الدرس الثاني: العمليات على الأعداد المركبة

مسألة اليوم صفحة 155	
	$z_1 = -1 + 3i, \quad z_2 = 3 + i$ $z_1 z_2 = (-1 + 3i)(3 + i)$ $= -3 - i + 9i - 3 = -6 + 8i$ $\lvert z_1 z_2 \rvert = \sqrt{36 + 64} = 10$ $Arg(z_1 z_2) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right) \approx 2.21$
أتحقق من فهمي صفحة 156	
a	$(7 + 8i) + (-9 + 14i) = -2 + 22i$
b	$(11 + 9i) - (4 - 6i) = 7 + 15i$
أتحقق من فهمي صفحة 157	
a	$-3i(4 - 5i) = -12i + 15i^2 = -15 - 12i$
b	$(5 + 4i)(7 - 4i) = 35 - 20i + 28i - 16i^2 = 35 + 8i + 16 = 51 + 8i$
c	$(3 + 6i)^2 = 9 + 36i + 36i^2 = 9 + 36i - 36 = -27 + 36i$
أتحقق من فهمي صفحة 158	

a	$\frac{-4+3i}{1+i} = \frac{-4+3i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}$ $= \frac{-4+4i+3i-3i^2}{1-i^2}$ $= \frac{-4+7i+3}{1+1}$ $= \frac{-1+7i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$
b	$\frac{2-6i}{-3i} = \frac{2-6i}{-3i} \times \frac{i}{i}$ $= \frac{2i-6i^2}{-3i^2}$ $= \frac{2i+6}{3} = 2 + \frac{2}{3}i$
c	$\frac{7i}{4-4i} = \frac{7i}{4-4i} \times \frac{4+4i}{4+4i}$ $= \frac{28i+28i^2}{16-16i^2}$ $= \frac{28i-28}{16+16}$ $= \frac{28i-28}{32} = -\frac{7}{8} + \frac{7}{8}i$
	أتحقق من فهمي صفحة 160
a	$6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $= 6 \times 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right) = 12\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

b	$6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ $=\frac{6}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ $=3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)$ $=3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi\right)\right)$ $=3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$
	أتحقق من فهمي صفحة 161
a	$\sqrt{-5-12i}=x+iy \;\rightarrow\; -5-12i=x^2+2ixy+i^2y^2$ $\rightarrow -5-12i=x^2-y^2+2ixy$ $\rightarrow -5=x^2-y^2$ و $-12=2xy$ $y=-\frac{6}{x}$ $x^2-y^2=-5 \;\rightarrow x^2-\frac{36}{x^2}=-5$ $\rightarrow x^4+5x^2-36=0$ $\rightarrow (x^2+9)(x^2-4)=0 \;\rightarrow x=\pm 2$ عندما $x=2$ ، فإن $y=-3$، وعندما $x=-2$ ، فإن $y=3$، إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-5-12i$ هما: $-2+3i$, $2-3i$

$$\sqrt{-9i} = x + iy \quad \rightarrow \quad -9i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$$

$$\rightarrow -9i = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\rightarrow 0 = x^2 - y^2 \quad \text{و} \quad -9 = 2xy$$

$$y = -\frac{9}{2x}$$

b

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \rightarrow x^2 - \frac{81}{4x^2} = 0$$

$$\rightarrow 4x^4 - 81 = 0$$

$$\rightarrow (2x^2 + 9)(2x^2 - 9) = 0 \quad \rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

عندما $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ، فإن $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}$، وعندما $x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ ، فإن $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$،

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-9i$ هما: $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i \quad , -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$

$$\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = x + iy \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} = x^2 - y^2 \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = 2xy$$

c

$$y = \frac{\sqrt{3}}{4x}$$

$$x^2 - y^2 = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow x^2 - \frac{3}{16x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 16x^4 + 8x^2 - 3 = 0$$

$$\rightarrow (4x^2 - 1)(4x^2 + 3) = 0 \quad \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

عندما $x = \frac{1}{2}$ ، فإن $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$، وعندما $x = -\frac{1}{2}$ ، فإن $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$،

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-5 - 12i$ هما: $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

أتحقق من فهمي لمثال 6 صفحة 165

$z^3 - z^2 - 7z + 15 = 0$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm 1, \ \pm 3, \pm 5, \pm 15$

بالتعويض، نجد أن العدد -3 يحقق المعادلة لأن: $(-3)^3 - (-3)^2 - 7(-3) + 15 = 0$

إذن $(z+3)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أنّ:

$z^3 - z^2 - 7z + 15 = (z+3)(z^2 - 4z + 5) = 0$

$z = -3 \ , z = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$

إذن لهذه المعادلة 3 جذور هي: $-3, 2+i, 2-i$

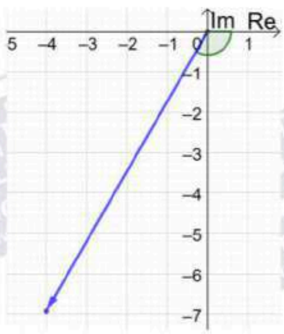
	أتحقق من فهمي لمثال 7 صفحة 165
	$x = 2 \pm i$ $x - 2 = \pm i$ $(x-2)^2 = -1$ $x^2 - 4x + 4 = -1$ $x^2 - 4x + 5 = 0$ بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة المعطاة$(x^2 + ax + b = 0)$ نجد أنّ: $a = -4, \quad b = 5$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 165
1	$(7+2i) + (3-11i) = 10 - 9i$
2	$(5-9i) - (-4+7i) = 9 - 16i$
3	$(4-3i)(1+3i) = 4 + 12i - 3i + 9 = 13 + 9i$
4	$(4-6i)(1-2i)(2-3i) = (4-6i)(2-3i-4i-6)$ $= (4-6i)(-4-7i)$ $= -16 - 28i + 24i - 42$ $= -58 - 4i$
5	$(9-2i)^2 = 81 - 36i - 4 = 77 - 36i$
6	$\frac{48+19i}{5-4i} = \frac{48+19i}{5-4i} \times \frac{5+4i}{5+4i}$ $= \frac{240 + 192i + 95i - 76}{25+16}$ $= \frac{164 + 287i}{41}$ $= 4 + 7i$
7	$6(\cos\pi + i\sin\pi) \times 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $= 12\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 12\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

8	$\left(\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)\div\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$ $=\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{2\pi}{5}\right)$ $=\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$
9	$12\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\div 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $=\frac{12}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$
10	$11\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\times 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\pi\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2\pi\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
11	$(a+6i)+(7-bi)=-2+5i$ $a+7+(6-b)i=-2+5i \rightarrow a+7=-2$ و $6-b=5$ $\rightarrow a=-9\,, b=1$
12	$(11-ia)-(b-9i)=7-6i$ $11-b+(9-a)i=7-6i \rightarrow 11-b=7$ و $9-a=-6$ $\rightarrow b=4\,, a=15$

13	$(a+ib)(2-i)=5+5i$ $2a+b+(2b-a)i=5+5i \rightarrow 2a+b=5$ و $2b-a=5$ $\rightarrow b=3\,,a=1$ طريقة ثانية للحل: $a+ib=\frac{5+5i}{2-i}$ $=\frac{5+5i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}$ $=\frac{10+5i+10i-5}{4+1}$ $=\frac{5+15i}{5}$ $=1+3i$ $\rightarrow a=1\,,b=3$
14	$\frac{a-6i}{1-2i}=b+4i \rightarrow \frac{a-6i}{1-2i}\times\frac{1+2i}{1+2i}=b+4i$ $\rightarrow \frac{a+2ai-6i+12}{1+4}=b+4i$ $\rightarrow \frac{a+12}{5}+\frac{2a-6}{5}i=b+4i$ $\rightarrow \frac{a+12}{5}=b\;,\quad \frac{2a-6}{5}=4 \rightarrow a=13$ بتعويض قيمة a في المعادلة الأولى ينتج أنّ: $b=5$ طريقة ثانية للحل: $a-6i=(b+4i)(1-2i) \rightarrow a-6i=b+8+(-2b+4)i$ $\rightarrow a=b+8,\quad -6=-2b+4$ $\rightarrow b=5\,,a=13$

15	$z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$ $\rightarrow \bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\rightarrow z\bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \times 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $= 64\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 64$ **الحل الثاني: نكتب كلا من العددين بالصورة المثلثية أولًا ثم نطبق القاعدة:** $z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$ $\rightarrow \bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\rightarrow z\bar{z} = 64\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 64$ **الحل الثالث: كتابة العددين بالصورة القياسية أولًا ثم إجراء عملية الضرب:** $z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$ $\rightarrow \bar{z} = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ $\rightarrow z\bar{z} = (4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i)(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i) = 32 + 32 = 64$

16	$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$, $z_2 = \sqrt{5} - i\sqrt{15}$, $z_3 = 2 - 2i$ $\lvert z_1\rvert = \sqrt{12+4} = 4$ $\lvert z_2\rvert = \sqrt{5+15} = 2\sqrt{5}$ $\lvert z_3\rvert = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ $Arg(z_1) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ $Arg(z_2) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\right) = -\tan^{-1}(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ $Arg(z_3) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$ $\left\lvert\frac{z_2}{z_1}\right\rvert = \frac{\lvert z_2\rvert}{\lvert z_1\rvert} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = Arg(z_2) - Arg(z_1) = -\frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6}$
17	$\left\lvert\frac{1}{z_3}\right\rvert = \frac{\lvert 1\rvert}{\lvert z_3\rvert} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ $Arg\left(\frac{1}{z_3}\right) = Arg(1) - Arg(z_3) = 0 - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

18	$\overline{z_2} = \sqrt{5} + i\sqrt{15} \rightarrow \lvert\overline{z_2}\rvert = \lvert z_2\rvert = 2\sqrt{5}\ \ , Arg(\overline{z_2}) = -Arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$ $\left\lvert\frac{z_3}{\overline{z_2}}\right\rvert = \frac{\lvert z_3\rvert}{\lvert\overline{z_2}\rvert} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ $Arg\left(\frac{z_3}{\overline{z_2}}\right) = Arg(z_3) - Arg(\overline{z_2}) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}$
19	$z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 8\left(\cos(\frac{-2\pi}{3}) + i\sin(\frac{-2\pi}{3})\right)$ إذن مقياس z يساوي 8 وسعته $\frac{-2\pi}{3}$ 

20	$z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 8\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -4 - 4\sqrt{3}i$ $\sqrt{-4-4\sqrt{3}i} = x + iy \;\rightarrow\; -4 - 4\sqrt{3}i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$ $\rightarrow -4 - 4\sqrt{3}i = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\rightarrow -4 = x^2 - y^2$ و $-4\sqrt{3} = 2xy$ $y = -\frac{2\sqrt{3}}{x}$ $x^2 - y^2 = -4 \;\rightarrow x^2 - \frac{12}{x^2} = -4$ $\rightarrow x^4 + 4x^2 - 12 = 0$ $\rightarrow (x^2+6)(x^2-2) = 0 \;\rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ عندما $x = \sqrt{2}$ ، فإن $y = -\sqrt{6}$، وعندما $x = -\sqrt{2}$ ، فإن $y = \sqrt{6}$، إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب z هما: $\sqrt{2} - i\sqrt{6}$, $-\sqrt{2} + i\sqrt{6}$
21	$\sqrt{3-4i} = x + iy \;\rightarrow\; 3 - 4i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$ $\rightarrow 3 - 4i = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\rightarrow 3 = x^2 - y^2$ و $-4 = 2xy$ $y = -\frac{2}{x}$ $x^2 - y^2 = 3 \;\rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$ $\rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ $\rightarrow (x^2+1)(x^2-4) = 0 \;\rightarrow x = \pm 2$ عندما $x = 2$ ، فإن $y = -1$، وعندما $x = -2$ ، فإن $y = 1$ إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $3 - 4i$ هما: $2 - i$, $-2 + i$

22	$\sqrt{-15+8i} = x + iy \rightarrow -15+8i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$ $\rightarrow -15+8i = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\rightarrow -15 = x^2 - y^2$ و $8 = 2xy$ $y = \frac{4}{x}$ $x^2 - y^2 = -15 \rightarrow x^2 - \frac{16}{x^2} = -15$ $\rightarrow x^4 + 15x^2 - 16 = 0$ $\rightarrow (x^2+16)(x^2-1) = 0 \rightarrow x = \pm 1$ عندما $x = 1$ ، فإن $y = 4$، وعندما $x = -1$ ، فإن $y = -4$ إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-15+8i$ هما: $-1-4i$, $1+4i$
23	$\sqrt{5-12i} = x + iy \rightarrow 5-12i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$ $\rightarrow 5-12i = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\rightarrow 5 = x^2 - y^2$ و $-12 = 2xy$ $y = -\frac{6}{x}$ $x^2 - y^2 = 5 \rightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} = 5$ $\rightarrow x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ $\rightarrow (x^2+4)(x^2-9) = 0 \rightarrow x = \pm 3$ عندما $x = 3$ ، فإن $y = -2$، وعندما $x = -3$ ، فإن $y = 2$ إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $5-12i$ هما: $-3+2i$, $3-2i$

24

$\sqrt{-7-24i} = x + iy \ \rightarrow\ -7-24i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$

$\rightarrow -7-24i = x^2 - y^2 + 2ixy$

$\rightarrow -7 = x^2 - y^2$ و $-24 = 2xy$

$y = -\frac{12}{x}$

$x^2 - y^2 = -7 \ \rightarrow x^2 - \frac{144}{x^2} = -7$

$\rightarrow x^4 + 7x^2 - 144 = 0$

$\rightarrow (x^2+16)(x^2-9) = 0 \ \rightarrow x = \pm 3$

عندما $x = 3$ ، فإن $y = -4$، وعندما $x = -3$ ، فإن $y = 4$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-7-24i$ هما: $3-4i$, $-3+4i$

25

بما أن $a-3i$ هو جذر للعدد المركب $55-48i$، إذن:

$(a-3i)^2 = 55-48i \ \rightarrow a^2 - 6ia - 9 = 55 - 48i$

$\rightarrow a^2 - 9 = 55\,, -6a = -48 \ \rightarrow a = 8$

و بما أن $b+ic$ هو جذر للعدد المركب $55-48i$، إذن:

$(b+ic)^2 = 55-48i \ \rightarrow b^2 + 2ibc - c^2 = 55 - 48i$

$\rightarrow b^2 - c^2 = 55\,, 2bc = -48$

$\rightarrow c = -\frac{24}{b} \ \rightarrow b^2 - \frac{576}{b^2} = 55$

$\rightarrow b^4 - 55b^2 - 576 = 0$

$\rightarrow (b^2-64)(b^2+9) = 0 \rightarrow b = \pm 8$

عندما $b = 8$ ، فإن $c = -3$، وعندما $b = -8$ ، فإن $c = 3$

جذرا هذا العدد المركب هما $-8+3i$ و $8-3i$

وبمقارنة هذين الجذرين مع الجذرين المعطيين $(a-3i, b+ic)$ نلاحظ أنّ:

$a = 8, b = -8, c = 3$

الحل الأسهل هو:

بما أن $a-3i$ جذر للعدد المركب $55-48i$ إذن $-a+3i$ هو أيضًا جذر له، ومنه:

بالمقارنة مع الجذرين $a-3i$ و $b+ic$ نجد أن: $b = -a$ و $c = 3$ ومنه:

$(a-3i)^2 = 55-48i \ \rightarrow a^2 - 6ia - 9 = 55 - 48i$

$\rightarrow a^2 - 9 = 55\,, -6a = -48 \ \rightarrow a = 8 \ \rightarrow b = -8$

26	$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4})\right), w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $zw = 4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$
27	$\frac{z}{w} = 1\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos(\frac{-7\pi}{12}) + i\sin(\frac{-7\pi}{12})$
28	$\frac{w}{z} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{-\pi}{4}\right)\right) = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$
29	$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$ $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(0-\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(0-\frac{-\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
30	$w^2 = ww = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
31	$5i = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ $5iz = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \times 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$ $= 10\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{-\pi}{4}\right)\right)$ $= 10\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
32	$z^2 + 104 = 20z \rightarrow z^2 - 20z + 104 = 0$ $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 416}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{-16}}{2}$ $z = \frac{20 \pm 4i}{2} = 10 \pm 2i$ إذن، لهذه المعادلة جذران هما: $10 + 2i$، و $10 - 2i$

33	$z^2 + 18z + 202 = 0$ $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $= \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 808}}{2}$ $= \frac{-18 \pm \sqrt{-484}}{2}$ $= \frac{-18 \pm 22i}{2} = -9 \pm 11i$ إذن، لهذه المعادلة جذران هما: $-9 + 11i$، و $-9 - 11i$
34	$9z^2 + 68 = 0 \rightarrow z^2 = -\frac{68}{9} \rightarrow z = \pm\sqrt{-\frac{68}{9}} = \pm i\frac{\sqrt{68}}{3}$ إذن، لهذه المعادلة جذران هما: $i\frac{\sqrt{68}}{3}$، و $-i\frac{\sqrt{68}}{3}$
35	$3z^3 - 2z^2 + 2z + 1 = 0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm 1, \pm\frac{1}{3}$ بالتعويض، نجد أن العدد $z = -\frac{1}{3}$ يحقق المعادلة لأن: $3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$ $z = -\frac{1}{3} \rightarrow 3z = -1 \rightarrow 3z + 1 = 0$ إذن $(3z + 1)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أنّ: $3z^3 - 2z^2 + 2z + 1 = (3z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$ $\rightarrow z = -\frac{1}{3} \quad , z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هي: $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

36	$z^3+4z+10=5z^2 \;\rightarrow\; z^3-5z^2+4z+10=0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$ بالتعويض، نجد أن العدد $z=-1$ يحقق المعادلة لأن: $(-1)^3-5(-1)^2+4(-1)+10=0$ إذن $(z+1)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أنّ: $z^3-5z^2+4z+10=(z+1)(z^2-6z+10)=0$ $\rightarrow z=-1 \;\; ,z=\dfrac{6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\dfrac{6\pm2i}{2}=3\pm i$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هي: $-1,\; 3+i,\; 3-i$
37	$2z^3=8z^2+13z-87 \;\rightarrow\; 2z^3-8z^2-13z+87=0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm3, \pm29, \pm\frac{29}{2}, \frac{87}{2}, \pm87$ بالتعويض، نجد أن العدد $z=-3$ يحقق المعادلة لأن: $2(-3)^3-8(-3)^2-13(-3)+87=0$ إذن $(z+3)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أنّ: $2z^3-8z^2-13z+87=(z+3)(2z^2-14z+29)=0$ $\rightarrow z=-3 \;\; ,z=\dfrac{14\pm\sqrt{196-232}}{4}$ $\rightarrow z=-3 \;\; ,z=\dfrac{14\pm\sqrt{-36}}{4}=\dfrac{14\pm6i}{4}=\dfrac{7}{2}\pm\dfrac{3}{2}i$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هي: $-3,\; \frac{7}{2}+\frac{3}{2}i,\; \frac{7}{2}-\frac{3}{2}i$

38	$x = 2 \pm 5i$ $x - 2 = \pm 5i$ $(x-2)^2 = -25$ $x^2 - 4x + 4 = -25$ $x^2 - 4x + 29 = 0$ **طريقة أخرى للحل:** **نعلم أنه إذا كان h و k هما جذرا المعادلة التربيعية $x^2 - bx + c = 0$،** **فإن: $b = h + k$، و $c = hk$** **مجموع الجذرين يساوي: 4، وناتج ضربهما يساوي: 29 = 25 + 4** **إذن، المعادلة هي: $x^2 - 4x + 29 = 0$**
39	$x = 7 \pm 4i$ $x - 7 = \pm 4i$ $(x-7)^2 = -16$ $x^2 - 14x + 49 = -16$ $x^2 - 14x + 65 = 0$ **طريقة أخرى للحل:** **مجموع الجذرين يساوي: 14، وناتج ضربهما يساوي: 65 = 16 + 49** **إذن، المعادلة هي: $x^2 - 14x + 65 = 0$**

40	$x = -8 \pm 20i$ $x + 8 = \pm 20i$ $(x+8)^2 = -400$ $x^2 + 16x + 64 = -400$ $x^2 + 16x + 464 = 0$ **طريقة أخرى للحل:** **مجموع الجذرين يساوي: -16، وناتج ضربهما يساوي: 464 = 400 + 64** إذن، المعادلة هي: $x^2 + 16x + 464 = 0$
41	$x = -3 \pm 2i$ $x + 3 = \pm 2i$ $(x+3)^2 = -4$ $x^2 + 6x + 9 = -4$ $x^2 + 6x + 13 = 0$ **طريقة أخرى للحل:** **مجموع الجذرين يساوي: -6، وناتج ضربهما يساوي: 13 = 4 + 9** **إذن، المعادلة هي: $x^2 + 6x + 13 = 0$**
42	$x^3 + x^2 + 15x = 225 \rightarrow x^3 + x^2 + 15x - 225 = 0$ **بما أن 5 جذر لهذه المعادلة، إذن $(x-5)$ أحد عوامل كثير الحدود، بالقسمة عليه نحصل على:** $x^3 + x^2 + 15x - 225 = (x-5)(x^2 + 6x + 45) = 0$ $x = 5, x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-180}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-144}}{2} = \frac{-6 \pm 12i}{2} = -3 \pm 6i$ **حلول هذه المعادلة هي: $x = 5, x = -3 + 6i,\ x = -3 - 6i$**

43	$x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = 0$ بما أن 9- جذر لهذه المعادلة، إذن $(x+9)$ أحد عوامل كثير الحدود، بالقسمة عليه نحصل على: $x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = (x+9)(x^2 - 2x + 5) = 0$ $x = -9, x = \frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{2\pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$ حلول هذه المعادلة هي: $x = -9, x = 1+2i\ , x = 1-2i$
44	$3x(x^2+45) = 2(19x^2+37) \ \rightarrow 3x^3 - 38x^2 - 135x - 74 = 0$ بما أن $(6-i)$ جذر لهذه المعادلة، إذن مرافقه $(6+i)$ هو أيضًا جذر لهذه المعادلة، نكوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $(6-i)$، $(6+i)$: $x = 6 \pm i$ $x - 6 = \pm i$ $(x-6)^2 = -1$ $x^2 - 12x + 36 = -1$ $x^2 - 12x + 37 = 0$ ثم نقسم كثير الحدود $3x^3 - 38x^2 - 135x - 74$ على $x^2 - 12x + 37$ فنجد أنّ: $3x^3 - 38x^2 - 135x - 74 = (x^2 - 12x + 37)(3x - 2) = 0$ $\rightarrow x = \frac{2}{3}, x = 6 \pm i$ حلول هذه المعادلة هي: $x = \frac{2}{3}, x = 6+i\ , x = 6-i$

45	$x^3 + 10x^2 + 29x + 30 = 0$ بما أن $(-2 + i)$ جذر لهذه المعادلة، إذن مرافقه $(-2 - i)$ هو أيضًا جذر لهذه المعادلة، نكوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $(-2 + i)$، $(-2 - i)$: $x = -2 \pm i$ $x + 2 = \pm i$ $(x + 2)^2 = -1$ $x^2 + 4x + 4 = -1$ $x^2 + 4x + 5 = 0$ ثم نقسم كثير الحدود $x^3 + 10x^2 + 29x + 30$ على $x^2 + 4x + 5$ فنجد أنّ: $x^3 + 10x^2 + 29x + 30 = (x^2 + 4x + 5)(x + 6) = 0$ $\rightarrow x = -6, x = -2 \pm i$ حلول هذه المعادلة هي: $x = -6, x = -2 + i\,, x = -2 - i$
46	الجذر الآخر هو مرافق الجذر الأول، أي $4 - 11i$
47	$k = (4 - 11i)(4 + 11i) = 16 - 121i^2 = 16 + 121 = 137$
48	$(p + iq)^2 = p^2 + 2ipq + i^2q^2 = p^2 + 2ipq - q^2$

49	$(p+iq)^2 = 45 + im = p^2 - q^2 + 2ipq$ $\rightarrow p^2 - q^2 = 45 \;,\; m = 2pq$ $\rightarrow p^2 - q^2 = 45 \;\rightarrow (p+q)(p-q) = 45$ بما أن p و q عددان صحيحان موجبان و $p > q$ فإن $(p+q)$ و $(p-q)$ عددان صحيحان موجبان أيضًا و $(p+q) > (p-q)$ ومنه يكفي تحليل العدد 45 إلى عاملين صحيحين موجبين أحدهما أكبر من الآخر، لدينا ثلاث حالات لتحليل 45 إلى عاملين صحيحين موجبين هي: الحالة الأولى: $1 \times 45 = 45$ فإن: $p+q = 45$ و $p-q = 1$ ومنه: $p = 23$ و $q = 22$ أي أنّ: $m = 2pq = 1012$ الحالة الثانية: $3 \times 15 = 45$ فإن: $p+q = 15$ و $p-q = 3$ ومنه: $p = 9$ و $q = 6$ أي أنّ: $m = 2pq = 108$ الحالة الثالثة: $5 \times 9 = 45$ فإنّ: $p+q = 9$ و $p-q = 5$ ومنه: $p = 7$ و $q = 2$ أي أنّ: $m = 2pq = 28$ قيم m المطلوبة هي: $28, 108, 1012$
50	المطلوب إيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $45 - 108i$ بما أن $m = 2pq = -108$ إذن العددان p و q مختلفان بالإشارة، من السؤال السابق نجد أن: $p = 9 \,, q = -6$ أو $p = -9 \,, q = 6$ الجذران المطلوبان هما: $-9 + 6i \,,\; 9 - 6i$
51	ليكن $z = x + iy$ ، إذن: $\bar{z} = x - iy$ $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2+y^2}\,)^2 = \|z\|^2$

52	$\|z\| = 5\sqrt{5}$, $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\frac{z}{3+4i} = p + iq$ ليكن $z = x + iy$ بما أن $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, إذن يقع العدد المركب z في الربع الأول، ويكون $x = 2y$ $\rightarrow z = 2y + iy$ $\|z\| = 5\sqrt{5}$ $(2y)^2 + y^2 = 125 \rightarrow y^2 = 25 \rightarrow y = 5, x = 10$ إذن، $z = 10 + 5y$ $\frac{z}{3+4i} = \frac{10+5i}{3+4i} = \frac{10+5i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i}$ $p + iq = \frac{30 - 40i + 15i + 20}{9+16} = \frac{50-25i}{25} = 2 - i$ إذن، $p = 2, q = -1$ ويكون: $p + q = 1$

$z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$

بما أن $(8 + 6i)$ جذر لهذه المعادلة، فإن مرافقه $(8 - 6i)$ هو أيضًا جذر لهذه المعادلة،
نكوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $(8 + 6i)$، $(8 - 6i)$:

$(8 + 6i) + (8 - 6i) = 16$

$(8 + 6i) \times (8 - 6i) = 64 + 36 = 100$

$\rightarrow z^2 - 16z + 100 = 0$

ثم نقسم كثير الحدود $z^3 - 20z^2 + 164z - 400$ على $z^2 - 16z + 100$ فنجد أنّ:

$z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = (z^2 - 16z + 100)(z - 4) = 0$

$\rightarrow z = 4, z = 8 \pm 6i$

حلول هذه المعادلة هي: $z = 4, z = 8 + 6i, z = 8 - 6i$

المعادلة الجديدة هي: $x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$

إذا عوضنا $z = x^2$ ، تتحول هذه المعادلة إلى $z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$

إذن، حلول المعادلة $x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$ هي الجذور التربيعية لحلول المعادلة

$z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$

إذن، حلول هذه المعادلة هي: $x = \pm 2$، $x = \pm\sqrt{8 + 6i}$، $x = \pm\sqrt{8 - 6i}$

53 نجد الجذرين التربيعيين للعدد $8 + 6i$

$\sqrt{8 + 6i} = h + ik \quad \rightarrow 8 + 6i = h^2 - k^2 + 2ihk$

$\rightarrow 8 = h^2 - k^2$ و $6 = 2hk$

$h = \frac{3}{k}$

$h^2 - k^2 = 8 \quad \rightarrow h^2 - \frac{9}{k^2} = 8$

$\rightarrow h^4 - 8h^2 - 9 = 0$

$\rightarrow (h^2 + 1)(h^2 - 9) = 0 \ \rightarrow h = \pm 3 \ \rightarrow k = \pm 1$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $8 + 6i$ هما: $3 + i \ , -3 - i$

بالمثل نجد أنّ الجذرين التربيعيين للعدد المركب $8 - 6i$ هما: $3 - i \ , -3 + i$

ويكون للمعادلة $x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$ ستة حلول هي:

$x = 2 , x = -2, x = 3 + i, x = 3 - i, x = -3 + i, x = -3 - i$