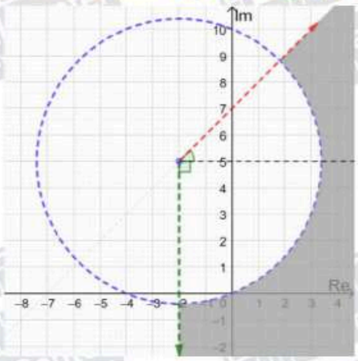
يمثل منحنى المعادلة $\mathbf{Arg}(z + 2 - 5i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-2, 5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي.

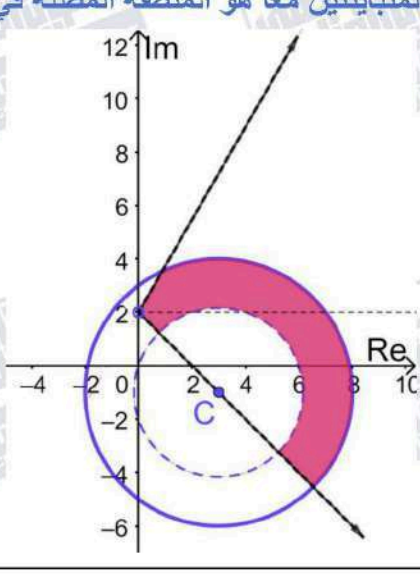
و يمثل منحنى المعادلة $\mathbf{Arg}(z + 2 - 5i) = -\frac{\pi}{2}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-2, 5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي.

2) $|z + 2 - 5i| > \sqrt{29}$

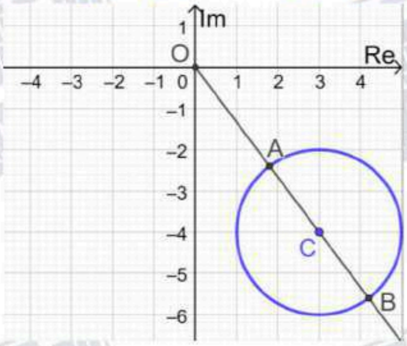
و يمثل منحنى المعادلة $|z + 2 - 5i| = \sqrt{29}$ دائرة مركزها $(-2, 5)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{29}$ نرسمها متقطعة بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معًا هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



29	1) $-\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z-2i) \leq \frac{\pi}{3}$ يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-2i) = -\frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي. و يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-2i) = \frac{\pi}{3}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي. 2) $2 < \|z-3+i\| \leq 5$ ويمثل منحنى المعادلة $\|z-3+i\| = 5$ دائرة مركزها $(3,-1)$ وطول نصف قطرها 5 نرسمها متصلة بسبب وجود مساواة في المتباينة ويمثل منحنى المعادلة $\|z-3+i\| = 2$ دائرة مركزها $(3,-1)$ وطول نصف قطرها 2 نرسمها متقطعة بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معًا هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه: 
30	$\|z-(1+i)\| = 3$
31	نبدأ بالتحقق من أن المستقيم المرسوم هو فعلًا العمود المنصف القطعة المستقيمة التي طرفاها $(3,2)$ و $(-1,0)$: ميل القطعة المستقيمة يساوي $\frac{1}{2}$ وميل المستقيم يساوي -2 فهما متعامدان، معادلة المستقيم هي $y = 3-2x$ ، ونقطة منتصف القطعة المستقيمة هي $(1,1)$ وهي واقعة على المستقيم لأن إحداثييها يحققان معادلته، إذن المستقيم المرسوم هو المنصف العمودي للقطعة، ومعادلته: $\|z-(3+2i)\| = \|z-(-1)\|$

32	$\operatorname{Arg}(z+1-2i)=-\frac{3\pi}{4}$
33	$r=\sqrt{(4-0)^2+(1-7)^2}=\sqrt{52}$ $\lvert z-(4+i)\rvert \geq \sqrt{52}$
34	قياس الزاوية بين الشعاع والمستقيم الموازي للمحور الحقيقي هو $-\frac{\pi}{4}$ لأن ميل الشعاع -1 $-\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z+2-i) < 0$
35	$\lvert z+2+i\rvert \leq 3$ $\lvert z+6\rvert \geq \lvert z+4i\rvert$
36	لنفرض أن $a \neq 0$: $\lvert z-a\rvert = \lvert z+a(2+i)\rvert \rightarrow \lvert x-a+iy\rvert = \lvert x+2a+i(y+a)\rvert$ $\rightarrow (x-a)^2+y^2=(x+2a)^2+(y+a)^2$ $\rightarrow y=-3x-2a$ ……………………………… (1) $\lvert z-a\rvert = 2a \rightarrow \lvert (x-a)+iy\rvert = 2a$ $\rightarrow (x-a)^2+y^2=4a^2$ ……………………………… (2) $(x-a)^2+(-3x-2a)^2=4a^2$ $x^2-2ax+a^2+9x^2+12ax+4a^2=4a^2$ $10x^2+10ax+a^2=0$ $x=\frac{-10a\pm\sqrt{100a^2-40a^2}}{20}$ $=\frac{-10a\pm\sqrt{60a^2}}{20}=\frac{-10a\pm 2a\sqrt{15}}{20}$ $x=-\frac{a}{2}\pm\frac{a\sqrt{15}}{10}$ $y=-3\left(-\frac{a}{2}\pm\frac{a\sqrt{15}}{10}\right)-2a=-\frac{a}{2}\mp\frac{3a\sqrt{15}}{10}$ إذا كان $a \neq 0$ فإن العددين المطلوبين هما: $-\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{15}}{10}-(\frac{a}{2}+\frac{3a\sqrt{15}}{10})i, -\frac{a}{2}-\frac{a\sqrt{15}}{10}-(\frac{a}{2}-\frac{3a\sqrt{15}}{10})i$ أما إذا كان $a=0$ فيوجد عدد مركب وحيد يحقق المعادلتين وهو: $z=0$

37	$\|z-3+4i\|=2 \rightarrow \|z-(3-4i)\|=2$ z يقع على الدائرة التي مركزها $(3,-4)$ وطول نصف قطرها 2 نفرض $z=x+iy$ فإن: $\|z\|$ يساوي $\sqrt{x^2+y^2}$ وهو يمثل البعد بين النقطة (x,y) ونقطة الأصل في المستوى الديكارتي  من الشكل أعلاه نجد أن: $OC=\sqrt{9+16}=5$ أقل قيمة لـ $\|z\|$ هي: $\|z\|=OC-r=5-2=3$ أكبر قيمة لـ $\|z\|$ هي: $\|z\|=OC+r=5+2=7$
38	$z=5+2i \rightarrow \bar{z}=5-2i$ $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{5+2i}{5-2i}\times\frac{5+2i}{5+2i}=\frac{25+20i-4}{25+4}=\frac{21+20i}{29}=\frac{1}{29}(21+20i)$
39	$Arg(z)=\tan^{-1}\frac{2}{5}$ $Arg(\bar{z})=-\tan^{-1}\frac{2}{5}$ $Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=\tan^{-1}\frac{20}{21}$ $Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=Arg(z)-Arg(\bar{z}) \rightarrow \tan^{-1}\frac{20}{21}=\tan^{-1}\frac{2}{5}-(-\tan^{-1}\frac{2}{5})$ $\rightarrow \tan^{-1}\frac{20}{21}=2\tan^{-1}\frac{2}{5}$

40	$\lvert z-6\rvert = 2\lvert z+6-9i\rvert \rightarrow \lvert x-6+iy\rvert = 2\lvert (x+6)+i(y-9)\rvert$ $\rightarrow (x-6)^2+y^2 = 4((x+6)^2+(y-9)^2)$ $\rightarrow x^2-12x+36+y^2 = 4(x^2+12x+36+y^2-18y+81)$ $\rightarrow x^2+y^2+20x-24y+144=0$ $\rightarrow (x+10)^2+(y-12)^2=100$ وهي معادلة دائرة مركزها $(-10, 12)$ وطول نصف قطرها 10
41	$\text{Arg}(z-2+3i)=\frac{\pi}{8}$ المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(2, -3)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{8}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي، وهو الممثل بالشكل b أما الشكل a فنقطة بداية الشعاع ليست صحيحة والشكل c فنقطة بداية الشعاع مشمولة، وهو ليس صحيحًا والشكل d فسعة العدد المركب هي $-\frac{\pi}{8}$ وهو مخالف للسعة المعطاة بالمعادلة.