العبقري

الرياضيات العلمي

التكامل وتطبيقاته

الفرع العلمي والصناعي

إعداد

حمدالله الطوباسي

0797662728 - 0779358752

الدرس الأول :
التكامل غير المحدود

تعريف : التكامل عكس التفاضل

توضيح :

تكامل (٦س) دس = $\text{٣س}^{٢} + \text{جـ}$

حيث جـ ثابت التكامل

نلاحظ أن مشتقة $\text{٣س}^{٢} + \text{جـ} = \text{٦س}$

مشتقة $\text{٣س}^{٢} + \text{٢٠} = \text{٦س}$

مشتقة $\text{٣س}^{٢} - \text{١٠} = \text{٦س}$

ناتج التكامل هو الاقتران الذي مشتقته ما داخل التكامل

① $\int$ هـ(س) دس

$\int$: رمز التكامل غير المحدود

هـ(س) : الاقتران المراد تكامله

دس : تكامل الاقتران بالنسبة لـ س

$\int$ هـ(س) دس يقرأ

تكامل هـ(س) دس

و يعني تكامل هـ(س) بالنسبة إلى س

② $\int$ هـَ(س) دس = هـ(س) + جـ

الجزء الأول :
قواعد التكامل غير المحدود

قاعده (١)

$\int$ أ دس = أس + جـ

مثال (١)

جد التكاملات التالية

① $\int -\text{٥}$ دس الحل $-\text{٥س} + \text{جـ}$

② $\int \frac{-\text{١}}{\text{٤}}$ دس الحل $\frac{-\text{١}}{\text{٤}}\text{س} + \text{جـ}$

③ $\int \pi$ دع الحل $\pi\text{ع} + \text{جـ}$

④ $\int$ دس الحل س + جـ

⑤ $\int \frac{-\text{دس}}{\text{٣}}$ الحل $\frac{-\text{١}}{\text{٣}}\text{س} + \text{جـ}$

⑥ $\int \frac{\text{٢دع}}{\text{٥}}$ الحل $\frac{\text{٢}}{\text{٥}}\text{ع} + \text{جـ}$

⑦ $\int (\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س})$ دس

الحل = $\int$ دس = س + جـ

قاعده (٢)

$$\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{دس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ}$$

حيث ن ≠ -١

تذكر :

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$$

مثال (٢) : جد التكاملات التاليه

① $\int س \, د س$ الحل $\frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

② $\int س^{٥} \, د س$ الحل $\frac{س^{٦}}{٦} + جـ$

③ $\int س^{-٨} \, د س$

الحل $\int س^{-٨} \, د س = \frac{س^{-٧}}{-٧} + جـ$

$= \frac{-١}{٧ س^{٧}} + جـ$

④ $\int س^{\frac{٢}{٣}} \, د س$

الحل $\int س^{\frac{٢}{٣}} \, د س = \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{٥} \sqrt[٣]{س^{٥}} + جـ$

⑤ $\int \frac{١}{س^{٣}} \, د س$

الحل $\int \frac{١}{س^{٣}} \, د س = \int س^{-٣} \, د س = \frac{س^{-٢}}{-٢} + جـ$

$= \frac{-١}{٢ س^{٢}} + جـ$

⑥ $\int \sqrt[٥]{س^{٢}} \, د س$

الحل $= \int س^{\frac{٢}{٥}} \, د س = \frac{٥}{٧} س^{\frac{٧}{٥}} + جـ$

$= \frac{٥}{٧} \sqrt[٥]{س^{٧}} + جـ$

⑦ $\int \frac{د س}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

الحل $= \int س^{\frac{-٢}{٣}} \, د س = ٣ س^{\frac{١}{٣}} + جـ$

$= ٣ \sqrt[٣]{س} + جـ$

قاعده (٣)

$\int أ \, ق(س) \, د س = أ \int ق(س) \, د س$

مثال (٣) جد التكاملات التاليه

① $\int ٦ س \, د س$ الحل $٣ س^{٢} + جـ$

② $\int ٥ س^{-٢} \, د س$ الحل $-٥ س^{-١} + جـ = \frac{-٥}{س} + جـ$

③ $\int ٢ س^{٥} \, د س$ الحل $\frac{س^{٦}}{٣} + جـ$

④ $\int -٤ س^{-٥} \, د س$

الحل $-٤ \frac{س^{-٤}}{-٤} + جـ = \frac{١}{س^{٤}} + جـ$

⑤ $\int \frac{-٣}{س^{٥}} \, د س$

الحل $\int -٣ س^{-٥} \, د س = -٣ \frac{س^{-٤}}{-٤} + جـ$

$= \frac{٣}{٤ س^{٤}} + جـ$

⑥ $\int ٥ \sqrt[٣]{س^{-٤}} \, د س$

الحل $\int ٥ س^{\frac{-٤}{٣}} \, د س = ٥ \times -٣ س^{\frac{-١}{٣}} + جـ$

$= \frac{-١٥}{\sqrt[٣]{س}} + جـ$

قاعده (٤)

$\int ق(س) \pm هـ(س) \, د س$

$= \int ق(س) \, د س \pm \int هـ(س) \, د س$

يوزع التكامل على الجمع والطرح فقط

تعمم القاعده لأكثر من اقترانين

مثال (٤) جد التكاملات التاليه

① $\int (٣ س^{٢} + ٥ س - ٤) \, د س$ (كتاب)

الحل $٣ \frac{س^{٣}}{٣} + ٥ \frac{س^{٢}}{٢} - ٤ س + جـ$

$= س^{٣} + \frac{٥}{٢} س^{٢} - ٤ س + جـ$

② $\int \left(س^{٦} + \frac{٣}{س^{٥}} - \sqrt[٥]{س^{٢}}\right) د س$ (كتاب)

الحل $\int \left(س^{٦} + ٣ س^{-٥} - س^{\frac{٢}{٥}}\right) د س$

$= \frac{س^{٧}}{٧} + ٣ \frac{س^{-٤}}{-٤} - \frac{٥}{٧} س^{\frac{٧}{٥}} + جـ$

$= \frac{س^{٧}}{٧} - \frac{٣}{٤ س^{٤}} - \frac{٥}{٧} \sqrt[٥]{س^{٧}} + جـ$

③ $\int \frac{س^{٣} \sqrt{س}}{س} د س$

الحل $= \int س^{٢} \sqrt{س}\, د س = \int س^{٢} \times س^{\frac{١}{٢}} د س$

$= \int س^{\frac{٥}{٢}} د س = \frac{٢}{٧} س^{\frac{٧}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٧} \sqrt{س^{٧}} + جـ$

④ $\int \frac{س^{٣} + ٥ س^{٢} - ٤}{س^{٢}} د س$

الحل $\int \left(س + ٥ - ٤ س^{-٢}\right) د س$

$= \frac{س^{٢}}{٢} + ٥ س - ٤ \frac{س^{-١}}{-١} + جـ$

$= \frac{س^{٢}}{٢} + ٥ س + \frac{٤}{س} + جـ$

⑤ $\int \frac{٢ س^{٢} - ٣ س}{\sqrt{س}} د س$

الحل $= \int \frac{٢ س^{٢} - ٣ س}{س^{\frac{١}{٢}}} د س$

$= \int \left(٢ س^{\frac{٣}{٢}} - ٣ س^{\frac{١}{٢}}\right) د س$

$= ٢ \times \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} - ٣ \times \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$= \frac{٤}{٥} \sqrt{س^{٥}} - ٢ \sqrt{س^{٣}} + جـ$

⑥ $\int \sqrt[٣]{س} \left(\sqrt[٣]{س} + \frac{٥}{\sqrt[٣]{س}}\right) د س$ (كتاب)

الحل $= \int (\sqrt[٣]{س})^{٢} + ٥\, د س$

$= \int \left(س^{\frac{٢}{٣}} + ٥\right) د س$

$= \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + ٥ س + جـ = \frac{٣}{٥} \sqrt[٣]{س^{٥}} + ٥ س + جـ$

⑦ $\int (٥ س + ٢)(س - ١) د س$

الحل $= \int \left(٥ س^{٢} - ٣ س - ٢\right) د س$

$= \frac{٥}{٣} س^{٣} - \frac{٣}{٢} س^{٢} - ٢ س + جـ$

⑧ $\int \frac{س^{٢} + ٢ س - ١٥}{س - ٣} د س$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{(س + ٥)(س - ٣)}{س - ٣} د س$

$= \int (س + ٥) د س = \frac{س^{٢}}{٢} + ٥ س + جـ$

⑨ $\int \frac{س - ٥}{\sqrt[٣]{س}} د س$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{س - ٥}{س^{\frac{١}{٣}}} د س = \int \left(س^{\frac{٢}{٣}} - ٥ س^{-\frac{١}{٣}}\right) د س$

$= \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} - ٥ \times \frac{٣}{٢} س^{\frac{٢}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{٥} \sqrt[٣]{س^{٥}} - \frac{١٥}{٢} \sqrt[٣]{س^{٢}} + جـ$

⑩ $\int \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} د س$

الحل $= \int \frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣ س + ٩)}{س - ٣} د س$

$= \int \left(س^{٢} + ٣ س + ٩\right) د س$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٣}{٢} س^{٢} + ٩ س + جـ$

⑪ $\int \frac{س^{٢} - ٩ س}{\sqrt{س} - ٣} د س$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{س (س - ٩)}{\sqrt{س} - ٣} د س$

$= \int \frac{س \cancel{(\sqrt{س} - ٣)} (\sqrt{س} + ٣)}{\cancel{\sqrt{س} - ٣}} د س$

$= \int س \left(س^{\frac{١}{٢}} + ٣\right) د س = \int \left(س^{\frac{٣}{٢}} + ٣ س\right) د س$

$= \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٣}{٢} س^{٢} + جـ = \frac{٢}{٥} \sqrt{س^{٥}} + \frac{٣}{٢} س^{٢} + جـ$

⑫ $\int \frac{(٢ - س)^{٣}}{س \sqrt{س}} د س$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{٨ - ١٢ س + ٦ س^{٢} - س^{٣}}{س^{\frac{٣}{٢}}} د س$

$= \int \left(٨ س^{-\frac{٣}{٢}} - ١٢ س^{-\frac{١}{٢}} + ٦ س^{\frac{١}{٢}} - س^{\frac{٣}{٢}}\right) د س$

$= ٨ \times -٢ س^{-\frac{١}{٢}} - ١٢ \times ٢ س^{\frac{١}{٢}} + ٦ \times \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + جـ$

$= \frac{-١٦}{\sqrt{س}} - ٢٤ \sqrt{س} + ٤ \sqrt{س^{٣}} - \frac{٢}{٥} \sqrt{س^{٥}} + جـ$

⑬ $\int \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - ١} د س$ (كتاب)

الحل = $\int \frac{س - س^{\frac{٣}{٢}}}{س^{\frac{١}{٢}} - ١} \, دس$

$= \int \frac{س\,(١ - س^{\frac{١}{٢}})}{س^{\frac{١}{٢}} - ١} \, دس$

$= \int س \times \frac{\cancel{س^{\frac{١}{٢}} - ١}}{س^{\frac{١}{٢}}} \times \frac{١}{\cancel{س^{\frac{١}{٢}} - ١}} \, دس$

$= \int \frac{س}{س^{\frac{١}{٢}}} \, دس = \int س^{\frac{١}{٢}} \, دس$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} + جـ$

$\boxed{ملحـ}$ ← إخراج س عامل مشترك من البسط

قاعدة (٥)

$\int (أس + ب)^{ن} \, دس$ ، $أ \neq صفر$ ، $ن \neq ١$

$= \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{أ \times (ن + ١)} + جـ$

مثال (٥) جد التكاملات التالية

① $\int (٥ + ٣س)^{٤} \, دس$ (كتاب)

الحل = $\frac{(٥ + ٣س)^{٥}}{١٥} + جـ$

② $\int \frac{٥ \, دس}{(١ - ٤س)^{٣}}$

الحل = $\int ٥\,(١ - ٤س)^{-٣} \, دس$

$= \frac{٥ \times (١ - ٤س)^{-٢}}{٨} + جـ = \frac{٥}{٨(١ - ٤س)^{٢}} + جـ$

③ $\int \sqrt[٣]{٢س - ١} \, دس$

الحل = $\int (٢س - ١)^{\frac{١}{٣}} \, دس$

$= \frac{٣}{٤} \frac{(٢س - ١)^{\frac{٤}{٣}}}{٢} + جـ$

$= \frac{٣}{٨} \sqrt[٣]{(٢س - ١)^{٤}}$

④ $\int \frac{١}{س^{٢} + ٦س + ٩} \, دس$

الحل = $\int \frac{١}{(س + ٣)^{٢}} \, دس$

$= \int (س + ٣)^{-٢} \, دس$

$= \frac{(س + ٣)^{-١}}{-١} + جـ = \frac{-١}{س + ٣} + جـ$

⑤ $\int \frac{س - ١}{(س^{٢} - ٢س + ١)^{٣}} \, دس$

الحل = $\int \frac{س - ١}{(س - ١)^{٦}} \, دس$

$= \int (س - ١)^{-٥} \, دس = \frac{(س - ١)^{-٤}}{-٤} + جـ$

$= \frac{-١}{٤(س - ١)^{٤}} + جـ$

⑥ $\int (٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٥)^{٥} \, دس$ (كتاب)

الحل = $\int \left((٢س + ٥)^{٢}\right)^{٥} \, دس$

$= \int (٢س + ٥)^{١٠} \, دس = \frac{(٢س + ٥)^{١١}}{٢٢} + جـ$

⑦ $\int س^{٨} \left(\frac{٢}{س} - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٤} \, دس$

الحل = $\int س^{٨} \left(\frac{٢س - ١}{س^{٢}}\right)^{٤} \, دس$

$= \int \cancel{س^{٨}} \times \frac{(٢س - ١)^{٤}}{\cancel{س^{٨}}} \, دس$

$= \int (٢س - ١)^{٤} \, دس = \frac{(٢س - ١)^{٥}}{١٠} + جـ$

⑧ $\int س \sqrt[٣]{\frac{٥}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}}} \, دس$ (كتاب)

الحل = $\int س \sqrt[٣]{\frac{٥ - س}{س^{٣}}} \, دس$

$= \int \cancel{س} \times \frac{\sqrt[٣]{٥ - س}}{\cancel{س}} \, دس = \int (٥ - س)^{\frac{١}{٣}} \, دس$

$= \frac{-٣}{٢} (٥ - س)^{\frac{٤}{٣}} = \frac{-٣}{٢} \sqrt[٣]{(٥ - س)^{٢}} + جـ$

⑨ $\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س + ٣} + \sqrt{٢س + ٣}} \, دس$ (كتاب)

الحل

$\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س + ٣} + \sqrt{٢س + ٣}} \times \frac{\sqrt{٧س + ٣} - \sqrt{٢س + ٣}}{\sqrt{٧س + ٣} - \sqrt{٢س + ٣}} \, دس$

$$= \int \frac{\cancel{\text{٥س}}\left(\sqrt{\text{٧س+٣}} - \sqrt{\text{٢س+٣}}\right)}{\cancel{\text{٥س}}} \, \text{دس}$$

$$= \int \left((\text{٧س+٣})^{\frac{١}{٢}} - (\text{٢س+٣})^{\frac{١}{٢}} \right) \text{دس}$$

$$= \frac{٢}{٣} \times \frac{(\text{٧س+٣})^{\frac{٣}{٢}}}{٧} - \frac{٢}{٣} \times \frac{(\text{٢س+٣})^{\frac{٣}{٢}}}{٢} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٢}{٢١} \sqrt{(\text{٧س+٣})^{٣}} - \frac{١}{٣} \sqrt{(\text{٢س+٣})^{٣}} + \text{جـ}$$

قاعدة (٦)
تكامل الاقترانات الدائرية

ق(س)	$\int$ ق(س) دس
جاس	− جتاس + جـ
جتاس	جاس + جـ
قا^{٢}س	ظاس + جـ
قتا^{٢}س	− ظتاس + جـ
قاس ظاس	قاس + جـ
قتاس ظتاس	− قتاس + جـ

ملاحظة :
إذا كانت الزاوية خطية (أس + ب) يتم قسمة ناتج التكامل على معامل الزاوية (أ)

توضيح :

$$\int \text{جتا}(\text{٣س} - ٥)\,\text{دس} = \frac{١}{٣}\,\text{جا}(\text{٣س} - ٥) + \text{جـ}$$

متطابقات هامة جداً

① $\text{ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

② $\text{ظتاس} = \frac{١}{\text{ظاس}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

③ $\text{قاس} = \frac{١}{\text{جتاس}}$

④ $\text{قتاس} = \frac{١}{\text{جاس}}$

⑤ $\text{جا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا٢س})$

⑥ $\text{جتا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا٢س})$

⑦ $\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} = ١$

⑧ $\text{ظا}^{٢}\text{س} = \text{قا}^{٢}\text{س} - ١$

⑨ $\text{ظتا}^{٢}\text{س} = \text{قتا}^{٢}\text{س} - ١$

⑩ $\text{قا}^{٢}\text{س} = ١ + \text{ظا}^{٢}\text{س}$

⑪ $\text{قتا}^{٢}\text{س} = ١ + \text{ظتا}^{٢}\text{س}$

⑫ $\text{جا٢س} = \text{٢جاس جتاس}$

⑬ $\text{جتا٢س} = \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}$

$= ١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س}$

$= ٢\text{جتا}^{٢}\text{س} - ١$

⑭ $\text{جتاس جتاص} = \frac{١}{٢}\left(\text{جتا}(\text{س+ص}) + \text{جتا}(\text{س−ص})\right)$

⑮ $\text{جاس جاص} = -\frac{١}{٢}\left(\text{جتا}(\text{س+ص}) - \text{جتا}(\text{س−ص})\right)$

⑯ $\text{جاس جتاص} = \frac{١}{٢}\left(\text{جا}(\text{س+ص}) + \text{جا}(\text{س−ص})\right)$

⑰ $\text{جاس جتاس} = \frac{١}{٢}\,\text{جا٢س}$

مثال (٦) : جد التكاملات التالية

① $\int (\text{جاس} - ٤\text{جتاس} + ٥\text{قتا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل $= - \text{جتاس} - ٤\text{جاس} - ٥\text{ظتاس} + \text{جـ}$

② $\int (\text{قا٣س ظا٣س} + \text{قا}^{٢}\text{٥س})\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل $= \frac{١}{٣}\,\text{قا٣س} + \frac{١}{٥}\,\text{ظا٥س} + \text{جـ}$

③ $\int\left(\text{جتا٤س ظا٤س} + \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{٦س}}\right)\text{دس}$ (كتاب)

الحل = $\int \text{جتا٤س} \times \frac{\text{جا٤س}}{\text{جتا٤س}} + \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{٦س}}\ \text{دس}$

= $\int \text{جا٤س} + \text{قا}^{2}\text{٦س}\ \text{دس}$

= $\frac{-1}{4}$ جتا٤س + $\frac{1}{6}$ ظا٦س + جـ

④ $\int \frac{3}{1-\text{جا}^{2}(1-3\text{س})}\ \text{دس}$

الحل = $\int \frac{3}{\text{جتا}^{2}(1-3\text{س})}\ \text{دس}$

= $\int 3\ \text{قا}^{2}(1-3\text{س})\ \text{دس}$

= ٣ × $\frac{1}{-3}$ ظا(١ − ٣س) + جـ = − ظا(١ − ٣س) + جـ

⑤ $\int$ قاس (ظاس + جتاس) دس كتاب

الحل = $\int$(قاس ظاس + ١) دس

= قاس + س + جـ

⑥ $\int \text{ظا}^{2}\text{س}$ دس (كتاب)

الحل = $\int(\text{قا}^{2}\text{س} - 1)$ دس

= ظاس − س + جـ

⑦ $\int \text{ظتا}^{2}\text{س}$ دس

الحل = $\int(\text{قتا}^{2}\text{س} - 1)$ دس

= − ظتاس − س + جـ

⑨ $\int(\text{قا}^{2}\text{س} - \text{ظا}^{2}\text{س})$ دس

الحل

= $\int$ دس = س + جـ

⑩ $\int \frac{\text{جتا}^{3}\text{س} - 5}{1-\text{جا}^{2}\text{س}}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل = $\int \frac{\text{جتا}^{3}\text{س} - 5}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\ \text{دس}$

= $\int(\text{جتاس} - 5\,\text{قا}^{2}\text{س})$ دس

= جاس − ٥ظاس + جـ

⑪ $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جا}^{2}\text{س جتا}^{2}\text{س}}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل = $\int \frac{\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جا}^{2}\text{س جتا}^{2}\text{س}}\ \text{دس}$

= $\int \frac{\cancel{\text{جتا}^{2}\text{س}}}{\text{جا}^{2}\text{س}\ \cancel{\text{جتا}^{2}\text{س}}} - \frac{\cancel{\text{جا}^{2}\text{س}}}{\cancel{\text{جا}^{2}\text{س}}\ \text{جتا}^{2}\text{س}}\ \text{دس}$

= $\int(\text{قتا}^{2}\text{س} - \text{قا}^{2}\text{س})$ دس

= − ظتاس − ظاس + جـ

⑫ $\int \frac{1-\text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جا}^{2}\frac{1}{2}\text{س جتا}^{2}\frac{1}{2}\text{س}}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل = $\int \frac{\text{جتا}^{2}\text{س}}{(\frac{1}{2}\text{جاس})^{2}}\ \text{دس} = \int \frac{4\,\text{جتا}^{2}\text{س}}{\text{جا}^{2}\text{س}}\ \text{دس}$

= $\int 4\,\text{ظتا}^{2}\text{س}\ \text{دس} = \int 4(\text{قتا}^{2}\text{س} - 1)\ \text{دس}$

= ٤(− ظتاس − س) + جـ

⑬ $\int \text{جا}^{2}\frac{\text{س}}{2}\ \text{دس}$

الحل = $\int \frac{1}{2}(1 - \text{جتاس})$ دس

= $\frac{1}{2}$(س − جاس) + جـ

⑭ $\int \text{جتا}^{2}\text{٢س}$ دس

الحل = $\int \frac{1}{2}(1 + \text{جتا٤س})$ دس

= $\frac{1}{2}$(س + $\frac{1}{4}$جا٤س) + جـ

⑮ $\int$ جا٤س جتا٨س دس

الحل = $\int \frac{1}{2}$(جا١٢س + جا −٤س) دس

= $\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{12}\right.$ جتا١٢س + $\frac{1}{4}$ جتا −٤س$\left.\right)$ + جـ

= $\frac{-1}{24}$ جتا١٢س + $\frac{1}{8}$ جتا٤س + جـ

⑯ $\int \text{جا٦س جا٤س دس}$

<u>الحل</u> = $\int \frac{١}{٢}(\text{جتا ١٠س} - \text{جتا ٢س})\ \text{دس}$

= $\frac{١}{٢}(\frac{١}{١٠}\text{جا١٠س} - \frac{١}{٢}\text{جا٢س}) + \text{ج}$

= $\frac{١}{٢٠}\text{جا١٠س} + \frac{١}{٤}\text{جا٢س} + \text{ج}$

⑰ $\int \text{جتا٣س جتا٧س دس}$ (كتاب)

<u>الحل</u> = $\int \frac{١}{٢}(\text{جتا١٠س} + \text{جتا-٤س})\ \text{دس}$

= $\frac{١}{٢}\int(\text{جتا١٠س} + \text{جتا٤س})\ \text{دس}$

= $\frac{١}{٢}(\frac{١}{١٠}\text{جا١٠س} + \frac{١}{٤}\text{جا٤س}) + \text{ج}$

= $\frac{١}{٢٠}\text{جا١٠س} + \frac{١}{٨}\text{جا٤س} + \text{ج}$

⑱ $\int \frac{٣}{١ - \text{جتا٢س}}\ \text{دس}$ (كتاب)

<u>الحل</u> = $\int \frac{٣}{١ - (١ - ٢\text{جا}^٢\text{س})}\ \text{دس}$

= $\int \frac{٣}{٢\text{جا}^٢\text{س}}\ \text{دس} = \int \frac{٣}{٢}\text{قتا}^٢\text{س دس}$

= $-\frac{٣}{٢}\text{ظتاس} + \text{ج}$

⑲ $\int (\text{جتاس} - \text{جاس})^٢\ \text{دس}$ (كتاب)

<u>الحل</u> $\int(\text{جتا}^٢\text{س} - ٢\text{جاس جتاس} + \text{جا}^٢\text{س})\ \text{دس}$

= $\int (١ - \text{جا٢س})\ \text{دس}$

= $\text{س} + \frac{١}{٢}\text{جتا٢س} + \text{ج}$

⑳ $\int (\text{ظتاس} - \text{قتاس})^٢\ \text{دس}$ (كتاب)

<u>الحل</u> = $\int(\text{ظتا}^٢\text{س} - ٢\text{ظتاس قتاس} + \text{قتا}^٢\text{س})\ \text{دس}$

= $\int(\text{قتا}^٢\text{س} - ١ - ٢\text{ظتاس قتاس} + \text{قتا}^٢\text{س})\ \text{دس}$

= $\int(٢\text{قتا}^٢\text{س} - ١ - ٢\text{ظتاس قتاس})\ \text{دس}$

= $-٢\text{ظتاس} - \text{س} + ٢\text{قتاس} + \text{ج}$

㉑ $\int(\frac{٥}{\text{جا}^٢\text{س}} - \frac{٣}{\text{جتا}^٢\text{س}})\ \text{دس}$ (كتاب)

<u>الحل</u> = $\int(٥\text{قتا}^٢\text{س} - ٣\text{قا}^٢\text{س})\ \text{دس}$

= $-٥\text{ظتاس} - ٣\text{ظاس} + \text{ج}$

㉒ $\int \frac{\text{جتا٣س}}{\text{جتاس}}\ \text{دس}$ (كتاب)+وزاره

ط٠٢حص

<u>الحل</u> = $\int \frac{\text{جتا(٢س+س)}}{\text{جتاس}}\ \text{دس}$

= $\int \frac{\text{جتا٢س جتاس} - \text{جا٢س جاس}}{\text{جتاس}}\ \text{دس}$

= $\int(\frac{\text{جتا٢س جتاس}}{\text{جتاس}} - \frac{\text{جا٢س جاس}}{\text{جتاس}})\ \text{دس}$

= $\int(\text{جتا٢س} - \frac{٢\text{جاس}\cancel{\text{جتاس}}\text{جاس}}{\cancel{\text{جتاس}}})\ \text{دس}$

= $\int(\text{جتا٢س} - ٢\text{جا}^٢\text{س})\ \text{دس}$

= $\int \text{جتا٢س} - (١ - \text{جتا٢س})\ \text{دس}$

= $\int(٢\text{جتا٢س} - ١)\ \text{دس}$

= $\text{جا٢س} - \text{س} + \text{ج}$

㉓ $\int \frac{١ - \text{جا٢س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\ \text{دس}$ (كتاب)

<u>الحل</u> = $\int \frac{\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س} - ٢\text{جاس جتاس}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\ \text{دس}$

= $\int \frac{\text{جا}^٢\text{س} - \text{جاس جتاس} + \text{جتا}^٢\text{س} - \text{جاس جتاس}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\ \text{دس}$

= $\int \frac{\text{جاس}(\text{جاس} - \text{جتاس}) - \text{جتاس}(\text{جاس} - \text{جتاس})}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$

= $\int \frac{\cancel{(\text{جاس} - \text{جتاس})}(\text{جاس} - \text{جتاس})}{\cancel{\text{جاس} - \text{جتاس}}}\ \text{دس}$

= $\int(\text{جاس} - \text{جتاس})\ \text{دس} = -\text{جتاس} - \text{جاس} + \text{ج}$

<u>ط٢</u> $\int \frac{\text{جا}^٢\text{س} - ٢\text{جاس جتاس} + \text{جتا}^٢\text{س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$

← تحلل عباره تربيعيه بمتغيرين

㉔ $\int \frac{\text{جاس} + \text{جتا}^2\text{س}}{1 - \text{جا}^2\text{س}} \, \text{دس}$ (كتاب)

<u>الحل</u>

$= \int \frac{\text{جاس} + \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}} + 1 \, \text{دس}$

$= \int (\text{ظاس قاس} + 1) \, \text{دس} = \text{قاس} + \text{س} + \text{ج}$

㉕ $\int (\text{جتا}^4\text{س} - \text{جا}^4\text{س}) \, \text{دس}$ (كتاب)

<u>الحل</u> $= \int (\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س})(\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}) \, \text{دس}$

$= \int \text{جتا}2\text{س} \, \text{دس} = \frac{1}{2}\text{جا}2\text{س} + \text{ج}$

<u>ملاحظة</u> :

في حال وجود ١±جا ، ١±جتا

١±قا ، ١±قتا في المقام

نضرب بالمرافق

<u>مثال (٧)</u> : جد التكاملات الآتيه

① $\int \frac{1}{1 + \text{جتاس}} \, \text{دس}$ (كتاب)

<u>الحل</u> $= \int \frac{1}{1 + \text{جتاس}} \times \frac{1 - \text{جتاس}}{1 - \text{جتاس}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{1 - \text{جتاس}}{1 - \text{جتا}^2\text{س}} \, \text{دس} = \int \frac{1 - \text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}}$

$= \int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} - \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int (\text{قتا}^2\text{س} - \text{ظتاس قتاس}) \, \text{دس}$

$= -\text{ظتاس} + \text{قتاس} + \text{ج}$

② $\int \frac{1}{\text{قاس} - 1} \, \text{دس}$ (كتاب)

<u>الحل</u> $= \int \frac{1}{\text{قاس} - 1} \times \frac{\text{قاس} + 1}{\text{قاس} + 1} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{قاس} + 1}{\text{قا}^2\text{س} - 1} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{قاس} + 1}{\text{ظا}^2\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \left(\frac{\text{قاس}}{\text{ظا}^2\text{س}} + \frac{1}{\text{ظا}^2\text{س}}\right) \text{دس}$

$= \int (\text{قاس ظتا}^2\text{س} + \text{ظتا}^2\text{س}) \, \text{دس}$

$= \int (\text{ظتاس قتاس} + \text{قتا}^2\text{س} - 1) \, \text{دس}$

$= -\text{قتاس} - \text{ظتاس} - \text{س} + \text{ج}$

㉖ $\int \frac{\text{جاس}}{1 - \text{جاس}} \, \text{دس}$ (كتاب)

<u>الحل</u> $\int \frac{\text{جاس}}{1 - \text{جاس}} \times \frac{1 + \text{جاس}}{1 + \text{جاس}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس}(1 + \text{جاس})}{1 - \text{جا}^2\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس}(1 + \text{جاس})}{\text{جتا}^2\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \text{ظاس} \times \frac{1 + \text{جاس}}{\text{جتاس}} \, \text{دس}$

$= \int \text{ظاس} (\text{قاس} + \text{ظاس}) \, \text{دس}$

$= \int (\text{ظاس قاس} + \text{ظا}^2\text{س}) \, \text{دس}$

$= \int (\text{ظاس قاس} + \text{قا}^2\text{س} - 1) \, \text{دس}$

$= \text{قاس} + \text{ظاس} - \text{س} + \text{ج}$

الجزء الثاني :
مشتقة التكامل غير المحدود

① ص = ∫ ق(س) دس

$\frac{دص}{دس}$ = ق(س)

مشتقة التكامل غير المحدود تساوي ما داخل رمز التكامل

② للتخلص من رمز التكامل غير المحدود نتبع أولاً ما يلي

أ) نكامل حسب قواعد التكامل

ب) نشتق طرفي العلاقة

مثال (٨)

إذا كان ص = ∫ $\sqrt[٣]{س^٢ + ٣س + ٥}$ دس

أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند س = -١

الحل نشتق الطرفين

$\frac{دص}{دس}$ = $\sqrt[٣]{س^٢ + ٣س + ٥}$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=-١}$ = $\sqrt[٣]{٣}$

مثال (٩) إذا كان ∫ ق(س) دس = س^٤ + س − ١

فإن قَ(١) تساوي

أ) ١٢ ب) -١٢ جـ) -٥ د) ٥

الحل نشتق الطرفين

ق(س) = ٤س^٣ + ١

قَ(س) = ١٢س^٢ ، قَ(١) = ١٢

مثال (١٠)

إذا كان ∫ ق(س) دس = جا^٢ ٢س + ظاس + جـ

أوجد قَ($\frac{\pi}{٤}$)

الحل نشتق الطرفين

ق(س) = ٢جا٢س × ٢ جتا٢س + قا^{٢}س

ق(س) = ٢ جا٤س + قا^{٢}س

قَ(س) = ٨ جتا٤س + ٢قا^{٢}س ظاس

قَ($\frac{\pi}{٤}$) = -٤

مثال (١١) ٢٠٠٩ ش

إذا كان ق(س) اقتران متصل على مجاله وكان ∫(ظا^{٢}س − قا^{٢}س) ق(س) دس = ٣ − س^٢ ، جد قاعدة ق(س)

الحل نشتق الطرفين

(ظا^{٢}س − قا^{٢}س) ق(س) = -٢س

− ق(س) = −٢س

$\boxed{ق(س) = ٢س}$

مثال (١٢) (٢٠١٢ شتوي) + كتاب

إذا كان ∫(ق(س) + ٢) دس = س^٣ + ب س^٢ + ٩

وكان ق(١) = ٧ ، جد قيمة الثابت ب

الحل نشتق الطرفين

ق(س) + ٢ = ٣س^٢ + ٢ ب س

ق(١) + ٢ = ٣ + ٢ب

٩ = ٣ + ٢ب $\boxed{ب = ٣}$

كتاب إذا كان ∫ قَ(س) دس = جا^{٢}س − أ جتاس + ١ ، قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ٠ ، جد قيمة (أ) $\boxed{-٢}$

مثال (١٣) (كتاب)

إذا كان ∫ ق(س) دس = جاس − جتاس + ٣

أثبت أن ق($\frac{\pi}{٢}$) − قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

الحل نشتق الطرفين

ق(س) = جتاس + حاس

ق'(س) = − حاس + جتاس

ق($\frac{\pi}{٢}$) − ق'($\frac{\pi}{٢}$) = ١ − −١ = ٢

الجزء الثالث :
العلاقة بين التكامل والإشتقاق

① ∫ق'(س) دس = ق(س) + جـ
② ∫ق''(س) دس = ق'(س) + جـ
③ تطبيقات هندسية
* ميل المماس = المشتقة الأولى
* ∫(ميل المماس) دس = ق(س) + جـ

مثال (١٤)

إذا كان ∫ق'(س) دس = $س^{٢}$ + ٣س + ٣ ، ق(١) = ٢ ، أوجد ق(٤)

الحل ∫ق'(س) دس = ق(س) + جـ

ق(س) + جـ = $س^{٢}$ + ٣س + ٣

ق(١) + جـ = ١ + ٣ + ٣

٢ + جـ = ٧ ← $\boxed{جـ = ٥}$

ق(س) = $س^{٢}$ + ٣س − ٢

ق(٤) = ٢٦

مثال (١٥)

إذا كان ق'(س) = ٢س − جتاس ،
أوجد ق(س) ، حيث ق($\frac{\pi}{٢}$) = ٤

الحل ق(س) = ∫ق'(س) دس

ق(س) = ∫(٢س − جتاس) دس

ق(س) = $س^{٢}$ − حاس + جـ

ق($\frac{\pi}{٢}$) = ٤

٤ = $\frac{\pi^{٢}}{٤}$ − حا$\frac{\pi}{٢}$ + جـ ← جـ = ٥ − $\frac{\pi^{٢}}{٤}$

ق(س) = $س^{٢}$ − حاس + ٥ − $\frac{\pi^{٢}}{٤}$

مثال (١٦) ٢٠١٤ ش

إذا كان ق''(س) = حاس ، ق'(π) = −١ ،
ق(π) = صفر ، جد قاعدة الإقتران ق(س)

الحل ق'(س) = ∫ق''(س) دس

ق'(س) = ∫حاس دس

ق'(س) = − جتاس + جـ

ق'(π) = −١ ← ١ + جـ = −١ $\boxed{جـ = −٢}$

ق'(س) = − جتاس − ٢

ق(س) = ∫ق'(س) دس = ∫(− جتاس − ٢) دس

ق(س) = − حاس − ٢س + جـ*

ق(π) = ٠ ← ٠ − ٢π + جـ* = ٠

جـ* = ٢π

ق(س) = − حاس − ٢س + ٢π

مثال (١٧) (كتاب)

إذا كان ∫(ق'(س) + ٢س) دس = $س^{٣}$ + أ$س^{٢}$ + ١
وكان ق'(١) = ٥ ، ق(٢) = ٧ ، جد ق(−٢)

الحل ق(س) + $س^{٢}$ + جـ = $س^{٣}$ + أ$س^{٢}$ + ١

ق'(س) + ٢س = ٣$س^{٢}$ + ٢أس

ق'(١) = ٥ ← ٥ + ٢ = ٣ + ٢أ

$\boxed{أ = ٢}$

ق(٢) = ٧ ← ٧ + ٤ + جـ = ٨ + ٢٤ + ١

١١ + جـ = ١٧ ← $\boxed{جـ = ٦}$

ق(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٥

ق(−٢) = −٨ + ٤ − ٥ = −٩

مثال (١٨) كتاب

إذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثالثة، حيث أن ق′(س) = ٣س^{٢} − ٢، وكانت النقطة (٠، ١) تقع على منحناه جد قاعدة الاقتران ق(س)

الحل ق(س) = $\int$ ق′(س) دس

ق(س) = $\int$(٣س^{٢} − ٢) دس

ق(س) = س^{٣} − ٢س + جـ

ق(٠) = ١ ← جـ = ١

ق(س) = س^{٣} − ٢س + ١

مثال (١٩) (كتاب)

إذا كان ق″(س) = $\frac{٦}{\sqrt{س}}$، ومنحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (٤، ٠)، وميل المماس عند هذه النقطة يساوي (١)، جد قاعدة ق(س)

الحل ق(٤) = ٠ ، ق′(٤) = ١

ق′(س) = $\int$ ق″(س) دس = $\int$ $\frac{٦}{\sqrt{س}}$ دس

ق′(س) = $\int$ ٦ س$^{-\frac{١}{٢}}$ دس = ١٢ س$^{\frac{١}{٢}}$ + جـ

ق′(س) = ١٢$\sqrt{س}$ + جـ

ق′(٤) = ١ ← ٢٤ + جـ = ١ $\boxed{جـ = −٢٣}$

ق′(س) = ١٢$\sqrt{س}$ − ٢٣

ق(س) = $\int$ ق′(س) دس = $\int$(١٢$\sqrt{س}$ − ٢٣) دس

ق(س) = $\int$(١٢ س$^{\frac{١}{٢}}$ − ٢٣) دس

ق(س) = ٨ $\sqrt{س^{٣}}$ − ٢٣س + جـ*

ق(٤) = ٠ ← ٦٤ − ٩٢ + جـ* = ٠

جـ* = ٢٨

ق(س) = ٨ $\sqrt{س^{٣}}$ − ٢٣س + ٢٨

مثال (٢٠) (كتاب)

إذا كان ق″(س) = −٤ جتا٢س، وكان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية قيمتها (−٢) عند س = $\frac{\pi}{٢}$، جد قاعدة الاقتران ق.

الحل ق′($\frac{\pi}{٢}$) = ٠ ، ق($\frac{\pi}{٢}$) = −٢

ق′(س) = $\int$ ق″(س) دس = $\int$ −٤ جتا٢س دس

ق′(س) = −٢ جا٢س + جـ

ق′($\frac{\pi}{٢}$) = ٠ ← ٠ + جـ = ٠ $\boxed{جـ = ٠}$

ق′(س) = −٢ جا٢س

ق(س) = $\int$ ق′(س) دس = $\int$ −٢ جا٢س دس

ق(س) = جتا٢س + جـ*

ق($\frac{\pi}{٢}$) = −٢ ← −١ + جـ* = −٢ $\boxed{جـ* = −١}$

ق(س) = جتا٢س − ١

مثال (٢١)

إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي ٥س^{٤} + ٢س + ٣، جد قاعدة الاقتران ق(س)، حيث ق(٢) = ٣

الحل ميل المماس = ق′(س) = ٥س^{٤} + ٢س + ٣

ق(س) = $\int$ ق′(س) دس = $\int$(٥س^{٤} + ٢س + ٣) دس

ق(س) = س^{٥} + س^{٢} + ٣س + جـ

ق(٢) = ٣ ← جـ = −٣٩

ق(س) = س^{٥} + س^{٢} + ٣س − ٣٩

الجزء الرابع: تطبيقات فيزيائية

اشتقاق ←

ف ع ت

→ تكامل

$ف(ن) = \int ع(ن)\, د ن$

$ع(ن) = \int ت(ن)\, د ن$

ملاحظات

① السرعة الابتدائية = ع(٠)

② عند تحرك جسم من السكون ع(٠) = ٠

③ أقصى ارتفاع عندما ع = ٠

④ إذا قذف جسم من ارتفاع معين (م) نحو الأعلى فإن

- ف(٠) عن سطح الأرض = م
- عند الارتطام في الأرض ف(ن) = ٠

⑤ جسم ساكن ← ع(ن) = ٠ ↓ ف(٠) = ٠

مثال (٢٢)

إذا كان تسارع جسيم بعد (ن) من الثواني ت = ٦ن + ٤، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (٣) ثوان من بدء الحركة علماً أن السرعة الابتدائية للجسيم ٢م/ث وأنه قطع ٢١م في أول ثانيتين من بدء حركته

الحل $ت(ن) = ٦ن + ٤$ ، $ع(٠) = ٢$ ، $ف(٢) = ٢١$

$ع(ن) = \int ت(ن)\, د ن = \int (٦ن + ٤)\, د ن$

$ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٤ن + جـ$

$ع(٠) = ٢ \leftarrow جـ = ٢$

$ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٤ن + ٢$

$ف(ن) = \int ع(ن)\, د ن = \int (٣ن^{٢} + ٤ن + ٢)\, د ن$

$ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٢ن + جـ^{*}$

$ف(٢) = ٢١ \leftarrow جـ^{*} = ١$

$ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٢ن + ١$

$ف(٣) = ٥٢$ م

مثال (٢٣)

قذف جسيم رأسياً للأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠م/ث، وتسارع مقداره -١٠م/ث²، إذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض بعد ثانية من حركته يساوي (٨٠م)، جد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض

الحل $ت(ن) = -١٠$ ، $ع(٠) = ٤٠$ ، $ف(١) = ٨٠$

$ع(ن) = \int ت(ن)\, د ن = \int -١٠\, د ن = -١٠ن + جـ$

$ع(٠) = ٤٠ \leftarrow جـ = ٤٠$ ، $ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$

$ف(ن) = \int ع(ن)\, د ن = \int (٤٠ - ١٠ن)\, د ن$

$ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^{٢} + جـ^{*}$

$ف(١) = ٨٠ \leftarrow جـ^{*} = ٤٥$

$ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^{٢} + ٤٥$

المطلوب $ف|_{ع=٠}$

$ع(ن) = ٠$

$٤٠ - ١٠ن = ٠$

$ن = ٤$

$ف(٤) = ١٢٥$ م

مثال (٢٤)

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته عند أي لحظة تساوي ٤ جتا٢ن ، أوجد المسافة التي يقطعها الجسيم عندما يسكن لحظياً للأول مره .

الحل ع(ن) = ٤ جتا٢ن ، جسم ساكن ← ع=٠

ف(٠) = ٠

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن = ∫ ٤ جتا٢ن دن

ف(ن) = ٢جا٢ن + جـ

ف(٠) = ٠ ← جـ = ٠ ، ف(ن) = ٢جا٢ن

المطلوب ف$_{ع=٠}$

ع = ٠ ٤ جتا٢ن = ٠ ← جتا٢ن = ٠

٢ن = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$

ن = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$

ن = $\frac{\pi}{٤}$ نأخذ الزمن الأقل (يسكن لأول مره)

ف($\frac{\pi}{٤}$) = ٢جا $\frac{\pi}{٢}$ = ٢ وحدة مساحة

مثال (٢٥) (٢٠٠١)

قذف جسيم رأسياً للأعلى من قمة برج يرتفع ٣٠م عن سطح الأرض ، فكانت سرعته بعد (ن) ثانيه ع = ٤٠ - ١٠ن ، أوجد ارتفاع هذا الجسيم عن سطح الأرض بعد ثانيه واحده من بدء الحركة

الحل ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن ، ف(٠) = ٣٠

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن = ∫(٤٠ - ١٠ن) دن

ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^{٢} + جـ

ف(٠) = ٣٠ ← جـ = ٣٠

ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^{٢} + ٣٠

ف(١) = ٦٥م

مثال (٢٦) (كتاب + ٢٠١٣ ص)

قذفت كره من قمة برج ارتفاعه ٤٥ متر عن سطح الأرض للأعلى بسرعة ابتدائيه مقدارها ٤٠م/ث^{٢} وبتسارع ثابت -١٠م/ث^{٢} جد الزمن الذي استغرقته الكره لتعود إلى سطح الأرض

الحل المطلوب ن عندما ف=٠

ف(٠) = ٤٥م ، ع(٠) = ٤٠م/ث

ت(ن) = -١٠

ع(ن) = ∫ت(ن) دن = ∫-١٠ دن = -١٠ن + جـ

ع(٠) = ٤٠ ← جـ = ٤٠ ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن = ∫(٤٠ - ١٠ن) دن

ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^{٢} + جـ*

ف(٠) = ٤٥ ← جـ* = ٤٥

ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^{٢} + ٤٥

ف(ن) = ٠

٤٠ن - ٥ن^{٢} + ٤٥ = ٠

ن^{٢} - ٨ن - ٩ = ٠

(ن - ٩)(ن + ١) = ٠

ن = ٩ ن = -١ تهمل

ن = ٩ ثواني

مثال (٢٧) ٢٠١٦ ش

إذا كان تسارع جسيم يعطى بالعلاقة ت(ن) = ٣ن + ٢
وكانت سرعته الابتدائية ٦م/ث واحسب المسافة التي
يقطعها بعد ثانية واحدة من بدء الحركة = ١٢م
جد المسافة التي يقطعها بعد (س) ثوان من بدء الحركة

ورقة عمل (١)

السؤال الأول:

أوجد التكاملات التالية

① $\int س^{٢}(س - \frac{١}{س})^{٢}\,دس$

الجواب $\frac{١}{٥}س^{٥} - \frac{٢}{٣}س^{٣} + س + جـ$

② $\int \frac{س^{٢} - ٣س - ٢٨}{س - ٧}\,دس$

الإجابه - $\frac{١}{٢}س^{٢} - ٤س + جـ$

③ $\int جا\frac{ط}{٣}\,دس$ $\boxed{\frac{\sqrt{٣}}{٢}س + جـ}$

٢٠١٠ ص
④ $\int \frac{دس}{جا^{٢}س - ١}$ $\boxed{-ظاس + جـ}$

٢٠٠٠
⑤ $\int (جتاس + جاس)^{٢}\,دس$

الجواب س − $\frac{١}{٢}$ جتا٢س + جـ

٢٠١٤
⑥ $\int (ظاس + قاس)^{٢}\,دس$

الجواب: ٢ظاس + ٢قاس − س + جـ

⑦ $\int \frac{جتا٢س}{(جتاس جاس)^{٢}}\,دس$

الجواب: − ظتاس − ظاس + جـ

⑧ $\int \frac{دس}{جتا٢س + جا^{٢}س}$ $\boxed{ظاس + جـ}$

⑨ $\int \frac{(س^{٢} - ٣)^{٢}}{س^{٢}}\,دس$

الجواب: $\frac{١}{٣}س^{٣} - ٦س - \frac{٩}{س} + جـ$

⑩ $\int \frac{١}{١ + جاس}\,دس$

الجواب: ظاس − قاس + جـ

⑪ $\int \frac{دس}{\sqrt{س+١} - \sqrt{س}}$

الجواب: $\frac{٢}{٣}\sqrt{(س+١)^{٣}} + \frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}} + جـ$

كتاب
⑫ $\int \frac{س^{٣} - ٤س^{٢}}{\sqrt{س} - ٢}\,دس$

الجواب $\frac{٢}{٧}\sqrt{س^{٧}} + \frac{٢}{٣}س^{٣} + جـ$

كتاب
⑬ $\int س^{٤}(٥ - \frac{٣}{س})^{٤}\,دس$

الجواب $\frac{(٥س - ٣)^{٥}}{٢٥} + جـ$

كتاب
⑭ $\int (١ - س)(س - ١)^{٥}\,دس$

الجواب $-\frac{١}{٧}(س - ١)^{٧} + جـ$

السؤال الثاني:

ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة، ق″(س) = ٣ − ٦س، جد قاعدة ق(س) علماً أن ق′(−١) = ٢، ق(٢) = ٣

الجواب: ق(س) = $\frac{٣}{٢}س^{٢} - س^{٣} + ٨س - ١١$

١٩٩٨
السؤال الثالث:

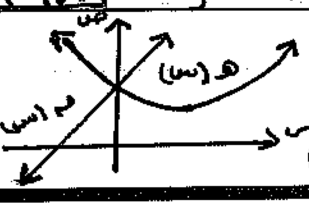
إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة، جد قاعدة ق(س) علماً أن ق″(س) = ٣س + ١، النقطة (٠، ١) نقطة حرجة للاقتران ق(س).

الجواب ق(س) = $\frac{١}{٢}س^{٣} + \frac{١}{٢}س^{٢} + ١$

٢٠١٤ ش
السؤال الرابع:

تتحرك كرة على خط مستقيم بتسارع مقداره $\frac{٢}{\sqrt{ن}} + ن$ م/ث²، حيث ن الزمن بالثواني، إذا كانت سرعتها ٥٠م/ث عندما ن = ٩ ثوان، وأن الكرة قطعت مسافة مقدارها (٢٣م) بعد (٤) ثوان من بدء الحركة، جد المسافة التي قطعتها الكرة بعد (٩) ثوان من بدء الحركة $\boxed{١٧١م}$

٢٠٠٠
السؤال الخامس



ق(س) = ٣س + ٤

هـ′(س) = ٢س − ٣

جد هـ(٥). $\boxed{١٤}$

السؤال السادس ٢٠١٦ ص: $\int ق(س)\,دس = ٢س + جاس - \int جتاس\,ق′(س)\,دس$ ، جد ق′(٠)

الدرس الثاني: معكوس المشتقة

تعريف:

إذا كان هـ(س) اقتران متصل على الفترة [أ، ب] فإن م(س) يسمى معكوساً لمشتقة الاقتران هـ(س) إذا كان

$\boxed{\text{م}'(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})}$ لكل س ∈ (أ، ب)

توضيح:

① معكوس المشتقة للاقتران هـ(س) هو التكامل غير المحدود للاقتران هـ

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{م}(\text{س}) = \int \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} \\ \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{م}(\text{س}) + \text{جـ}\right) = \text{م}'(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})\end{array}}$$

② مشتقة معكوس مشتقة هـ(س) تساوي هـ(س)

$$\boxed{\text{م}'(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})}$$

③ يوجد عدد لا نهائي من اقترانات معكوسة المشتقة للاقتران هـ(س) و الفرق بين كل منهما مقدار ثابت

④ الصورة العامة لمعكوس المشتقة

$$\boxed{\text{م}(\text{س}) + \text{جـ}}$$

مثال(1) جد معكوس المشتقة للاقتران هـ(س) في كل من الآتي

① $\text{هـ}(\text{س}) = 4\text{س}^2 + \text{قا}^2\text{س}$

الحل $\text{م}(\text{س}) = \int \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$

$\text{م}(\text{س}) = \int (4\text{س}^2 + \text{قا}^2\text{س})\,\text{دس}$

$\text{م}(\text{س}) = 4\frac{\text{س}^3}{3} + \text{ظاس} + \text{جـ}$

② $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{س}^3 - 5\text{س}^2}{\text{س}}$

الحل $\text{م}(\text{س}) = \int \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} = \int \frac{\text{س}^3 - 5\text{س}^2}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{م}(\text{س}) = \int (\text{س}^2 - 5\text{س})\,\text{دس} = \frac{\text{س}^3}{3} - \frac{5\text{س}^2}{2} + \text{جـ}$

كتاب ③ $\text{هـ}(\text{س}) = 3\text{س}^2$ ، $\text{م}(2) = 5$

الحل $\text{م}(\text{س}) = \int \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$

$\text{م}(\text{س}) = \int 3\text{س}^2\,\text{دس} \longrightarrow \text{م}(\text{س}) = \text{س}^3 + \text{جـ}$

$\text{م}(2) = 5 \Longleftarrow 8 + \text{جـ} = 5 \quad \text{جـ} = -3$

$\text{م}(\text{س}) = \text{س}^3 - 3$

مثال(2) كتاب

بين أن م(س) هو معكوس لمشتقة الاقتران هـ(س) في كل من الآتي

① $\text{م}(\text{س}) = \text{س}^4 - \text{جاس} - \frac{1}{3}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = 4\text{س}^3 - \text{جتاس}$

الحل $\text{هـ}(\text{س}) = 4\text{س}^3 - \text{جتاس}$ متصل على ح

$\text{م}'(\text{س}) = 4\text{س}^3 - \text{جتاس} = \text{هـ}(\text{س})$

∴ م(س) معكوس مشتقة هـ(س)

② $\text{م}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+1}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = (\text{س}+1)^{-2}$ ، $\text{س} \neq -1$

الحل $\text{هـ}(\text{س}) = (\text{س}+1)^{-2}$ متصل على مجاله ح - {-1}

$\text{م}'(\text{س}) = \frac{\text{س}+1 - \text{س}}{(\text{س}+1)^2} = \frac{1}{(\text{س}+1)^2}$

$\text{م}'(\text{س}) = (\text{س}+1)^{-2} = \text{هـ}(\text{س})$

∴ م(س) معكوس مشتقة هـ(س)

مثال (٢)

إذا كان ق(س) اقتران متصل على ح ، حيث ق(س) = ٤س^{٣} + ٣س^{٢} ، وكان م(س) معكوساً لمشتقة ق(س) ، أوجد م′(١)

الحل م′(س) = ق(س) = ٤س^{٣} + ٣س^{٢}

م′(١) = ٤ + ٣ = ٧

مثال (٣) ١٩٩٧

إذا كان ق(س) متصل على [٠، ٣]، وكان م(س) معكوساً لمشتقة ق(س) ، حيث م(س) = ٤س^{٣} - ٢س ، جد ∫(٢ - ق(س)) دس

الحل ∫(٢ - ق(س)) دس = ∫٢ دس - ∫ق(س) دس

= ٢س - (م(س) + جـ)

= ٢س - (٤س^{٣} - ٢س + جـ) = ٤س - ٤س^{٣} - جـ

مثال (٤) كتاب

إذا كان م(س) = ٢س^{٤} + $\sqrt{س^{٢}+٣}$ معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س)، جد ق(١)

الحل ق(س) = م′(س)

ق(س) = ٨س^{٣} + $\frac{س}{\sqrt{س^{٢}+٣}}$

ق(١) = ٨ + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١٧}{٢}$

مثال (٥) كتاب

إذا كان م(س) معكوساً لمشتقة ق(س) حيث ق(س) = ظتاس + ١ ، جد م″($\frac{\pi}{٤}$)

الحل م′(س) = ق(س)

م″(س) = ق′(س)

م″(س) = - قتا^{٢}س

م″($\frac{\pi}{٤}$) = -٢

مثال (٦)

إذا كان ق(س) = أس + ب ، وكان م(س) هو معكوس مشتقة ق(س) ، جد قاعدة ق(س) علماً أن م′(-٢) = ٣ ، م″(-٢) = ٥

الحل م′(س) = ق(س) = أس + ب

م′(-٢) = ٣ ← -٢أ + ب = ٣

م″(س) = ق′(س) = أ

م″(-٢) = ٥ ← $\boxed{أ = ٥}$

-٢أ + ب = ٣ ← -١٠ + ب = ٣ $\boxed{ب = ١٣}$

ق(س) = ٥س + ١٣

مثال (٧) كتاب

إذا كان الاقترانان م$_{١}$(س)، م$_{٢}$(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق، وكان م$_{١}$(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ٥ ، م$_{٢}$(٢) = ٤ ، جد قاعدة م$_{٢}$(س)

الحل م$_{٢}$(س) = ٣س^{٢} - ٢س + جـ

م$_{٢}$(٢) = ٤ ← ١٢ - ٤ + جـ = ٤ ← $\boxed{جـ = -٤}$

م$_{٢}$(س) = ٣س^{٢} - ٢س - ٤

مثال (٨) ٢٠١١ ش

إذا كان الاقترانان م(س)، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) المتصل أوجد (٢م - هـ)′(س)

الحل (٢م - هـ)′(س) = ٢م′(س) - هـ′(س)

= ٢ق(س) - ق(س) = ق(س)

مثال (٩) (كتاب)

إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق

وكان ل(س) = ٣م(س) - ٥هـ(س)

جد ل′(س)

الحل ل(س) = ٣م(س) − ٥هـ(س)

ل$'$(س) = ٣م$'$(س) − ٥هـ$'$(س)

ل$'$(س) = ٣ ص(س) − ٥ ص(س) = −٢ ص(س)

مثال (١٠) (كتاب)

اذا كان الاقترانان م(س)، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ص(س)، وكان ل(س) = م(س) − هـ(س)، جد ل$'$(٤)

الحل ل$'$(س) = م$'$(س) − هـ$'$(س)

ل$'$(س) = ص(س) − ص(س) = صفر

ل$'$(٤) = صفر

مثال (١١)

اكتب اقترانين معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ص(س) = ٣س^{٢}+١

الحل م(س) = ∫ص(س) دس = ∫(٣س^{٢}+١) دس

م(س) = س^{٣} + س + جـ

م$_{١}$(س) = س^{٣} + س + ٩

م$_{٢}$(س) = س^{٣} + س − ١٤

يمكن كتابة عدد لا نهائي من الاقترانات والفرق بينها الثابت (جـ)

ورقة عمل (٢)

السؤال الأول : كتاب

جد معكوساً لمشتقة كل من الاقترانات الآتية

① ق(س) = قاس جتاس

الجواب م(س) = س + جـ

② ق(س) = ٥ + ٥ ظا^{٢}س

الجواب م(س) = ٥ ظاس + جـ

السؤال الثاني :

إذا كان م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) ، حيث

$\int$ م(س) د س = جا^{٢}س + جـ ، جد ق($\frac{\pi}{٢}$)

$\boxed{-٢}$

السؤال الثالث :

إذا كان م(س) = $\frac{١}{٢}$ س^٤ ـ س^٢ + ٧ ، هو معكوساً لمشتقة ق(س) المتصل على ح

جد ق$''$(١)

$\boxed{٦}$

السؤال الرابع :

إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) ، وكان ع(س) = ٣هـ(س) − م(س) + ٦

جد ع$'$(س)

$\boxed{٢ \text{ ق(س)}}$

السؤال الخامس : ١٣ ، ٢ ش

إذا كان م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) ، حيث م(س) = ظتاس + ١ ، فإن ق($\frac{\pi}{٤}$) تساوي

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ [✓ جـ) -٢] د) ٢

السؤال السادس :

إذا كان الاقترانان م$_١$(س) ، م$_٢$(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) حيث م$_١$(س) = س^٢ ـ ٥ س + ٣ ، أوجد قاعدة م$_٢$(س) علماً أن م$_٢$(٠) = −٤ .

الجواب م$_٢$(س) = س^٢ ـ ٥ س − ٤

الدرس الثالث: التكامل المحدود

تعريف:

التكامل المحدود للاقتران هـ'(س) في الفترة [أ ، ب] هو الفرق بين قيمتي التكامل غير المحدود للاقتران هـ'(س) عند القيمتين أ ، ب

$$\boxed{\int_{أ}^{ب} هـ'(س)\,دس = هـ(س)\Big|_{أ}^{ب} = هـ(ب) - هـ(أ)}$$

حيث أ : الحد السفلي للتكامل

ب : الحد العلوي للتكامل

ملاحظات

① $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس = م(س)\Big|_{أ}^{ب}$

$= م(ب) - م(أ)$

② $\int_{أ}^{ب} هـ'(س)\,دس = هـ(س)\Big|_{أ}^{ب}$

$= هـ(ب) - هـ(أ)$

③ $\int_{أ}^{ب} هـ''(س)\,دس = هـ'(س)\Big|_{أ}^{ب}$

$= هـ'(ب) - هـ'(أ)$

④ عند إجراء التكامل المحدود لا تكتب ثابت التكامل (جـ)

⑤ قيمة التكامل المحدود مقدار ثابت

⑥ إذا أمكن إيجاد قيمة التكامل في الفترة [أ ، ب] $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس$ يكون هـ(س) قابل للتكامل في الفترة [أ ، ب]

⑦ $\boxed{\int_{أ}^{ب} جـ\,دس = جـ\,(ب - أ)}$

مثال (١)

إذا كانت هـ'(س) مشتقة الاقتران هـ(س) المعرف في [١، ٦] ، أوجد $\int_{1}^{6} هـ'(س)\,دس$ علماً أن هـ(١) = ٨ ، هـ(٦) = -٥

الحل $\int_{1}^{6} هـ'(س)\,دس = هـ(س)\Big|_{1}^{6}$

$= هـ(٦) - هـ(١) = -٥ - ٨ = -١٣$

مثال (٢) كتاب

إذا كان هـ(س) اقتران متصل ، حيث هـ(١) = ٤ ، هـ(٢) = ١٢ ، $\int_{1}^{2} أ\,هـ'(س)\,دس = ١٦$ جد قيمة الثابت (أ)

الحل $أ\int_{1}^{2} هـ'(س)\,دس = ١٦$

$أ\ هـ(س)\Big|_{1}^{2} = ١٦$

$أ\,(هـ(٢) - هـ(١)) = ١٦$

$أ\,(١٢ - ٤) = ١٦ \leftarrow ٨أ = ١٦$ $\boxed{أ = ٢}$

مثال (٣)

إذا كان هـ'(س) = ٣س² هي مشتقة هـ(س) المعرف على [-٣ ، ٢] ، أوجد قيمة هـ(٢) - هـ(-٣)

الحل $هـ(س) = \int هـ'(س)\,دس = \int ٣س^2\,دس$

$هـ(س) = س^3 + جـ$

$هـ(٢) - هـ(-٣) = ٨ + جـ - (-٢٧ + جـ)$

$= ٣٥$

مثال (٤)

جد قيمة كل من التكاملات الآتية

① $\int_{-١}^{٣} ٥ \, \text{دس} = ٥(٣ - -١) = ٢٠$

② $\int_{٢}^{٦} -٣ \, \text{دس} = -٣(٦-٢) = -١٢$

③ $\int_{٠}^{٢} \pi \, \text{دس} = \pi(٢-٠) = ٢\pi$

④ $\int_{٣}^{٦} (\frac{١}{٢}\text{س} - ٦)\, \text{دس}$

الحل $\frac{١}{٤}\text{س}^{٢} - ٦\text{س} \Big]_{٣}^{٦}$

$= (\frac{٣٦}{٤} - ٣٦) - (\frac{٩}{٤} + ١٨) = \frac{-١٨٩}{٤}$

⑤ $\int_{٠}^{١} (\text{س}^{٢} + ٣\text{س})\, \text{دس}$

الحل $\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢} \Big|_{٠}^{١}$

$= (\frac{١}{٣} - \frac{٣}{٢}) - (٠) = \frac{١١}{٦}$

⑥ $\int_{١}^{٢} (\text{س}^{٢} - \text{س}^{٣})\, \text{دس}$

الحل $\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{\text{س}^{٤}}{٤} \Big|_{١}^{٢}$

$= (\frac{٨}{٣} - \frac{١٦}{٤}) - (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}) = \frac{-١٧}{١٢}$

⑦ $\int_{١}^{١٦} \sqrt{\text{س}}\, \text{دس}$

الحل $= \int_{١}^{١٦} \text{س}^{\frac{١}{٢}}\, \text{دس} = \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{١}^{١٦}$

$= \frac{٢}{٣}(\sqrt{\text{س}})^{٣} \Big|_{١}^{١٦} = \frac{٢}{٣}(٦٤-١) = ٤٢$

⑧ $\int_{١}^{٢} \sqrt[٣]{٢\text{س} - ٣}\, \text{دس}$

الحل $= \int_{١}^{٢} (٢\text{س} - ٣)^{\frac{١}{٣}}\, \text{دس}$

$= \frac{٣}{٨} (٢\text{س} - ٣)^{\frac{٤}{٣}} \Big|_{١}^{٢}$

$= \frac{٣}{٨} (\sqrt[٣]{٢\text{س} - ٣})^{٤} \Big|_{١}^{٢}$

$= \frac{٣}{٨} (١-١) = \text{صفر}$

⑨ $\int_{-٢}^{٠} \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} + ٣}\, \text{دس}$

الحل $= \int_{-٢}^{٠} \frac{(\text{س}-٣)\cancel{(\text{س}+٣)}}{\cancel{\text{س}+٣}}\, \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٣\text{س} \Big|_{-٢}^{٠} = ٠ - ٨ = -٨$

⑩ $\int_{١}^{٣} \frac{٧}{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}\, \text{دس}$

الحل $= \int_{١}^{٣} \frac{٧\, \text{دس}}{(\text{س}+٢)^{٢}} = \int_{١}^{٣} ٧(\text{س}+٢)^{-٢}\, \text{دس}$

$= \frac{٧(\text{س}+٢)^{-١}}{-١} \Big|_{١}^{٣} = \frac{-٧}{\text{س}+٢} \Big|_{١}^{٣}$

$= \frac{-٧}{٥} - \frac{-٧}{٣} = \frac{١٤}{١٥}$

⑪ $\int^{\frac{\pi}{٢}} (\text{جتاس} - \text{جاس})\, \text{دس}$

الحل $= (\text{جاس} + \text{جتاس}) \Big|^{\frac{\pi}{٢}}$

$= (١ + ٠) - (٠ + ١) = \text{صفر}$

⑫ $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{ظتاس}}{\text{جاس}}\, \text{دس}$

الحل $= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{ظتاس قتاس دس}$

$= -\text{قتاس} \Big|_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} = \sqrt{٢} - ١$

⑬ $\int^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}^{٢}\text{س دس}$

الحل $= \int^{\frac{\pi}{٢}} (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جتا٢س})\, \text{دس}$

$= (\frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٤}\text{جا٢س}) \Big|^{\frac{\pi}{٢}}$

$= (\frac{\pi}{٤} - ٠) - (٠) = \frac{\pi}{٤}$

(١٤) ٢٠١٠ ص $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{\text{دس}}{١-\text{جتاس}}$

الحل $= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{١}{١-\text{جتاس}} \times \frac{١+\text{جتاس}}{١+\text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{١+\text{جتاس}}{١-\text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{دس} = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{١+\text{جتاس}}{\text{جا}^٢\text{س}}\ \text{دس}$

$\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} (\text{قتا}^٢\text{س} + \text{ظتاس قتاس})\ \text{دس}$

$= (-\text{ظتاس} - \text{قتاس}) \Big|_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}}$

$= \left(-\frac{١}{\sqrt{٣}} - \frac{٢}{\sqrt{٣}}\right) - (-١ - \sqrt{٢}) = ١ + \sqrt{٢} - \sqrt{٣}$

(١٥) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\ \text{دس}$

الحل $= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\ \text{دس}$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{(\text{جتاس} - \text{جاس})\cancel{(\text{جتاس} + \text{جاس})}}{\cancel{\text{جاس} + \text{جتاس}}}\ \text{دس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{جتاس} - \text{جاس})\ \text{دس}$

$= \text{جاس} + \text{جتاس} \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= (١ + ٠) - (٠ + ١) = \text{صفر}$

(١٦) ٢٠١١ ص $\int_{-\frac{\pi}{٣}}^{٠} \text{جا}^٢\text{س جتا}^٢\text{س دس}$

الحل $= \int_{-\frac{\pi}{٣}}^{٠} \left(\frac{١}{٢}\text{جا٢س}\right)^٢ \text{دس} = \int_{-\frac{\pi}{٣}}^{٠} \frac{١}{٤}\text{جا}^٢\text{٢س دس}$

$= \int_{-\frac{\pi}{٣}}^{٠} \frac{١}{٨}(١ - \text{جتا٤س})\ \text{دس}$

$= \frac{١}{٨}\left(\text{س} - \frac{١}{٤}\text{جا٤س}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{٣}}^{٠}$

$= \frac{١}{٨}\left((٠) - \left(-\frac{\pi}{٣} - \frac{١}{٤}\text{جا} -\frac{٤\pi}{٣}\right)\right)$

$= \frac{\pi}{٢٤} - \frac{\sqrt{٣}}{٦٤}$

مثال (٥) ٢٠١٧ ش

إذا كان م(س) = س هـ$^{\text{س}}$ − هـ$^{\text{س}}$ "معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) = س هـ$^{\text{س}}$" وكان $\int_{٠}^{٢} (٤\text{ق(س)} + \text{هـ}^٢)\ \text{دس} + \int_{٤}^{\text{هـ}^٢} \frac{\text{أ}}{\text{هـ}-٢}\ \text{دس}$ يساوي (٢٨)، جد قيمة الثابت (أ)

الحل $\int_{٠}^{٢} (٤\text{ق(س)} + \text{هـ}^٢)\ \text{دس} + \int_{٤}^{\text{هـ}^٢} \frac{\text{أ}}{\text{هـ}-٢}\ \text{دس} = ٢٨$

$٤\text{م(س)} + \text{هـ}^٢\text{س} \Big|_{٠}^{٢} + \frac{\text{أ}}{\text{هـ}-٢}(\text{هـ}^٢ - ٤) = ٢٨$

$٤\text{م(٢)} + ٢\text{هـ}^٢ - ٤\text{م(٠)} + ٠ + \frac{\text{أ}}{\cancel{\text{هـ}-٢}} \times \cancel{(\text{هـ}-٢)}(\text{هـ}+٢)$

$٤(٢\text{هـ}^٢ - \text{هـ}^٢) + ٢\text{هـ}^٢ - ٤(-١) + \text{أ}(\text{هـ}+٢) = ٢٨$

$٦\text{هـ}^٢ + ٤ + \text{أ}(\text{هـ}+٢) = ٢٨$

$\text{أ}(\text{هـ}+٢) = ٢٤ - ٦\text{هـ}^٢$

$\text{أ} = \frac{٦(٤ - \text{هـ}^٢)}{\text{هـ}+٢} = \frac{٦(٢-\text{هـ})\cancel{(٢+\text{هـ})}}{\cancel{\text{هـ}+٢}}$

$\text{أ} = ٦(٢ - \text{هـ})$

مثال (٦)

إذا كان $\int_{١}^{٢\text{أ}} ٣\ \text{دس} = ٦$، فإن قيمة أ

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $-\frac{٣}{٢}$ ج) $\frac{٤}{٣}$ د) $\frac{٢}{٣}$

الحل ٣(٢أ − ١) = ٦ ← ٢أ − ١ = ٢

٢أ = ٣ ← $\boxed{\text{أ} = \frac{٣}{٢}}$

مثال (٧) كتاب

إذا كان $\int_{\text{أ}}^{٢} ٢\text{أ}\ \text{دس} = -٣٠$

جد قيم (أ)

الحل ٢أ(٢ − أ) = −٣٠ ← ٢أ − أ^٢ = −١٥

أ^٢ − ٢أ − ١٥ = ٠ ← (أ − ٥)(أ + ٣) = ٠

أ = ٥ ، أ = −٣ ، أ = {−٣ ، ٥}

مثال (٨) كتاب

إذا كان $\int_{\text{أ}+١}^{٢+٣\text{أ}} ٥\ \text{دس} = ٤٠$ ، جد قيمة (أ)

الحل ٥(٢ + ٣أ − ١ − أ) = ٤٠

١ + ٢أ = ٨ ← $\boxed{\text{أ} = \frac{٧}{٢}}$

مثال (٩)

إذا كان $\int_{١}^{٢} (٢\text{س} - \text{أ}) = ١٠$ ، جد قيمة (أ)

الحل $\text{س}^{٢} - \text{أس} \Big|_{١}^{٢} = ١٠$

$(٤ - ٢\text{أ}) - (١ - \text{أ}) = ١٠ \leftarrow \boxed{\text{أ} = -٢}$

مثال (١٠)

إذا كان $\int_{٠}^{٣} (\text{أس}^{٢} - ٩)\,\text{دس} = -١٠$ ،

جد قيمة الثابت (أ)

الحل $\frac{\text{أس}^{٣}}{٣} - ٩\text{س} \Big|_{٠}^{٣} = -١٠$

$٩\text{أ} - ٢٧ = -١٠ \leftarrow ٩\text{أ} = ١٢ \leftarrow \boxed{\text{أ} = \frac{٤}{٣}}$

مثال (١١)

إذا كان $\int_{١}^{\text{أ}} (٢\text{س}^{٢} + ٦\text{س})\,\text{دس} = ٠$

أوجد قيم (أ)

الحل $\frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} \Big|_{١}^{\text{أ}} = ٠$

$\frac{٢}{٣}\text{أ}^{٣} + ٣\text{أ}^{٢} - (\frac{٢}{٣} + ٣) = ٠$

$\frac{٢}{٣}\text{أ}^{٣} + ٣\text{أ}^{٢} - \frac{١١}{٣} = ٠$

$٢\text{أ}^{٣} + ٩\text{أ}^{٢} - ١١ = ٠$

أ = ١ ①

$\text{أ}^{٣}$	$\text{أ}^{٢}$	أ	ثابت
٢	٩	٠	−١١
	+٢	+١١	+١١
٢	١١	١٩	٠

$(\text{أ} - ١)(٢\text{أ}^{٢} - ١١\text{أ} - ١١) = ٠$

$\text{أ} = \frac{-١١ \pm \sqrt{٣٣}}{٤}$

$\text{أ} = \left(١ ، \frac{-١١ + \sqrt{٣٣}}{٤} ، \frac{-١١ - \sqrt{٣٣}}{٤}\right)$

مثال (١٢) كتاب

جد كثير الحدود ق(س) من الدرجة الأولى حيث

$\int_{-١}^{١} \text{ق(س)}\,\text{دس} = ٤ ، \int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} = ٢$

الحل ق(س) = أس + ب

$\int_{-١}^{١} (\text{أس} + \text{ب})\,\text{دس} = \frac{\text{أس}^{٢}}{٢} + \text{ب س} \Big|_{-١}^{١} = ٤$

$(\frac{\text{أ}}{٢} + \text{ب}) - (\frac{\text{أ}}{٢} - \text{ب}) = ٤$

$٢\text{ب} = ٤ \quad \boxed{\text{ب} = ٢}$

$\int_{١}^{٣} (\text{أس} + ٢)\,\text{دس} = \frac{\text{أس}^{٢}}{٢} + ٢\text{س} \Big|_{١}^{٣} = ٢$

$(\frac{٩\text{أ}}{٢} + ٦) - (\frac{\text{أ}}{٢} + ٢) = ٢$

$٤\text{أ} = -٢ \leftarrow \boxed{\text{أ} = \frac{-١}{٢}}$

$\text{ق(س)} = \frac{-١}{٢}\text{س} + ٢$

مثال (١٣) كتاب + ٢٠١٣ ص

إذا كان $\int_{-١}^{٣} \left(٣\text{س}^{٢} - ٢\int_{٠}^{\text{جـ}} ٣\text{م}\,\text{دم}\right)\text{دس} = -٢٠$

أوجد قيم جـ

الحل $\int_{٠}^{\text{جـ}} ٣\text{م}\,\text{دم} = \frac{٣\text{م}^{٢}}{٢} \Big|_{٠}^{\text{جـ}} = \frac{٣\text{جـ}^{٢}}{٢}$

$\int_{-١}^{٣} (٣\text{س}^{٢} - ٣\text{جـ}^{٢})\,\text{دس} = -٢٠$

$\text{س}^{٣} - ٣\text{جـ}^{٢}\text{س} \Big|_{-١}^{٣} = -٢٠$

$(٢٧ - ٩\text{جـ}^{٢}) - (-١ + ٣\text{جـ}^{٢}) = -٢٠$

$٢٨ - ١٢\text{جـ}^{٢} = -٢٠ \leftarrow ١٢\text{جـ}^{٢} = ٤٨$

$\text{جـ} = \{٢ ، -٢\}$

مثال (١٤) كتاب + ٢٠١١ ش

إذا كان ق(س) كثير حدود وكان

$\text{ق}(٠) = ٥ ، \text{ق}''(\text{س}) = ٤ ، \int_{٠}^{١} \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = ٣$

أوجد قاعدة الاقتران ق(س)

الحل $\text{ق}'(\text{س}) = \int \text{ق}''(\text{س})\,\text{دس} = \int ٤\,\text{دس}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٤\text{س} + \text{جـ}$

$\int_{٠}^{١} \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int_{٠}^{١} (٤\text{س} + \text{جـ})\,\text{دس} = ٣$

$٢\text{س}^{٢} + \text{جـ س} \Big|_{٠}^{١} = ٣ \longrightarrow ٢ + \text{جـ} = ٣ \rightarrow \boxed{\text{جـ} = ١}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٤\text{س} + ١$

$\text{ق(س)} = \int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int (٤\text{س} + ١)\,\text{دس}$

$\text{ق(س)} = ٢\text{س}^{٢} + \text{س} + \text{جـ}^{*}$

$\text{ق}(٠) = ٥ \leftarrow \text{جـ}^{*} = ٥$

$\text{ق(س)} = ٢\text{س}^{٢} + \text{س} + ٥$

مثال (١٥) ٢٠٠٠

أوجد قيم العدد الصحيح الموجب (ن) علماً أن $\int_{-١}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\,\text{دس} = ٢ \times \int_{٠}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\,\text{دس}$

الحل $\left.\frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}\right|_{-١}^{١} = ٢ \times \left.\frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}\right|_{٠}^{١}$

$\frac{(١)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} - \frac{(-١)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} = ٢\left(\frac{(١)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} - ٠\right)$

$\frac{١}{\text{ن}+١} - \frac{(-١)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} = \frac{٢}{\text{ن}+١}$

$١ - (-١)^{\text{ن}+١} = ٢$

$(-١)^{\text{ن}+١} = -١$

نفرض $\text{م} = \text{ن}+١$

$(-١)^{\text{م}} \begin{cases} = ١ \rightarrow \text{م زوجي} \\ = -١ \rightarrow \text{م فردي} \end{cases}$

$\therefore$ ن + ١ = عدد فردي

ن = عدد فردي − ١   ن = الأعداد الزوجية

ن = الأعداد الزوجية الصحيحة الموجبة

$\text{ن} = \{٢، ٤، ٦، \ldots\}$

الجزء الثاني :
خواص التكامل المحدود

الخاصية الأولى :

الخاصية الخطية

① $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{جـ} \times \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

② $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{ق}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س})\right)\text{دس}$

$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$

وتعمم لأكثر من اقترانين

مثال (١٦)

إذا كان $\int_{١}^{٢} ٢\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٠$ ، أوجد $\int_{١}^{٢} \left(\text{ق}(\text{س}) + ٦\right)\text{دس}$

الحل $\int_{١}^{٢} ٢\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٠$

$\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٥$

$\int_{١}^{٢} \left(\text{ق}(\text{س}) + ٦\right)\text{دس} = \int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{١}^{٢} ٦\,\text{دس}$

$٥ + ٦(٢-١) = \boxed{١١}$

مثال (١٧)

إذا كان $\int_{٠}^{٢} \left(\text{ق}(\text{س}) - ٢\text{س}\right)\text{دس} = ٢٠$

أوجد $\int_{٠}^{٢} ٣\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

الحل $\int_{٠}^{٢} \left(\text{ق}(\text{س}) - ٢\text{س}\right)\text{دس} = \int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{٠}^{٢} ٢\text{س}\,\text{دس}$

$\int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \text{س}^{٢}\Big|_{٠}^{٢} = ٢٠$

$\int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - ٤ = ٢٠ \leftarrow \int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢٤$

$\int_{٠}^{٢} ٣\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٣ \times \int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

$= ٣ \times ٢٤ = ٧٢$

مثال (١٨)

إذا كان $\int_{-٣}^{٢} \left(٢\,\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س} - ٣\right)\text{دس} = ٨$

أوجد $\int_{-٣}^{٢} \left(٤\,\text{ق}(\text{س}) - ٣\text{س}^{٢}\right)\text{دس}$

الحل $\int_{-٣}^{٢} \left(٢\,\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س} - ٣\right)\text{دس} = ٢\int_{-٣}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{-٣}^{٢} (٢\text{س} - ٣)\,\text{دس}$

$٢\int_{-٣}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \text{س}^{٢} - ٣\text{س}\Big|_{-٣}^{٢} = ٨$

$٢\int_{-٣}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - ٢٠ = ٨$

$\int_{-٣}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٤$

$\int_{-٣}^{٢} \left(٤\,\text{ق}(\text{س}) - ٣\text{س}^{٢}\right)\text{دس} = ٤\int_{-٣}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{-٣}^{٢} ٣\text{س}^{٢}\,\text{دس}$

$= ٤ \times ١٤ - \text{س}^{٣}\Big]_{-٣}^{٢}$

$= ٥٦ - ٣٥ = ٢١$

مثال (١٩) كتاب

إذا كان $\int_{١}^{٣} \left(٢\,\text{ق}(\text{س}) + \frac{١}{\text{س}^{٢}} - ٦\right)\text{دس} = ١٢$

جد $\int_{١}^{٣} \left(\frac{\text{ق}(\text{س})}{٢} - \text{س}^{٢}\right)\text{دس}$

الحل $٢\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس + $\int_{١}^{٣}(س^{-٢} - ٦)$ دس = ١٢

$٢\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس + $\left.\frac{س^{-١}}{-١} - ٦س\right|_{١}^{٣}$ = ١٢

$٢\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس − $\left(\frac{١}{س} + ٦س\right|_{١}^{٣}\Big)$ = ١٢

$٢\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس − $\frac{٣٤}{٣}$ = ١٢

$٢\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = $\frac{٧٠}{٣}$

$\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = $\frac{٣٥}{٣}$

$\int_{١}^{٣}\left(\frac{ق(س)}{٢} - س^{٢}\right)$ دس

= $\frac{١}{٢}\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس − $\int_{١}^{٣} س^{٢}$ دس

= $\frac{١}{٢} \times \frac{٣٥}{٣} - \left.\frac{س^{٣}}{٣}\right|_{١}^{٣}$

= $\frac{٣٥}{٦} - \frac{٢٦}{٣}$ = $\frac{٣٥}{٦} - \frac{٥٢}{٦}$ = $\frac{-١٧}{٦}$

مثال (٢٠) ٢٠١٠ ص

إذا كان $\int_{١}^{أ}\sqrt{س}$ دس = ١ ، حيث (أ) ثابت ، أوجد $\int_{١}^{أ}\frac{٢س}{\sqrt{س}}$ دس ، أ > ٠

الحل $\int_{١}^{أ}\frac{٢س}{\sqrt{س}}$ دس = $\int_{١}^{أ}\frac{٢س}{\sqrt{س}} \times \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س}}$ دس

= $\int_{١}^{أ}\frac{٢س\sqrt{س}}{س}$ دس = $٢\int_{١}^{أ}\sqrt{س}$ دس = $\boxed{٢}$

مثال (٢١)

إذا كان أ = $\int_{٠}^{\pi}$ جا²س دس ، ب = $\int_{٠}^{\pi}$ جتا²س دس

أوجد ① أ + ب ② ب − أ

الحل ① أ + ب = $\int_{٠}^{\pi}$ جا²س دس + $\int_{٠}^{\pi}$ جتا²س دس

= $\int_{٠}^{\pi}$ (جا²س + جتا²س) دس = $\int_{٠}^{\pi}$ ١ دس

= π − ٠ = π

② ب − أ = $\int_{٠}^{\pi}$ جتا²س دس − $\int_{٠}^{\pi}$ جا²س دس

ب − أ = $\int_{٠}^{\pi}$ (جتا²س − جا²س) دس

= $\int_{٠}^{\pi}$ جتا٢س دس = $\frac{١}{٢}$ جا٢س $\Big|_{٠}^{\pi}$

= $\frac{١}{٢}$ (٠ − ٠) = صفر

الخاصية الثانية:

خاصية الحدود

① $\int_{أ}^{أ}$ ق(س) دس = صفر

إذا تساوت حدود التكامل فإن قيمة التكامل تساوي صفر

② $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس = $-\int_{ب}^{أ}$ ق(س) دس

إذا عكست حدود التكامل تعكس إشارة قيمة التكامل

مثال (٢١)

أوجد قيمة التكاملات الآتية

① $\int_{٥}^{٥}\sqrt[٣]{س^{٢} - ٥س}$ دس = صفر

② $\int_{\pi}^{\pi}$ جاس قا²س دس = صفر

③ $\int_{-١}^{٣}$ ق(س) دس = −٤ ، جد $\int_{٣}^{-١}$ ق(س) دس

الحل $\int_{٣}^{-١}$ ق(س) دس = $-\int_{-١}^{٣}$ ق(س) دس = ٤

مثال (٢٢) ٢٠١١ ش

$\int_{٠}^{٣}\left(٣س^{٢} - \int_{٢}^{٢} هـ(س) دس\right)$ دس يساوي

أ) ١٦ ب) −١٦ جـ) −٢٧ د) ٢٧

الحل $\int_{٠}^{٣}$ ٣س² − ٠ ، دس = $س^{٣}\Big|_{٠}^{٣}$ = ٢٧

مثال (٢٣)

إذا كان $\int_{-٢أ}^{٣أ+١٠}$ ٢ ق(س) = صفر ، جد قيمة (أ)

الحل الحدود متساوية

−٢أ = ٣أ + ١٠

−٥أ = ١٠ $\boxed{أ = -٢}$

مثال (٢٤)

إذا كان $\int_{٨}^{٤س}$ ق(س) دس = أ س² + ٥ س + ٢

أوجد قيمة (أ) علماً أن $\int_{٨}^{٤س}$ ق(س) دس = صفر

الحل $\int_{٨}^{٤س}$ ق(س) = ٠ ← ٨ = ٤ س ← س = ٢

٤ أ + ١٠ + ٢ = ٠ ، أ = −٣

مثال (٢٥)

إذا كان $\int_{٠}^{٢}$ (ق(س) + ٤) دس = ١٨

أوجد $\int_{٢}^{٠}$ (٥ ق(س) + ٢س) دس

الحل $\int_{٠}^{٢}$ (ق(س) + ٤) دس = $\int_{٠}^{٢}$ ق(س) دس + $\int_{٠}^{٢}$ ٤ دس = ١٨

$\int_{٠}^{٢}$ ق(س) دس + ٨ = ١٨

$\int_{٠}^{٢}$ ق(س) دس = ١٠

$\int_{٢}^{٠}$ (٥ ق(س) + ٢س) دس

= ٥ $\int_{٢}^{٠}$ ق(س) دس + $\int_{٢}^{٠}$ ٢س دس

= ٥ × −١٠ + س² $\Big]_{٢}^{٠}$

= −٥٠ − ٤ = −٥٤

مثال (٢٦) كتاب

إذا كان $\int_{١}^{٣}$ (٤ ق(س) + ٧ هـ(س)) دس = ١٩

$\int_{١}^{٣}$ ٣ ق(س) دس = ٩ ، جد $\int_{٣}^{١}$ ٥ هـ(س) دس

الحل ٣ $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = ٩

$\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = ٣

٤ $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس + ٧ $\int_{١}^{٣}$ هـ(س) دس = ١٩

١٢ + ٧ $\int_{١}^{٣}$ هـ(س) دس = ١٩

٧ $\int_{١}^{٣}$ هـ(س) دس = ٧ ← $\int_{١}^{٣}$ هـ(س) دس = ١

$\int_{٣}^{١}$ ٥ هـ(س) دس = −٥ $\int_{١}^{٣}$ هـ(س) دس

= −٥ × ١ = −٥

مثال (٢٧)

إذا كان $\int$ ق(س) دس = ٦ ، $\int_{١}^{٣}$ ٢ هـ(س) دس = ١٠

أوجد $\int_{٣}^{١}$ (هـ(س) − ٢ ق(س) + ٢س − ٤) دس

الحل ٢ $\int_{١}^{٣}$ هـ(س) دس = ١٠ ← $\int_{١}^{٣}$ هـ(س) دس = ٥

المطلوب

$\int_{٣}^{١}$ هـ(س) دس − ٢ $\int_{٣}^{١}$ ق(س) دس + $\int_{٣}^{١}$ (٢س − ٤) دس

= −٥ − ٢ × −٦ + س² − ٤س $\Big]_{٣}^{١}$

= −٥ + ١٢ + (١ − ٤) − (٩ − ١٢) = ٧

مثال (٢٨) ٢٠٠٧ ش + كتاب

إذا كان أ = $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}}$ قتا²س دس ، ب = $\int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}}$ ظتا²س دس

أوجد أ + ب

الحل أ + ب = $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}}$ قتا²س + $\int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}}$ ظتا²س

= $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}}$ قتا²س دس − $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}}$ ظتا²س دس

= $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}}$ (قتا²س − ظتا²س) دس

= $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}}$ دس

= $\frac{٣\pi}{٤} - \frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{٢}$

مثال (٢٨) كتاب + ٢٠١٥ ص

إذا كان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) ، وكان $\int_{-١}^{٣}$ (م(س) − هـ(س)) دس = (١٢) ، جد $\int^{٤}$ ٢س م(س) دس + $\int_{٤}^{-١}$ ٢س هـ(س) دس

الحل م(س) − هـ(س) = جـ ثابت التكامل

$\int_{-١}^{٣}$ (م(س) − هـ(س)) دس = $\int_{-١}^{٣}$ جـ دس = ١٢

٤ جـ = ١٢ ← $\boxed{\text{جـ} = ٣}$

$\int_{٠}^{٤}$ ٢س م(س) دس − $\int_{٠}^{٤}$ ٢س هـ(س) دس

$= \int_{2}^{4} (3\text{س}\,\text{م}(\text{س}) - 3\text{س}\,\text{هـ}(\text{س}))\,\text{دس}$

$= \int_{2}^{4} 3\text{س}\,(\text{م}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}))\,\text{دس}$

$= \int_{2}^{4} 3 \cdot 2\text{س}\,\text{دس} = \int_{2}^{4} 6\text{س}\,\text{دس}$

$= 3\text{س}^2 \Big|_{2}^{4} = 192$

الخاصية الثالثة :

خاصية الإضافة

إذا كان م قابل للتكامل على فترة تنتمي إليها الأعداد أ، ب، جـ فإن

$\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{م}(\text{س})\,\text{دس}$

*ليس شرط أن تقع ب في المنتصف لكن شرط أن تقع في الفترة (أ ، جـ)

* نستخدم هذه الخاصية لإيجاد تكاملات الاقتران المتشعب واقترانات القيمة المطلقة واقترانات أكبر عدد صحيح

مثال (٢٩)

إذا كان $\int_{1}^{2} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} = 5$ ، $\int_{1}^{3} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} = 4$

أوجد $\int_{2}^{3} \text{م}(\text{س})\,\text{دس}$

الحل

$\int_{2}^{3} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{1}^{3} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{1}^{2} \text{م}(\text{س})\,\text{دس}$

$= 4 - 5 = -1$

مثال (٣٠) كتاب + ٢٠١٥ ش

إذا كان $\int_{9}^{2} (2\,\text{م}(\text{س}) + 3)\,\text{دس} = -17$ ، $\int_{2}^{5} \frac{\text{م}(\text{س})}{3}\,\text{دس} = -3$ ، جد $\int_{5}^{9} (4\,\text{م}(\text{س}) - 1)\,\text{دس}$

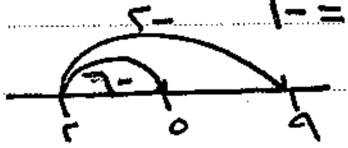
الحل $\int_{2}^{9} (2\,\text{م}(\text{س}) + 3)\,\text{دس} = 17$

$2\int_{2}^{9} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{2}^{9} 3\,\text{دس} = 17$

$2\int_{2}^{9} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} + 21 = 17 \leftarrow \int_{2}^{9} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} = -2$

$\int_{2}^{5} \frac{\text{م}(\text{س})}{3}\,\text{دس} = -3 \leftarrow \frac{1}{3}\int_{2}^{5} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} = -2$

$\int_{2}^{5} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} = -6$



$\int_{5}^{9} (4\,\text{م}(\text{س}) - 1)\,\text{دس} = 4\int_{5}^{9} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{5}^{9} 1\,\text{دس}$

$4(-2+6) - (9-5) = 16 - 4 = 12$

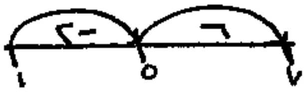
مثال (٣٠) ٢٠١٢ ص

إذا كان $\int_{5}^{1} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} = 2$ ، $\int_{7}^{5} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} = -6$

فإن $\int_{1}^{7} \frac{\text{م}(\text{س})}{2}\,\text{دس}$ يساوي

أ) -3 ب) 3 جـ) 4 د) -4

الحل



$\int_{1}^{7} \frac{\text{م}(\text{س})}{2}\,\text{دس} = \frac{1}{2}\int_{1}^{7} \text{م}(\text{س})\,\text{دس}$

$= \frac{1}{2}(-2+6) = 2$

مثال (٣١) ٢٠١١ ص

إذا كان $\int_{1}^{3} (2\,\text{م}(\text{س}) - 4)\,\text{دس} = 6$

وكان $\int_{4}^{3} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} = -1$ ، أوجد $\int_{1}^{4} (\text{م}(\text{س}) - 2\text{س})\,\text{دس}$

الحل $\int_{1}^{3} (2\,\text{م}(\text{س}) - 4)\,\text{دس} = 2\int_{1}^{3} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{1}^{3} 4\,\text{دس}$

$2\int_{1}^{3} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} - 8 = 6 \leftarrow \int_{1}^{3} \text{م}(\text{س})\,\text{دس} = 7$

$\int_{١}^{٤} (ق(س) - ٢س)\, دس = \int_{١}^{٤} ق(س)\, دس - \int_{١}^{٤} ٢س\, دس$

$= \int_{١}^{٣} ق(س)\, دس + \int_{٣}^{٤} ق(س)\, دس - س^{٢} \Big|_{١}^{٤}$

$= ٧ + ١ - (١٦ - ١) = -٧$

مثال (٣٢) ٢٠٠١

إذا كان ق(س) اقتران متصل على ح

وكان $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس - \int_{٥}^{٣} ق(س)\, دس = \int_{٣}^{١} ق(س)\, دس$

أوجد قيمة كل من أ ، ب على الترتيب

الحل $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = \int_{٣}^{١} ق(س)\, دس + \int_{٥}^{٣} ق(س)\, دس$

$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = -\left(\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس + \int_{٣}^{٥} ق(س)\, دس\right)$

$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = -\int_{١}^{٥} ق(س)\, دس$

$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = \int_{٥}^{١} ق(س)\, دس$

أ = ٥ ، ب = ١

مثال (٣٣)

$$ق(س) = \begin{cases} -س & ، س \leqslant ٠ \\ ٣س^{٢} + ١ & ، س > ٠ \end{cases}$$

أوجد $\int_{-٢}^{٣} ق(س)\, دس$

الحل $\int_{-٢}^{٣} ق(س)\, دس = \int_{-٢}^{٠} ق(س)\, دس + \int_{٠}^{٣} ق(س)\, دس$

$= \int_{-٢}^{٠} -س\, دس + \int_{٠}^{٣} (٣س^{٢} + ١)\, دس$

$= \frac{-س^{٢}}{٢} \Big|_{-٢}^{٠} + س^{٣} + س \Big|_{٠}^{٣}$

$= (٠ - -٢) + (٢٧ + ٣) - ٠ = ٣٢$

مثال (٣٤)

$$ق(س) = \begin{cases} ٦ - ٤س & ، ٠ \leqslant س < ٣ \\ ٣س^{٢} & ، ٣ \leqslant س \leq ٥ \end{cases}$$

أوجد ما يلي

① $\int_{٠}^{٤} ق(س)\, دس$ ② $\int_{٣}^{٥} ق(س)\, دس$

③ $\int_{٠}^{٥} ق(س)\, دس$ ④ $\int_{٢}^{٥} ق(س)\, دس$

الحل ① $\int_{٠}^{٤} ق(س)\, دس = \int_{٠}^{٣} ق(س)\, دس + \int_{٣}^{٤} ق(س)\, دس$

$= \int_{٠}^{٣} (٦ - ٤س)\, دس + \int_{٣}^{٤} ٣س^{٢}\, دس$

$= ٦س - ٢س^{٢} \Big|_{٠}^{٣} + س^{٣} \Big|_{٣}^{٤}$

$= ٠ + ٣٧ = ٣٧$

② $\int_{٣}^{٥} ق(س)\, دس = \int_{٣}^{٥} ٣س^{٢}\, دس = س^{٣} \Big|_{٣}^{٥} = ٩٨$

③ $\int_{٠}^{٥} ق(س)\, دس = \int_{٠}^{٣} (٦ - ٤س)\, دس + \int_{٣}^{٥} ٣س^{٢}\, دس$

$= ٦س - ٢س^{٢} \Big|_{٠}^{٣} + س^{٣} \Big|_{٣}^{٥} = ٩٨$

④ $\int_{٢}^{٥} ق(س)\, دس = \int_{٢}^{٣} ق(س)\, دس + \int_{٣}^{٥} ق(س)\, دس$

$= \int_{٢}^{٣} (٦ - ٤س)\, دس + \int_{٣}^{٥} ٣س^{٢}\, دس$

$= ٦س - ٢س^{٢} \Big|_{٢}^{٣} + س^{٣} \Big|_{٣}^{٥}$

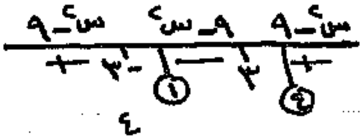
$= ٠ - (١٢ - ٨) + ٩٨ = ٩٤$

مثال (٣٥)

أوجد قيمة التكاملات الآتية

① $\int_{١}^{٤} |س^{٢} - ٩|\, دس$

الحل س² − ٩ = ٠ ، س = ±٣



$\int_{١}^{٤} |س^{٢} - ٩|\, دس = \int_{١}^{٣} (٩ - س^{٢})\, دس + \int_{٣}^{٤} (س^{٢} - ٩)\, دس$

$= ٩س - \frac{س^{٣}}{٣} \Big|_{١}^{٣} + \frac{س^{٣}}{٣} - ٩س \Big|_{٣}^{٤}$

$= (٢٧ - ٩) - (٩ - \frac{١}{٣}) + (\frac{٦٤}{٣} - ٣٦) - (٩ - ٢٧)$

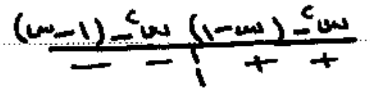
$= \frac{٣٨}{٣}$

---

② كتاب + ٢٠١٤ ش

$\int_{٠}^{٣} س^{٢} - |س - ١|\, دس$

الحل $س - ١ = ٠ \longrightarrow س = ١$



$$= \int_{٠}^{١} (س^٢ + س - ١)\, دس + \int_{١}^{٣} (س^٢ - س + ١)\, دس$$

$$= \frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} - س \Big|_{٠}^{١} + \frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢} + س \Big|_{١}^{٣}$$

$$= \left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ١\right) - ٠ + \left(\frac{٢٧}{٣} - \frac{٩}{٢} + ٣\right) - \left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + ١\right)$$

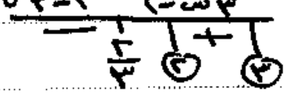
$$= \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ١ + \frac{٢٧}{٣} - \frac{٩}{٢} + ٣ - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ١$$

$$= ١ - ٢ + ٣ + ٣ - \frac{٩}{٢} = \frac{١}{٢}$$

③ $\int_{٢}^{٣} \sqrt{٩س^٢ - ١٢س + ٤}\, دس$ كتاب

الحل $= \int_{٢}^{٣} \sqrt{(٣س - ٢)^٢}\, دس = \int_{٢}^{٣} |٣س - ٢|\, دس$

$٣س - ٢ = ٠ \longrightarrow س = \frac{٢}{٣}$



$$\int_{٢}^{٣} |٣س - ٢|\, دس = \int_{٢}^{٣} (٣س - ٢)\, دس$$

$$= \frac{٣س^٢}{٢} - ٢س \Big|_{٢}^{٣}$$

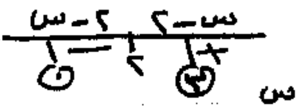
$$= \left(\frac{٢٧}{٢} - ٦\right) - \left(\frac{١٢}{٢} - ٤\right)$$

$$= \frac{٢٧}{٢} - ٨ = \frac{٢٧}{٢} - \frac{١٦}{٢} = \frac{١١}{٢}$$

④ $\int_{٠}^{٣} \sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}\, دس$ كتاب

الحل $= \int_{٠}^{٣} \sqrt{(س - ٢)^٢}\, دس = \int_{٠}^{٣} |س - ٢|\, دس$

$س - ٢ = ٠ \longrightarrow س = ٢$

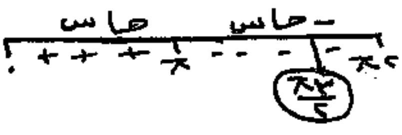


$$= \int_{٠}^{٢} (٢ - س)\, دس + \int_{٢}^{٣} (س - ٢)\, دس$$

$$= ٢س - \frac{س^٢}{٢} \Big|_{٠}^{٢} + \frac{س^٢}{٢} - ٢س \Big|_{٢}^{٣} = \frac{٥}{٢}$$

⑤ $\int_{\pi}^{\frac{٣\pi}{٢}} |جاس|\, دس$ ٢٠٠١

الحل $جاس = ٠ \longrightarrow س = ٠ ، \pi ، ٢\pi$



$$= \int_{\pi}^{\frac{٣\pi}{٢}} -جاس\, دس = جتاس \Big|_{\pi}^{\frac{٣\pi}{٢}} = \boxed{١}$$

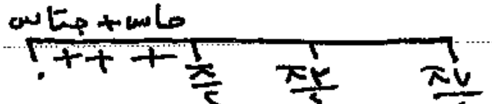
⑥ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{١ + جا٢س}}{جاس + جتاس}\, دس$ كتاب

الحل $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{جا^٢س + ٢جاس\, جتاس + جتا^٢س}}{جاس + جتاس}\, دس$

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{(جاس + جتاس)^٢}}{جاس + جتاس}\, دس$$

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{|جاس + جتاس|}{جاس + جتاس}\, دس$$

$جاس + جتاس = ٠ \longrightarrow س = \frac{٣\pi}{٤} ، \frac{٧\pi}{٤}$



$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جاس + جتاس}{جاس + جتاس}\, دس = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} دس = \frac{\pi}{٢}$$

مثال (٣٦): أوجد قيمة التكاملات الآتية

① $\int_{-١}^{٣} \left[\frac{س}{٢} - ١\right] دس$

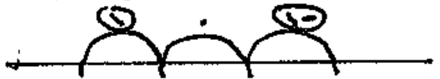
الحل $\frac{س}{٢} - ١ = ٠ \longrightarrow س = ٢ ، ل = ٢$

$$\int_{-١}^{٣} \left[\frac{س}{٢} - ١\right] دس = \int_{-١}^{٠} -٢\, دس + \int_{٠}^{٢} -\, دس + \int_{٢}^{٣} ٠\, دس$$

$$= -٢(٠ + ١) + -١(٢ - ٠) + ٠(٣ - ٢) = \boxed{-٤}$$

② $\int_{٠}^{٣} [٢ - س]\, دس$

الحل $٢ - س = ٠ \longrightarrow س = ٢ ، ل = ١$



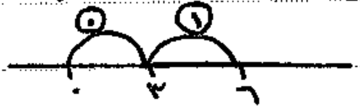
$$\int_{٠}^{٣} [٢ - س]\, دس = \int_{٠}^{١} ١\, دس + \int_{١}^{٢} ٠\, دس + \int_{٢}^{٣} -١\, دس$$

$$= ١(١ - ٠) + ٠ - ١(٣ - ٢) = صفر$$

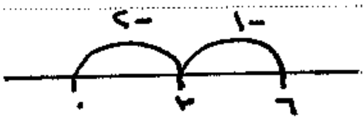
③ $\int_{٢}^{٦} \left([\tfrac{١}{٣}\text{س}] - ٢ \right) \text{ءس}$ ٢٠١٧ ص

الحل $\tfrac{١}{٣}\text{س} = ٠ \leftarrow \text{س} = ٠$ ، $\text{ل} = ٣$

$[\tfrac{١}{٣}\text{س}]$



$[\tfrac{١}{٣}\text{س}] - ٢$



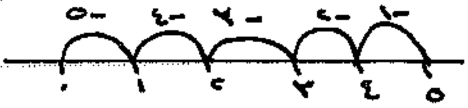
$$\int_{٢}^{٦} \left([\tfrac{١}{٣}\text{س}] - ٢ \right) \text{ءس} = \int_{٢}^{٣} -٢ \,\text{ءس} + \int_{٣}^{٦} -١ \,\text{ءس}$$
$$= -٢(٣-٢) - ١(٦-٣) = -٢ - ٣ = -٥$$

④ ٢٠١٧ ش
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} [\text{س} - ٥]\,|\text{س} - ١| & ، ٠ \le \text{س} < ٢ \\ \dfrac{٣}{\sqrt{\text{س}+١}} & ، ٢ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

جد $\int_{٠}^{٤} \text{ق(س)} \,\text{ءس}$

الحل

$[\text{س} - ٥]$ $\text{س} = ٥$ ، $\text{ل} = ١$



$|\text{س} - ١|$ $\text{س} - ١ = ٠ \leftarrow \text{س} = ١$

١ − س   س − ١
− − − | + +
١

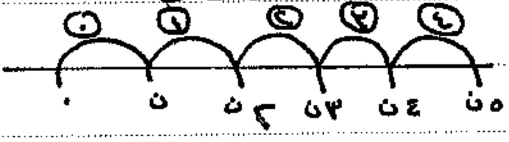
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} -٥(١-\text{س}) & ، ٠ \le \text{س} < ١ \\ -٤(\text{س}-١) & ، ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٣(\text{س}+١)^{-\frac{١}{٢}} & ، ٢ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

$$\int_{٠}^{٤} \text{ق(س)} \,\text{ءس} = \int_{٠}^{١} -٥(١-\text{س}) \,\text{ءس} + \int_{١}^{٢} -٤(\text{س}-١) \,\text{ءس}$$
$$+ \int_{٢}^{٤} ٣(\text{س}+١)^{-\frac{١}{٢}} \,\text{ءس}$$
$$= -٥\left(\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢}\right)\Big|_{٠}^{١} + -٤\left(\frac{\text{س}^٢}{٢} - \text{س}\right)\Big|_{١}^{٢}$$
$$+ ٦(\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}}\Big|_{٢}^{٤}$$
$$= \frac{-٥}{٢} - ٢ + ٦\left(\sqrt{٥} - \sqrt{٣}\right)$$

---

⑤ $\int_{٠}^{٥\text{ن}} [\tfrac{\text{س}}{\text{ن}}] \,\text{ءس}$ ، $\text{ن} \ne ٠$ ٢٠٠١

الحل $\tfrac{\text{س}}{\text{ن}} = ٠ \leftarrow \text{س} = ٠$ ، $\text{ل} = \text{ن}$

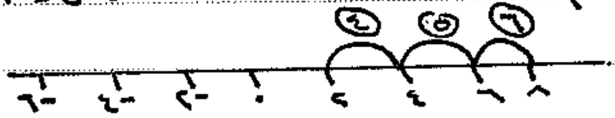


$$\int_{٠}^{٥\text{ن}} [\tfrac{\text{س}}{\text{ن}}] \,\text{ءس} =$$
$$\int_{٠}^{\text{ن}} ٠ \,\text{ءس} + \int_{\text{ن}}^{٢\text{ن}} ١ \,\text{ءس} + \int_{٢\text{ن}}^{٣\text{ن}} ٢ \,\text{ءس} + \int_{٣\text{ن}}^{٤\text{ن}} ٣ \,\text{ءس} + \int_{٤\text{ن}}^{٥\text{ن}} ٤ \,\text{ءس}$$
$$= ٠ + \text{ن} + ٢\text{ن} + ٣\text{ن} + ٤\text{ن} = ١٠\text{ن}$$

مثال (٣٧) ٢٠١٤ ص

إذا كان $\int_{٢}^{\text{ب}} [\tfrac{١}{٢}\text{س} + ٣] \,\text{ءس} = ٢٤$ ، $\text{ب} > ٢$ ،
جد قيمة (ب)

الحل $\tfrac{١}{٢}\text{س} + ٣ = ٠ \leftarrow \text{س} = -٦$ ، $\text{ل} = ٢$



$$\int_{٢}^{\text{ب}} [\tfrac{١}{٢}\text{س} + ٣] \,\text{ءس} = ٢٤$$
$$\int_{٢}^{٤} ٤ \,\text{ءس} + \int_{٤}^{٦} ٥ \,\text{ءس} + \int_{٦}^{\text{ب}} ٦ \,\text{ءس} = ٢$$
$$٨ + ١٠ + ٦(\text{ب} - ٦) = ٢٤$$
$$٦(\text{ب} - ٦) = ٦ \leftarrow \text{ب} - ٦ = ١ \quad \boxed{\text{ب} = ٧}$$

مثال (٣٨)

إذا كان $\int_{١}^{\text{أ}} [\tfrac{١}{٣}\text{س} + ١] \,\text{ءس} = ١١$ ، أوجد
قيمة الثابت أ ، أ ∈ ص

الحل يوجد حالتين أ > ١ ، أ < ١

$\tfrac{١}{٣}\text{س} + ١ = ٠ \leftarrow \text{س} = -٣$ ، $\text{ل} = ٣$

حالة (١) أ > ١

$\int_{١}^{أ} [\frac{١}{٣}س + ١] دس = \int_{١}^{٢} ١ دس + \int_{٣}^{٦} ٢ دس + \int_{٦}^{أ} ٣ دس$

$٢ + ٦ + ٣(أ - ٦) = ١١ \rightarrow أ = ٧$

حالة (٢) $أ < ١$

$\int_{١}^{أ} [\frac{١}{٣}س + ١] دس = - \int_{أ}^{١} [\frac{١}{٣}س + ١] دس$

$\int_{أ}^{١} [\frac{١}{٣}س + ١] دس = -١١$

$\int_{٠}^{١} ١ دس + \int_{-٣}^{٠} ٠ دس + \int_{-٦}^{-٣} -١ دس + \int_{-٩}^{-٦} -٢ دس + \int_{أ}^{-٩} -٣ دس$

$١ + ٠ - ٣ - ٦ - ٣(-٩ - أ) = -١١$

$-٩ - أ = ١ \qquad \boxed{أ = -١٠}$

حل آخر

$\int_{١}^{أ} [\frac{١}{٣}س + ١] = ١١$

$\int_{١}^{٠} ١ دس + \int_{٠}^{-٣} ٠ دس + \int_{-٣}^{-٦} -١ دس + \int_{-٦}^{-٩} -٢ دس + \int_{-٩}^{أ} -٣ دس$

$-١ + ٠ + ٣ - ٦ - ٣(أ + ٩) = ١١$

$-٣(أ + ٩) = ٣ \rightarrow \boxed{أ = -١٠}$

الخاصية الرابعة :
خاصية المقارنة

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانان قابلان للتكامل على [أ ، ب]

① إذا كان ق(س) $\geq$ صفر لكل س $\in$ [أ ، ب]
فإن $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس $\geq$ صفر (موجب)

② إذا كان ق(س) $\leq$ صفر لكل س $\in$ [أ ، ب]
فإن $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس $\leq$ صفر (سالب)

من ① منحنى ق(س) في [أ ، ب] فوق محور (س)
من ② منحنى ق(س) في [أ ، ب] تحت محور (س)

③ إذا كان ق(س) $\geq$ هـ(س)
لكل س $\in$ [أ ، ب]
فإن $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس $\geq \int_{أ}^{ب}$ هـ(س) دس
منحنى ق(س) فوق هـ(س) في [أ ، ب]

④ ل $\leq$ ق(س) $\leq$ ك لكل س $\in$ [أ ، ب]
فإن $\int_{أ}^{ب}$ ل دس $\leq \int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس $\leq \int_{أ}^{ب}$ ك دس

مثال (٣٩)

دون حساب قيمة التكامل، ما إشارة التكاملات الآتية

① $\int_{١}^{٢}$ س^{٣} دس

الحل ق(س) = س^{٣} ، س $\in$ [١ ، ٢]

ندرس إشارة ق(س) على الفترة [١ ، ٢]

س^{٣} = ٠ ← س = ٠ $\qquad - - - \underset{٠}{|} + +$

ق(س) > ٠ عندما س $\in$ [١ ، ٢]

$\int_{١}^{٢}$ ق(س) دس > ٠ موجب

② $\int_{٥}^{٢}$ (٧س − س^{٢}) دس

الحل = $\int_{٢}^{٥}$ (س^{٢} − ٧س) دس

ق(س) = س^{٢} − ٧س ، س $\in$ [٢ ، ٥]

ندرس إشارة ق(س) = س^{٢} − ٧س على [٢ ، ٥]

س^{٢} − ٧س = ٠ ← س(س − ٧) = ٠

س = ٠ ، س = ٧ $\qquad + + \underset{٠}{|} \; \underset{②}{|} - - \underset{⑤}{|} \; \underset{٧}{|} + +$

$\int_{٢}^{٥}$ (س^{٢} − ٧س) دس < ٠ سالب

حسب خاصية المقارنة

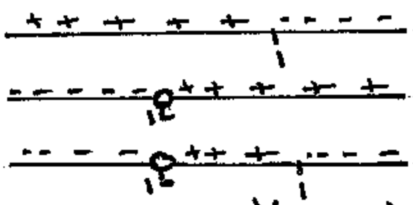
③ $\int_{٢}^{٥} \frac{١ - س}{١ + س}$ دس

الحل ق(س) = $\frac{١ - س}{١ + س}$ ، س $\in$ [٢ ، ٥]

ندرس إشارة ق(س) في الفترة [٢ ، ٥]

١ - س = ٠
س = ١

س + ١ = ٠
س = -١



$\int_{2}^{5}\frac{1-\text{س}}{\text{س}+1}\,\text{ءس} < 0$ سالب

④ بيّن أن $\int_{0}^{2\pi}(1+\text{جاس})\,\text{ءس} \geq 0$ (كتاب)

الحل ندرس إشارة ق(س) = ١+جاس في [٠ ، ٢π]

$-1 \leq \text{جاس} \leq 1$

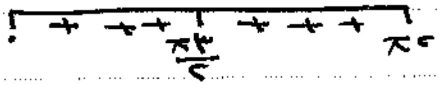
$0 \leq 1+\text{جاس} \leq 2$

ق(س) = ١ + جاس ≥ ٠ س ∈ [٠ ، ٢π]

$\int_{0}^{2\pi} 1+\text{جاس}\,\text{ءس} \geq 0$ موجب

حل ٢

١ + جاس = ٠ ← جاس = -١ ← س = $\frac{3\pi}{2}$



ق(س) ≥ ٠ ، س ∈ [٠ ، ٢π]

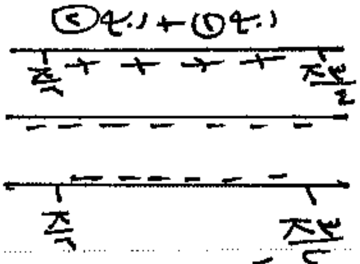
$\int_{0}^{2\pi}(1+\text{جاس})\,\text{ءس} \geq 0$

⑤ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\text{جاس}}{-\text{س}^2-4}\,\text{ءس}$

الحل ندرس إشارة ق(س) = $\frac{\text{جاس}}{-\text{س}^2-4}$ في $[\frac{\pi}{2} ، \frac{3\pi}{4}]$

جاس

$-\text{س}^2-4$



ق(س) < ٠ ، س ∈ $[\frac{\pi}{2} ، \frac{3\pi}{2}]$

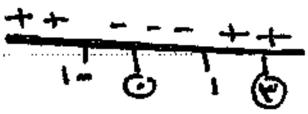
$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{جاس}}{-\text{س}^2-4}\,\text{ءس} < 0$ سالب

⑥ $\int_{0}^{3}(\text{س}^2-1)\,\text{ءس}$

الحل ق(س) = س² - ١ ، س ∈ [٠ ، ٣]

ندرس إشارة ق(س)

س² - ١ = ٠ ← س = ±١



ق(س) ≤ ٠ س ∈ [٠ ، ١]

ق(س) ≥ ٠ س ∈ [١ ، ٣]

$\int_{0}^{1}(\text{س}^2-1)\,\text{ءس} \leq 0$ ، $\int_{1}^{3}(\text{س}^2-1)\,\text{ءس} \geq 0$

مثال (٤٠)

دون حساب قيمة التكامل بيّن أن

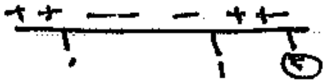
$\int_{1}^{2}\text{س}^3\,\text{ءس} \geq \int_{1}^{2}\text{س}^2\,\text{ءس}$

الحل ق(س) = س³ ، هـ(س) = س²

ل(س) = ق(س) - هـ(س) = س³ - س²

ندرس إشارة ل(س) = س³ - س² في [١ ، ٢]

س³ - س² = ٠ ← س²(س - ١) = ٠ ، س = ٠ ، س = ١



ل(س) ≥ ٠ ، س ∈ [١ ، ٢]

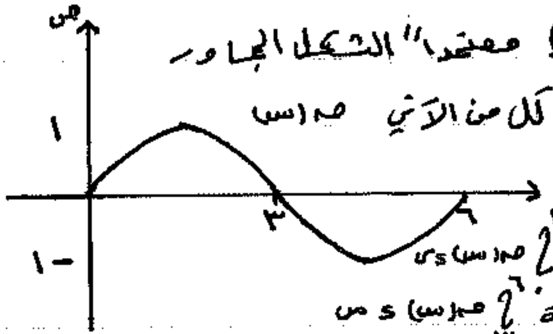
$\int_{1}^{2}(\text{س}^3-\text{س}^2)\,\text{ءس} \geq 0$

$\int_{1}^{2}\text{س}^3\,\text{ءس} - \int_{1}^{2}\text{س}^2\,\text{ءس} \geq 0$

$\int_{1}^{2}\text{س}^3\,\text{ءس} \geq \int_{1}^{2}\text{س}^2\,\text{ءس}$

مثال (٤١) كتاب معتمداً الشكل المجاور

أجب عن كل من الآتي ق(س)



① إشارة $\int_{0}^{3}\text{ق(س)}\,\text{ءس}$

② إشارة $\int_{3}^{6}\text{ق(س)}\,\text{ءس}$

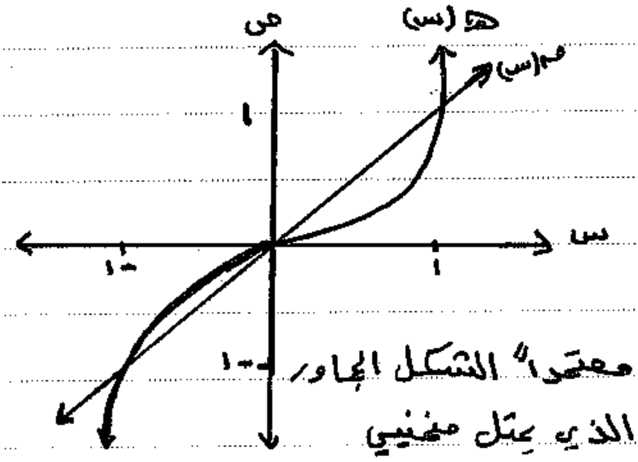
الحل ① $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) ءس ≥ ٠ موجب

السبب في ذلك منحنى ق(س) عندما س ∈ [٠، ٣] فوق محور السينات أي أن ق(س) ≥ ٠

② $\int_{٣}^{٦}$ ق(س) ءس ≤ ٠ سالب

السبب في ذلك منحنى ق(س) عندما س ∈ [٣، ٦] تحت محور السينات ق(س) ≤ ٠

مثال (٤٢) (كتاب)



معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنيي الإقترانين ق، هـ قارن بين قيمتي التكامل في كل مما يأتي مبرراً إجابتك

① $\int_{٠}^{١}$ ق(س) ءس ، $\int_{٠}^{١}$ هـ(س) ءس

② $\int_{-١}^{٠}$ ق(س) ءس ، $\int_{-١}^{٠}$ هـ(س) ءس

الحل ① $\int_{٠}^{١}$ ق(س) ءس ≥ $\int_{٠}^{١}$ هـ(س) ءس

منحنى ق(س) فوق منحنى هـ(س)

ق(س) ≥ هـ(س) ، س ∈ [٠، ١]

② $\int_{-١}^{٠}$ هـ(س) ءس ≥ $\int_{-١}^{٠}$ ق(س) ءس

منحنى هـ(س) فوق منحنى ق(س) ، س ∈ [-١، ٠]

هـ(س) ≥ ق(س) ، س ∈ [-١، ٠]

ملاحظة

لإيجاد أكبر قيمة و أصغر قيمة لقيمة التكامل لا بد من معرفة القيم العظمى و الصغرى المطلقة للإقتران الموجود داخل التكامل

مثال (٤٣) ٢٠١٢ ص

إذا كان ق(س) ≤ ٤ لجميع قيم (س) في الفترة [١، ٣]، فإن أكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣}$ (٢ ق(س) +١) ءس هي

أ) ١٤ ب) ٧ جـ) ٩ د) ١٨

الحل ق(س) ≤ ٦

$\int_{١}^{٣}$ (٢ ق(س) +١) ءس ≤ $\int_{١}^{٣}$ (٢(٤)+١) ءس

$\int_{١}^{٣}$ (٢ ق(س) +١) ءس ≤ $\int_{١}^{٣}$ ٩ ءس

$\int_{١}^{٣}$ (٢ ق(س) +١) ءس ≤ ١٨

أكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣}$ (٢ق(س)+١) ءس = ١٨

مثال (٤٤)

إذا كان ق(س) قابل للتكامل على الفترة [-١، ٣] وكان ق(س) ≥ ٢، فإن أصغر قيمة للمقدار $\int_{-١}^{٣}$ (٤ ق(س) -٢) ءس تساوي

أ) -٢٤ ب) ٢٤ جـ) ١٢ د) -١٢

الحل ق(س) ≥ ٢

$\int_{-١}^{٣}$ (٤ ق(س) -٢) ءس ≥ $\int_{-١}^{٣}$ (٤(٢) -٢) ءس

$\int_{-١}^{٣}$ (٤ ق(س) -٢) ءس ≥ $\int_{-١}^{٣}$ ٦ ءس

$\int_{-١}^{٣}$ (٤ق(س) -٢) ءس ≥ ٢٤

أقل قيمة للمقدار $\int_{-١}^{٣}$ (٤ ق(س) -٢) ءس = ٢٤

مثال (٤٥)

إذا كان $٢ \le \text{ق}(س) \le ٥$ لكل $س \in [١ ، ٤]$

أوجد قيم م ، ن بحيث أن

$$م \le \int_{١}^{٤} (٣ + ٢\text{ق}(س))\, ء س \le ن$$

الحل م : أقل قيمة للمقدار

ن : أكبر قيمة للمقدار

$$٢ \le \text{ق}(س) \le ٥$$

$$\int_{١}^{٤} ٧\, ء س \le \int_{١}^{٤} (٣ + ٢\text{ق}(س))\, ء س \le \int_{١}^{٤} ١٣\, ء س$$

$$٢١ \le \int_{١}^{٤} (٣ + ٢\text{ق}(س))\, ء س \le ٣٩$$

$م = ٢١$ ، $ن = ٣٩$

ملاحظة

في حال عدم توفر أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران في السؤال ، يجب أولاً إيجادها عن طريق الوحده الثالثه أو عن طريق خواص الاقتران ثم نكمل الحل

مثال (٤٦) ٢٠١١ ش

أوجد أقل قيمة للمقدار $\int_{-٤}^{-١} (س^٢ + ١)\, د س$

ط١ الحل نجد أكبر قيمة وأقل قيمة للاقتران

$\text{ق}(س) = س^٢ + ١$ ، $س \in [-٤ ، -١]$

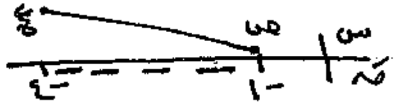
القيم الحرجة $\rightarrow$ طرفية : -٤ ، -١

$\downarrow$

$\text{ق}' = ٠$

$\text{ق}'(س) = ٢س$

$\text{ق}'(س) = ٠ \rightarrow ٢س = ٠ \rightarrow \boxed{س = ٠}$ تهمل



أقل قيمة للاقتران $\text{ق}(س)$ هي $\text{ق}(-١) = ٢$

$$\text{ق}(س) \ge ٢$$

$$\int_{-٤}^{-١} (س^٢ + ١)\, ء س \ge \int_{-٤}^{-١} ٢\, د س$$

$$\int_{-٤}^{-١} (س^٢ + ١)\, ء س \ge ٦$$

ط٢

$\text{ق}(س) = س^٢ + ١$ ، $س \in [-٤ ، -١]$

$$-٤ \le س \le -١$$

$$١ \le س^٢ \le ١٦$$

$$٢ \le س^٢ + ١ \le ١٧$$

$$\int_{-٤}^{-١} (س^٢ + ١)\, ء س \ge \int_{-٤}^{-١} ٢\, ء س$$

$$\int_{-٤}^{-١} (س^٢ + ١)\, ء س \ge ٦$$

ط٣ يمكن الحل مستخدماً" الرسم

مثال (٤٧) كتاب

إذا علمت أن $م \le \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^٢}\, ء س \le ن$

جد أكبر قيمة ممكنة للثابت م ، ن

وأصغر قيمة ممكنة له تحقق المتباينة

دون حساب قيمة $\int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^٢}\, ء س$

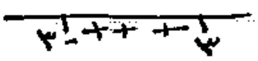
الحل ط١ $\text{ق}(س) = \sqrt{٩ - س^٢}$ ، $س \in [-٣ ، ٣]$

نجد أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران

القيم الحرجة $\rightarrow$ طرفية : $س = ٣$ ، -٣

$\downarrow$

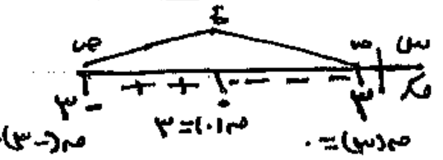
$\text{ق}' = ٠$



المجال $س \in [-٣ ، ٣]$

$$\text{ق}'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٩ - س^٢}} = \frac{-س}{\sqrt{٩ - س^٢}}$$

$\text{ق}'(س) = ٠ \rightarrow -س = ٠ \rightarrow \boxed{س = ٠}$



$٠ \leq ص(س) \leq ٣$

$٠ \leq \sqrt{٩ - س^{٢}} \leq ٣$

$\int_{-٣}^{٣} ٠ \, د س \leq \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^{٢}} \, د س \leq \int_{-٣}^{٣} ٣ \, د س$

$٠ \leq \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^{٢}} \leq ٢٧$

م = ٠ ، ن = ٢٧

ملاحظة٢ يمكن الحل باستخدام الرسم

مثال (٤٨) ٢٠١٦ ص

إذا علمت أن $م \leq \int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤} + ٩} \, د س \leq ك$

جد قيمة كل من الثابتين م ، ك

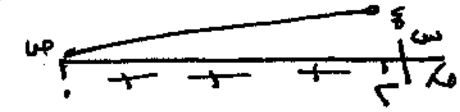
دون حساب قيمة تكامل المقدار $\int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤}+٩} \, د س$

الحل ملاحظة١ $ص(س) = \sqrt{س^{٤} + ٩}$ ، س ∈ [٠ ، ٢]

القيم الحرجة ← ص َ غ م
س = ٠ ، ٢
ص َ = ٠

$صَ(س) = \frac{٤ س^{٣}}{٢ \sqrt{س^{٤} + ٩}} = \frac{٢ س^{٣}}{\sqrt{س^{٤}+٩}}$

صَ(س) = ٠ ← $٢ س^{٣} = ٠$ ، س = ٠ ، صَ غ م



ص(١) = ٣ ص(٢) = ٥

$٣ \leq \sqrt{س^{٤} + ٩} \leq ٥$

$\int_{٠}^{٢} ٣ \, د س \leq \int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤}+٩} \, د س \leq \int_{٠}^{٢} ٥ \, د س$

$٦ \leq \int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤}+٩} \, د س \leq ١٠$

م = ٦ ، ك = ١٠

ملاحظة٢ س ∈ [٠ ، ٢]

$٠ \leq س \leq ٢$

$٠ \leq س^{٤} \leq ١٦$

$٩ \leq س^{٤} + ٩ \leq ٢٥$

$٣ \leq \sqrt{س^{٤}+٩} \leq ٥$

$\int_{٠}^{٢} ٣ \, د س \leq \int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤}+٩} \, د س \leq \int_{٠}^{٢} ٥ \, د س$

$٦ \leq \int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٢}+٩} \, د س \leq ١٠$

م = ٦ ، ك = ١٠

مثال (٤٩) كتاب

إذا علمت أن $م \leq \int_{٠}^{١} \frac{س}{١ + س^{٢}} \leq ك$ ، جد أكبر قيمة ممكنة للثابت م ، و أصغر قيمة ممكنة للثابت ك تحقق المتباينة دون حساب قيمة $\int_{٠}^{١} \frac{س}{١+س^{٢}} \, د س$

الحل ملاحظة١ $ص(س) = \frac{س}{١+س^{٢}}$ ، س ∈ [٠ ، ١]

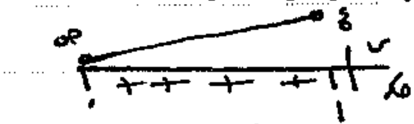
القيم الحرجة ← صَ غ م
س = ٠ ، ١
صَ = ٠

$صَ(س) = \frac{١ + س^{٢} - س \times ٢ س}{(١ + س^{٢})^{٢}}$

$صَ(س) = \frac{١ - س^{٢}}{(١ + س^{٢})^{٢}}$

صَ غ م تهمل

صَ(س) = ٠ ← $١ - س^{٢} = ٠$ ← س = ١ س = -١



ص(٠) = ٠ ص(١) = $\frac{١}{٢}$

$٠ \leq \frac{س}{١ + س^{٢}} \leq \frac{١}{٢}$

$\int_{٠}^{١} ٠ \, د س \leq \int_{٠}^{١} \frac{س}{١+س^{٢}} \, د س \leq \int_{٠}^{١} \frac{١}{٢} \, د س$

$٠ \leq \int_{٠}^{١} \frac{س}{١+س^{٢}} \, د س \leq \frac{١}{٢}$

م = ٠ ، ك = $\frac{١}{٢}$

ملاحظة٢ ص(س) = س ، س ∈ [٠ ، ١]

$هـ(س) = ١ + س^{٢}$ ، س ∈ [٠ ، ١]

* هـ(س) ← ٠ < س < ١

* $\text{هـ}(\text{س}) \leftarrow 0 < \text{س} < 1$

$0 < \text{س}^2 < 1$

$1 < \text{س}^2+1 < 2$

$\frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{ه}(\text{س})} \leftarrow 0 \le \frac{\text{س}}{1+\text{س}^2} \le \frac{1}{2}$

$\int_0^1 0\, d\text{س} \le \int_0^1 \frac{\text{س}}{\text{س}^2+1}\, d\text{س} \le \int_0^1 \frac{1}{2}\, d\text{س}$

$0 \le \int_0^1 \frac{\text{س}}{\text{س}^2+1}\, d\text{س} \le \frac{1}{2}$

$\text{م} = 0 \text{ ، } \text{ك} = \frac{1}{2}$

مثال (٥٠) كتاب

بين أن $\int_0^{2\pi} (3+\text{جتا}^2\text{س})\, d\text{س}$ ينحصر بين 6π ، 8π

الحل ط١ $\text{م}(\text{س}) = 3+\text{جتا}^2\text{س} \text{ ، } \text{س} \in [0, 2\pi]$

القيم الحرجة $\rightarrow$ مَ غ م ، $\text{س} = 0 ، 2\pi$

$\text{مَ} = 0$

$\text{مَ}(\text{س}) = -2\text{جتا س جاس} = 0$

$\text{جتاس جاس} = 0$

$\text{جتاس} = 0 \leftarrow \frac{\pi}{2} ، \frac{3\pi}{2}$

$\text{جاس} = 0 \leftarrow \textcircled{0} ، \pi ، \textcircled{2\pi}$

تهمل تهمل

ع ٢ ع ٢

$\text{م}(2\pi) = 4 ، \text{م}(\frac{3\pi}{2}) = 3 ، \text{م}(\pi) = 4$

$\text{م}(\frac{\pi}{2}) = 3 ، \text{م}(0) = 4$

$3 \le 3+\text{جتا}^2\text{س} \le 4$

$\int_0^{2\pi} 3\, d\text{س} \le \int_0^{2\pi} (3+\text{جتا}^2\text{س})\, d\text{س} \le \int_0^{2\pi} 4\, d\text{س}$

$6\pi \le \int_0^{2\pi} (3+\text{جتا}^2\text{س})\, d\text{س} \le 8\pi$

ط٢

$\text{م}(\text{س}) = \text{جتا}^2\text{س} \text{ ، } \text{س} \in [0, 2\pi]$

$0 \le \text{جتا}^2\text{س} \le 1$

$3 \le 3+\text{جتا}^2\text{س} \le 4$

$\int_0^{2\pi} 3\, d\text{س} \le \int_0^{2\pi} 3+\text{جتا}^2\text{س}\, d\text{س} \le \int_0^{2\pi} 4\, d\text{س}$

$6\pi \le \int_0^{2\pi} (3+\text{جتا}^2\text{س})\, d\text{س} \le 8\pi$

مثال (٥١)

دون حساب قيمة التكامل بين أن

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{جتا}\sqrt{\text{س}} \ge 0$

الحل ط١ $\text{م}(\text{س}) = \text{جتا}\sqrt{\text{س}} \text{ ، } \text{س} \in [0, \frac{\pi}{4}]$

ربع أول

$\text{جتا}\sqrt{\text{س}} \ge 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{جتا}\sqrt{\text{س}}\, d\text{س} \ge \int_0^{\frac{\pi}{4}} 0\, d\text{س}$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{جتا}\sqrt{\text{س}}\, d\text{س} \ge 0$

ط٢ يمكن حله على الوحدة الثالثة

مثال (٥٢)

دون إجراء عملية التكامل جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للمقدار $\int_0^{\pi} (2\text{جا}^3\text{س}+5)\, d\text{س}$

الحل $\text{م}(\text{س}) = 2\text{جا}^3\text{س} + 5 \text{ ، } \text{س} \in [0, \pi]$

ر١ ①+②

$0 \le \text{جاس} \le 1$

$0 \le \text{جا}^3\text{س} \le 1$

$0 \le 2\text{جا}^3\text{س} \le 2$

$5 \le 2\text{جا}^3\text{س} + 5 \le 7$

$\int_0^{\pi} 5\, d\text{س} \le \int_0^{\pi} (2\text{جا}^3\text{س}+5)\, d\text{س} \le \int_0^{\pi} 7\, d\text{س}$

$5\pi \le \int_0^{\pi} (2\text{جا}^3\text{س}+5)\, d\text{س} \le 7\pi$

ط٢ الحل على الوحدة الثالثة

مثال (٥٣)

دون حساب عملية التكامل بيّن أنّ

$$\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} (\text{٢س} + \text{جتاس})\,\text{ءس} > ٠$$

الحل

طـ١

$\text{ق(س)} = \text{٢س} + \text{جتاس} ،\ \text{س} \in [\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٣}]$

$\text{٢س} > ٠ ،\ \text{س} \in [\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٣}]$

$\text{جتاس} > ٠ ،\ \text{س} \in [\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٣}]$

$\therefore \text{٢س} + \text{جتاس} > ٠$

$$\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} (\text{٢س} + \text{جتاس})\,\text{ءس} > \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} ٠\,\text{ءس}$$

$$\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} (\text{٢س} + \text{جتاس})\,\text{ءس} > ٠$$

طـ٢ الحل ع الوحده الثالثه

مثال (٥٤) كتاب + ١٠٥ص

دون حساب تكامل المقدار

$\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{\text{٣جتا}^٢\text{س} + ٢}\,\text{ءس}$ ، بيّن أنّ

$$\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{\text{٣جتا}^٢\text{س} + ٢}\,\text{ءس} \le \frac{\pi}{٢}$$

الحل **طـ١**

$\text{ق(س)} = \frac{١}{\text{٣جتا}^٢\text{س} + ٢} ،\ \text{س} \in [\frac{\pi}{٥} ، \frac{\pi}{٢}]$

$٠ \le \text{جتا}^٢\text{س} \le ١$

$٠ \le \text{٣جتا}^٢\text{س} \le ٣$

$٢ \le \text{٣جتا}^٢\text{س} + ٢ \le ٥$

$\frac{١}{٥} \le \frac{١}{\text{٣جتا}^٢\text{س} + ٢} \le \frac{١}{٢}$

$$\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٥}\,\text{ءس} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{\text{٣جتا}^٢\text{س} + ٢} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢}\,\text{ءس}$$

$$\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{\text{٣جتا}^٢\text{س} + ٢}\,\text{ءس} \le \frac{\pi}{٢}$$

طـ٢ الحل ع الوحده الثالثه

الجزء الرابع:
مشتقة التكامل المحدود

ناتج التكامل المحدود دائماً يساوي مقدار ثابت ، و مشتقة الثابت تساوي صفر

$\text{ص} = \int_{أ}^{ب} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{صفر}$

مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر

مثال (٥٥) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ في كل من الآتي

① $\text{ص} = \int_{٢}^{١} (\text{٣س}^٢ - \text{س})\,\text{ءس}$

الحل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{صفر}$

② $\text{ص} = \int_{٠}^{\pi} \sqrt{\frac{١ - \text{جتاس}}{٢}}\,\text{ءس} + \int \text{س}\,\text{ءس}$

الحل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠ + \text{س} = \text{س}$

③ $\text{ق(س)} = \int_{٠}^{١} (\frac{١}{\text{س}} + ٢\sqrt{\text{س}})\,\text{ءس}$ ، جد $\text{ق}'(٣)$

الحل $\text{ق}'\text{(س)} = ٠ \longrightarrow \text{ق}'(٣) = \text{صفر}$

④ $\text{ق(س)} = \text{س}^٢ - \int (\text{٣س}^٢ - \int_{٠}^{١} \text{٢ص}\,\text{ءص})\,\text{ءس}$

جد $\text{ق}'\text{(س)}$

الحل $\text{ق}'\text{(س)} = \text{٢س} - (\text{٣س}^٢ - \int_{٠}^{١} \text{٢ص}\,\text{ءص})$

$\text{ق}'\text{(س)} = \text{٢س} - (\text{٣س}^٢ - \text{ص}^٢ |_{٠}^{١})$

$\text{ق}'\text{(س)} = \text{٢س} - \text{٣س}^٢ + ١$

ورقة عمل (٣)

السؤال الأول :

أوجد قيمة التكاملات الآتية

① $\int_{١}^{٤} \frac{\sqrt{س}+١}{\sqrt{س}}\, ءس$ $\boxed{٥}$

② $\int_{٠}^{٤} \frac{١}{\sqrt{٢س+١}}\, ءس$ $\boxed{٢}$

③ $\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{(جاس + جتاس)^{٢}}\, ءس$ $\boxed{١}$

④ $\int_{٠}^{٤} (٢س + |س-٢|)\, ءس$ $\boxed{٢٠}$

⑤ $\int_{٠}^{٢} \left(٣س^{٢} + \int_{١}^{٢} ٤س\, ءس\right) ءس$ $\boxed{٢٠}$

كتاب ⑥ $\int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{\frac{١ - جتا٢س}{٢}}\, ءس$ $\boxed{٢}$

السؤال الثاني :

جد قيمة (قيم) (م) في كل من الآتي

① $\int_{م}^{٢} (٤س-١)\, ءس = -٣م$ $م = \{-١ ، ٣\}$

② $ق(س) = \begin{cases} م-٣ ، & س < ١ \\ مس ، & س \geq ١ \end{cases}$

$\int_{-٢}^{٥} ق(س)\, ءس = ١٥$ $\boxed{م = ٢}$

③ $\int_{١}^{م} \left[\frac{س}{٣}+١\right] ءس = ١٢$ ، $\boxed{م = \frac{٤٤}{٣} ، \frac{-٣١}{٣}}$

كتاب ④ $\int_{٠}^{م} س(١-س)\, ءس = ٠$ ، $م \in ح$

$\boxed{م = ٠ ، \frac{٣}{٢}}$

السؤال الثالث: كتاب

إذا كان $\int_{٣}^{١} \left(٢ق(س) + \int_{٠}^{٢} ٢م\, ءم\right) ءس = ١٤$

جد $\int_{١}^{٣} ٣\, ق(س)\, ءس$ $\boxed{-٣٣}$

السؤال الرابع: كتاب

إذا كان $\int_{-١}^{١} (٤ق(س)+٣)\, ءس = ١٨$ ،

$\int_{١}^{٤} ٢ق(س)\, ءس = ٢٠$ ، جد $\int_{٤}^{-١} (٢س - ق(س))\, ءس$

$\boxed{٣٤}$

السؤال الخامس : ٢٠١١ ص

إذا كان $ق(س) = \int \left(\int_{٠}^{-٢} ٤\, ءس - ٣س^{٢}\right) ءس$

جد $قَ(-١)$ $\boxed{-١١}$

السؤال السادس :

إذا كان $\int_{-١}^{٤} (٢ق(س)-٢)\, ءس = ٨$ ، $\int_{٤}^{٢} ق(س)\, ءس = ١٢$

أوجد $\int_{٤}^{-١} \left(\frac{ق(س)}{٢} + ٣س^{٢}\right) ءس$ $\boxed{-٦٨}$

السؤال السابع : ٢٠١٣ ص

إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية

وكان $ق(٠) = ق(١) = ٠$ ، وكان $\int_{٠}^{١} ق(س)\, ءس = ١$

أوجد قاعدة الاقتران ق(س)

$\boxed{ق(س) = ٦س - س^{٢}}$

السؤال الثامن

كتاب ① بين أن $\int_{-٢}^{٥} (س^{٢}+٤)\, ءس \geq \int_{-٢}^{٥} ٣س\, ءس$

دون حساب قيمة كل من التكاملين

② أوجد قيم م، ن بحيث أن $م \leq \int_{-١}^{١} \sqrt{١-س^{٤}}\, ءس \leq ن$

$\boxed{م = ٠ ، ن = ٢}$

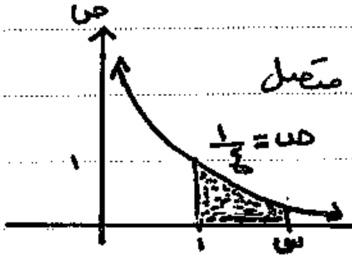
٢٠١٦ ش

③ إذا علمت أن $م \leq \int_{١}^{٣} \frac{١}{\sqrt{٢س^{٢}+٧}}\, ءس \leq ل$

جد قيمة م، ل بدون حساب قيمة التكامل

$\boxed{م = \frac{٢}{٥} ، ل = \frac{٢}{٣}}$

الدرس الرابع:
اقتران اللوغاريتم الطبيعي مشتقته وتكامله



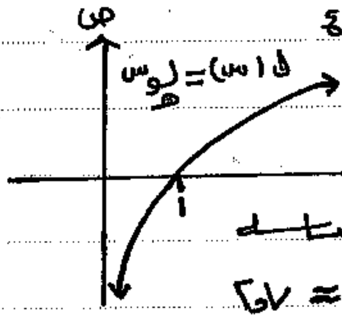
إذا كان $\text{ص} = \frac{1}{\text{ع}}$ متصل

ع $(0, \infty)$ ، $\text{س} > 0$

فإن مساحة المنطقة المظللة تساوي

$$\text{ل}(\text{س}) = \int_{1}^{\text{س}} \frac{1}{\text{ع}}\, \text{دع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$$

توضيح $\text{لو}_{\text{هـ}}3 = \int_{1}^{3} \frac{1}{\text{ع}}\, \text{دع}$



*الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي هو اقتران لوغاريتم أساسه العدد النيبيري هـ ≈ ٢٫٧

* $\text{ل}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{س} > 0$

قوانين اللوغاريتمات

① $\text{لو}_{\text{هـ}}1 = \text{صفر}$

② $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} = 1$

③ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}^{\text{ن}} = \text{ن}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

④ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}\times\text{ب} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب}$

⑤ $\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب}$

⑥ $\text{لو}_{\text{ب}}\text{أ} \times \text{لو}_{\text{جـ}}\text{ب} = \text{لو}_{\text{جـ}}\text{أ}$

⑦ $\text{هـ}^{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ})} = \text{أ}$

⑧ $\text{لو}_{\text{ب}}\text{أ} = \frac{1}{\text{لو}_{\text{أ}}\text{ب}}$

⑨ $\text{لو}_{\text{ب}}\text{أ} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب}}$

⑩ $\text{لو}_{\text{ب}}\text{أ} = \text{جـ} \leftarrow (\text{ب})^{\text{جـ}} = \text{أ}$

الجزء الأول :
مشتقة اقتران اللوغاريتم

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{س} > 0$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{س}}$$

نتائج

① $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{م}(\text{س})|$ ، $\text{م}(\text{س}) > 0$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{مَ}(\text{س})}{\text{م}(\text{س})}$$

② $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{م}(\text{س})|$ ، م(س) قابل للاشتقاق $\text{م}(\text{س}) > 0$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{مَ}(\text{س})}{\text{م}(\text{س})}$$

مثال (١)

إذا كان $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{س} > 0$

أثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{س}}$

الحل نفرض أن م(ع) هو معكوس مشتقة الاقتران المتصل $\text{مَ}(\text{ع}) = \frac{1}{\text{ع}}$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = \int_{1}^{\text{س}} \frac{1}{\text{ع}}\, \text{دع}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) = \int_{1}^{\text{س}} \text{مَ}(\text{ع})\, \text{دع} = \text{م}(\text{ع}) \Big|_{1}^{\text{س}}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) = \text{م}(\text{س}) - \text{م}(1)$$

نشتق الطرفين

$$(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})' = \text{مَ}(\text{س}) - 0$$

$$(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})' = \text{مَ}(\text{س})$$

$\boxed{\text{مَ}(\text{ع}) = \frac{1}{\text{ع}}}$

$$(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})' = \frac{1}{\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{س}}$$

مثال (١)

جد المشتقة الأولى في كل من الآتي

① $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 7\text{س} + 9)$

الحل $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{2\text{س} + 7}{\text{س}^2 + 7\text{س} + 9}$

---

② $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^3$

الحل ط١ $\text{ص} = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \leftarrow \dfrac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = \dfrac{3}{\text{س}}$

ط٢ $\dfrac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = \dfrac{3\text{س}^2}{\text{س}^3} = \dfrac{3}{\text{س}}$

---

③ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^5 + 4\text{س} + 1)^7$

الحل $\text{ص} = 7\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^5 + 4\text{س} + 1)$

$\dfrac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = \dfrac{7\,(5\text{س}^4 + 4)}{\text{س}^5 + 4\text{س} + 1}$

---

④ $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}^2 + 7}$ (كتاب)

الحل $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 7)^{\frac{1}{2}}$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 7)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س}^2 + 7}$

---

⑤ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\dfrac{1}{\text{س}}$

الحل $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}1 - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \leftarrow \text{ص} = 0 - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ص} = -\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\dfrac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = \dfrac{-1}{\text{س}}$

---

⑥ $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\dfrac{(\text{س} + 3)^7}{(\text{س}^2 + 4)^5}$

الحل $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} + 3)^7 - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 4)^5$

$\text{ق}(\text{س}) = 7\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} + 3) - 5\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 4)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{7}{\text{س} + 3} - \dfrac{10\text{س}}{\text{س}^2 + 4}$

---

⑦ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\dfrac{\text{جتاس}}{\sqrt{4 - 3\text{س}^2}}$ (كتاب)

الحل $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس} - \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{4 - 3\text{س}^2}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس} - \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(4 - 3\text{س}^2)$

$\text{ص}' = \dfrac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} - \frac{1}{2} \times \dfrac{-6\text{س}}{4 - 3\text{س}^2}$

$\text{ص}' = -\text{ظاس} + \dfrac{3\text{س}}{4 - 3\text{س}^2}$

---

⑧ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 9)$

الحل $\text{ق}'(\text{س}) = \text{س} \times \dfrac{2\text{س}}{\text{س}^2 + 9} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 9)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{2\text{س}^2}{\text{س}^2 + 9} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 9)$

---

⑨ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}^2\text{س}$

الحل $\text{ص} = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$

$\dfrac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = 2\,\dfrac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = 2\,\text{ظتاس}$

---

⑩ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}^3 5\text{س}$ (كتاب)

الحل $\text{ص} = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}5\text{س}$

$\dfrac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = 3 \times \dfrac{5\,\text{جتا}5\text{س}}{\text{جا}5\text{س}} = 15\,\text{ظتا}5\text{س}$

---

⑪ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}$

الحل $\dfrac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = \dfrac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظاس}} = \dfrac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} \times \dfrac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

$= \dfrac{1}{\text{جاس}\,\text{جتاس}} = \dfrac{2}{\text{جا}2\text{س}}$

---

⑫ $\text{ص} = \text{س}^2\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^3 + 1)^5$

الحل $\text{ص} = 5\text{س}^2\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^3 + 1)$

$\dfrac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = 5\text{س}^2 \times \dfrac{3\text{س}^2}{\text{س}^3 + 1} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^3 + 1) \times 10\text{س}$

$\dfrac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = \dfrac{15\text{س}^4}{\text{س}^3 + 1} + 10\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^3 + 1)$

⑬ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{هـ}^{٢} + ٣\text{هـ} + ٢)$

الحل $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{صفر}$

٢٠١٢ ش

⑭ $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{٢} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$

الحل $\text{قَ(س)} = ٠ + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \text{ظتاس}$

---

⑮ $\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt[٣]{\text{جاس} + \text{جتاس}}$

الحل $\text{ق(س)} = \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{جاس} + \text{جتاس})$

$\text{قَ(س)} = \frac{١}{٣}\;\frac{\text{جتاس} - \text{جاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}$

---

⑯ $\text{ص} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٣}$ (كتاب)

الحل $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٣(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} \times \frac{١}{\text{س}}$

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٣}{\text{س}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}$

---

⑰ $\text{ق(س)} = \text{ظا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$ (كتاب)

الحل $\text{قَ(س)} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ظا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$

---

⑱ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{س}}\text{هـ}$

الحل $\text{ص} = \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{-١ \times \frac{١}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}} = \frac{-١}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}}$

---

⑲ $\text{ص} = \text{لو}_{٣}\text{س}$

الحل $\text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}٣}$

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}}٣\;\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

٢٠٠٤ ص

⑳ $\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{س}^{٥}}{\text{س}^{٢}+١}\right)$ ، $\text{قَ}(١)$

الحل $\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٥} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}+١)$

$\text{ق(س)} = ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}+١)$

$\text{قَ(س)} = \frac{٥}{\text{س}} - \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$

$\text{قَ}(١) = ٥ - ١ = ٤$

㉑ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢} - ٥\text{س}|$

الحل $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٢\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}$

㉒ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}|$

الحل $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} = -\text{ظاس}$

مثال (٣) ٢٠٠٧ ص

إذا كان $\text{ق(س)} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، أوجد $\int_{١}^{\text{هـ}} \text{قً(س)}\,\text{ءس}$

الحل $\int_{١}^{\text{هـ}} \text{قً(س)}\,\text{ءس} = \text{قَ(س)}\Big|_{١}^{\text{هـ}}$

$\text{قَ(س)} = \text{س} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times ١$

$\text{قَ(س)} = ١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{قَ(س)}\Big|_{١}^{\text{هـ}} = \text{ق(هـ)} - \text{ق}(١)$

$= ٢ - ١ = \boxed{١}$

مثال (٤) ٢٠١٧ ص

إذا كان $\int \text{م}\,\text{قَ(س)}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|٢-٤\text{س}| - \int ٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{قَ(س)}\,\text{ءس}$

وكان $\text{قَ}(٠) = ٢$ ، جد قيمة الثابت (م)

الحل نشتق الطرفين

$\text{م}\,\text{قَ(س)} = \frac{-٤}{٢-٤\text{س}} - ٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{قَ(س)}$

$\text{قَ}(٠) = ٢ \leftarrow ٢\text{م} = -٢ - ٢\text{هـ}^{٠} \times ٢$

$٢\text{م} = -٢ - ٤ \longleftarrow ٢\text{م} = -٦$

$\boxed{\text{م} = -٣}$

مثال (٥) (كتاب)

اذا كان $ق(س) = \text{لو}_{هـ}(س + \sqrt{س^{٢} - ١})$

أثبت أن $ق'(س) = \frac{١}{\sqrt{س^{٢}-١}}$

الحل $ق'(س) = \frac{١ + \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}-١}}}{س + \sqrt{س^{٢}-١}}$

$ق'(س) = \frac{\cancel{\sqrt{س^{٢}-١} + س}}{\sqrt{س^{٢}-١}} \times \frac{١}{\cancel{س + \sqrt{س^{٢}-١}}}$

$ق'(س) = \frac{١}{\sqrt{س^{٢}-١}}$

مثال (٦) (كتاب)

اذا كان $\int (ق'(س) - س) دس = \text{لو}_{هـ}|\text{قاس} + \text{ظاس}| + س^{٢}$

أثبت أن $ق'(س) = ٣س + \text{قاس}$

الحل نشتق الطرفين

$ق'(س) - س = \frac{\text{قاس ظاس} + \text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{قاس} + \text{ظاس}} + ٢س$

$ق'(س) - س = \frac{\text{قاس}\cancel{(\text{قاس}+\text{ظاس})}}{\cancel{\text{قاس}+\text{ظاس}}} + ٢س$

$ق'(س) - س = \text{قاس} + ٢س$

$ق'(س) = \text{قاس} + ٣س$

الجزء الثاني:
تكامل اقتران اللوغاريتم

يستخدم تكامل اللوغاريتم الطبيعي لحل تكامل $س^{ن}$ ، $ن = -١$

قاعدة:

$$\boxed{\int \frac{١}{س} دس = \text{لو}_{هـ}|س| + جـ}$$

نتائج:

① $\int \frac{أ}{س} دس = أ\,\text{لو}_{هـ}|س| + جـ$

② $\int \frac{٤}{أس + ب} دس = \frac{٤}{أ} \text{لو}_{هـ}|أس + ب| + جـ$

بشكل عام

$\int \frac{ق'(س)}{ق(س)} دس = \text{لو}_{هـ}|ق(س)| + جـ$

$\int \frac{\text{مشتقة المقام}}{\text{المقام}} دس = \text{لو}_{هـ}|\text{المقام}| + جـ$

مثال (٧):

أثبت أن $\int \frac{ق'(س)}{ق(س)} دس = \text{لو}_{هـ}|ق(س)| + جـ$

الحل $ص = ق(س) \rightarrow \frac{دص}{دس} = ق'(س)$

$دس = \frac{دص}{ق'(س)}$

$\int \frac{ق'(س)}{ص} \cdot \frac{دص}{ق'(س)} = \int \frac{١}{ص} دص$

$= \text{لو}_{هـ}|ص| + جـ = \text{لو}_{هـ}|ق(س)| + جـ$

مثال (٨): جد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int \frac{١}{س} دس$

الحل $\int \frac{١}{س} دس = \text{لو}_{هـ}|س| + جـ$

② $\int \frac{-٢}{س} دس$

الحل $\int \frac{-٢}{س} دس = -٢\,\text{لو}_{هـ}|س| + جـ$

③ $\int_{١}^{هـ} \frac{٥}{س} دس$

الحل $= ٥\,\text{لو}_{هـ}|س| \Big|_{١}^{هـ} = ٥(\text{لو}_{هـ}هـ - \text{لو}_{هـ}١) = ٥$

④ $\int هـ^{(٢\text{لو}_{هـ}س)} دس$

الحل $= \int هـ^{(\text{لو}_{هـ}س^{٢})} دس = \int س^{٢} دس$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

⑤ $\int \frac{-٣}{٣\text{س}-٥}\,\text{ءس}$

الحل $\frac{-٣}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٣\text{س}-٥| + \text{جـ}$

⑥ $\int ٣(٢\text{س}-١)^{-١}\,\text{ءس}$

الحل $= \int \frac{٣}{٢\text{س}-١}\,\text{ءس} = \frac{٣}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{س}-١| + \text{جـ}$

⑦ $\int \frac{\text{س}+٥}{\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل $\int \left(\frac{\text{س}}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}}\right)\text{ءس} = \int \left(١ + \frac{٥}{\text{س}}\right)\text{ءس}$

$= \text{س} + ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

⑧ $\int_{١}^{٣} \frac{٦\text{س}}{٣\text{س}^٢-٥}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام $= ٦\text{س}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|٣\text{س}^٢-٥|\Big|_{١}^{٣}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}٢٢ - \text{لو}_{\text{هـ}}٢ = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{٢٢}{٢} = \text{لو}_{\text{هـ}}١١$

⑨ $\int \frac{٣\text{س}}{\text{س}^٢+٥}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام $= ٢\text{س}$

$= \frac{٣}{٢}\int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢+٥}\,\text{ءس} = \frac{٣}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^٢+٥| + \text{جـ}$

⑩ $\int \frac{٨-٦\text{س}^٢}{\text{س}^٣-٤\text{س}+١}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام $= ٣\text{س}^٢-٤$

$= -٢\int \frac{٣\text{س}^٢-٤}{\text{س}^٣-٤\text{س}+١}\,\text{ءس} = -٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^٣-٤\text{س}+١| + \text{جـ}$

⑪ $\int \frac{١+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{٥+\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام $= ١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|٥+\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{جـ}$

⑫ $\int \frac{\text{جا}٥\text{س}}{٣-\text{جتا}٥\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام $= ٥\,\text{جا}٥\text{س}$

$= \frac{١}{٥}\int \frac{٥\,\text{جا}٥\text{س}}{٣-\text{جتا}٥\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٣-\text{جتا}٥\text{س}| + \text{جـ}$

⑬ $\int \frac{\text{جا}٢\text{س}}{١+\text{جا}^٢\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام $= ٢\,\text{جاس جتاس} = \text{جا}٢\text{س}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|١+\text{جا}^٢\text{س}| + \text{جـ}$

⑭ $\int \frac{\text{قاس ظاس} - ٥}{٥\text{س} - \text{قاس}}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام $= ٥ - \text{قاس ظاس}$

$= -\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٥\text{س} - \text{قاس}| + \text{جـ}$

⑮ $\int \frac{١+\text{ظا}^٢\text{س}}{\text{ظاس}}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام $= \text{قا}^٢\text{س}$

$\int \frac{١+\text{ظا}^٢\text{س}}{\text{ظاس}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{\text{ظاس}}\,\text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظاس}| + \text{جـ}$

⑯ $\int \frac{٥+٥\,\text{ظتا}^٢\text{س}}{\text{ظتاس}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل مشتقة المقام $= -\,\text{قتا}^٢\text{س}$

$\int \frac{٥+٥\,\text{ظتا}^٢\text{س}}{\text{ظتاس}}\,\text{ءس} = \int \frac{٥(١+\text{ظتا}^٢\text{س})}{\text{ظتاس}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{٥\,\text{قتا}^٢\text{س}}{\text{ظتاس}}\,\text{ءس} = -٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظتاس}| + \text{جـ}$

⑰ ٢٠٠٢ $\int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جاس جتاس}}\,\text{ءس}$

الحل $= \int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{\frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{٢\,\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جا}٢\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا}٢\text{س}| + \text{جـ}$

⑱ $\int \text{ظاس}\ \text{ءس}$

الحل $= \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\ \text{ءس} = -\int \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}\ \text{ءس}$

$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{جـ}$

⑲ $\int \text{ظتاس}\ \text{ءس}$

الحل $= \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\ \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| + \text{جـ}$

⑳ $\int \text{ظا٥س}\ \text{ءس}$

الحل $= \int \frac{\text{جا٥س}}{\text{جتا٥س}}\ \text{ءس}$ ، مشتقة المقام $= -\text{٥جا٥س}$

$= \frac{-١}{٥} \int \frac{-\text{٥جا٥س}}{\text{جتا٥س}}\ \text{ءس} = \frac{-١}{٥}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا٥س}| + \text{جـ}$

㉑ $\int \text{قاس}\ \text{ءس}$

الحل $\int \text{قاس} \times \frac{\text{قاس} + \text{ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س} + \text{قاس ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}}\ \text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس} + \text{ظاس}| + \text{جـ}$

㉒ $\int \text{قتاس}\ \text{ءس}$

الحل $= \int \text{قتاس} \times \frac{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{\text{قتا}^{٢}\text{س} + \text{قتاس ظتاس}}{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}\ \text{ءس}$

$= -\int \frac{-\text{قتا}^{٢}\text{س} - \text{قتاس ظتاس}}{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}\ \text{ءس}$

$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قتاس} + \text{ظتاس}| + \text{جـ}$

㉓ $\int_{-١}^{٢} \frac{|\text{٢س}|}{\text{س}^{٢}+١}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل $|\text{٢س}|$

$\frac{\text{٢س} \quad -\text{٢س}}{- \ - \ \overset{\cdot}{\underset{٠}{|}} \ + \ +}$

$= \int_{-١}^{٠} \frac{-\text{٢س}}{\text{س}^{٢}+١}\ \text{ءس} + \int_{٠}^{٢} \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{٢}+١}\ \text{ءس}$

$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢}+١| \Big|_{-١}^{٠} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢}+١| \Big|_{٠}^{٢}$

$= -(\text{لو}_{\text{هـ}}١ - \text{لو}_{\text{هـ}}٢) + \text{لو}_{\text{هـ}}٥ - \text{لو}_{\text{هـ}}١$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}٢ + \text{لو}_{\text{هـ}}٥ = \text{لو}_{\text{هـ}}١٠$

مثال (٩)

جد معكوساً لمشتقة كل من الإقترانات الآتية

① $\text{ق(س)} = \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{٢}+٤}$

الحل $\text{م(س)} = \int \text{ق(س)}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{٢}+٤}\ \text{ءس}$

$\text{م(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢}+٤| + \text{جـ}$

② $\text{ق(س)} = \frac{\text{٣جتا٣س}}{٥ + \text{جا٣س}}\ \text{ءس}$

الحل $\text{م(س)} = \int \text{ق(س)}\ \text{ءس}$

$\text{م(س)} = \int \frac{\text{٣جتا٣س}}{٥ + \text{جا٣س}}\ \text{ءس}$

مشتقة المقام $= \text{٣جتا٣س}$

$\text{م(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}}|٥ + \text{جا٣س}| + \text{جـ}$

ورقة عمل (٤)

السؤال الأول :

أوجد المشتقة الأولى في كل من الآتي

① $ق(س) = هـ^{٢} لو_{هـ} جاس$ (٢٠١٢ ش)

$\boxed{هـ^{٢} ظتاس}$

② $ص = لو_{هـ} \frac{س^{٥}}{س^{٢}+١}$ ، $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=١}$ $\boxed{٤}$

③ $ق(س) = لو_{هـ} |س^{٢}+٤س-٥|$ (كتاب)

الجواب $\frac{٢س+٤}{س^{٢}+٤س-٥}$

④ $ص = لو_{هـ} جا^{٢} ٥س$ (كتاب)

$\boxed{١٠ ظتا ٥س}$

⑤ $ص = لو_{هـ} ٢ + \sqrt{س}$ (كتاب)

الجواب $\frac{١}{٤\sqrt{س}+٢س}$

⑥ $(لو_{هـ} س)^{٣}$ (كتاب)

الجواب $\frac{٣}{س}(لو_{هـ} س)^{٢}$

⑦ $ق(س) = لو_{هـ} \frac{(٤س^{٢}+٥)^{٦}}{(٧-٢س)^{٥}}$ (كتاب)

الجواب $\frac{٤٨س}{٤س^{٢}+٥} + \frac{١٠}{٧-٢س}$

⑧ $ق(س) = لو_{هـ} \sqrt[٣]{٥س^{٣}+٤س}$ (كتاب)

الجواب $\frac{١٥س^{٢}+٤}{٣(٥س^{٣}+٤س)}$

⑨ $ق(س) = س^{٣} لو_{هـ} س$ (كتاب)

الجواب $س^{٢}+٣س^{٢} لو_{هـ} س$

السؤال الثاني :

① إذا كان $\int ق(س) دس = لو_{هـ}|جاس جتاس|$

أوجد $ق(\frac{ط}{٨})$ $\boxed{٢}$

② إذا كان $ص = جا لو_{هـ} س$ ، أثبت أن

$س^{٢}ص'' + سص' + ص = صفر$

السؤال الثالث : أوجد التكاملات الآتية

① $\int_{هـ}^{هـ^{٢}} \frac{١}{س-١} دس$ (٢٠١٣ ص)

الجواب $لو_{هـ}(هـ^{٢}+هـ+١)$

② $\int \frac{٢س-١}{س(س-١)} دس$ (كتاب)

الجواب $لو_{هـ}|س^{٢}-س| + جـ$

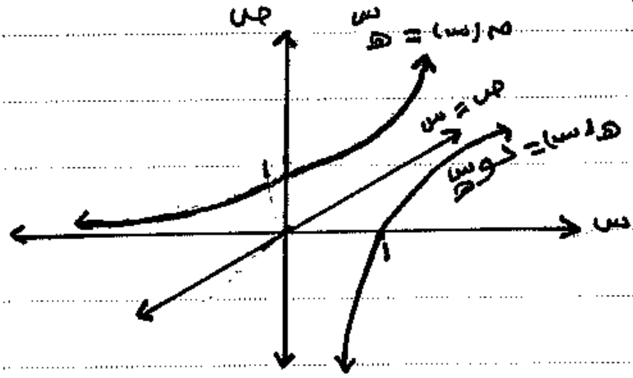
③ $\int \frac{جا٣س}{١+جتا٣س} دس$ (كتاب)

الجواب $\frac{-١}{٣} لو_{هـ}|١+جتا٣س| + جـ$

④ $\int_{-\frac{ط}{٤}}^{\frac{ط}{٤}} \frac{قا^{٢}س}{٢+ظاس} دس$ (كتاب)

الجواب $\boxed{لو_{هـ} ٣}$

الدرس الخامس :
مشتقة و تكامل الإقتران الأسي الطبيعي



الإقتران الأسي الطبيعي $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{س}}$

حيث هـ هو العدد النيبيري ، هو الإقتران العكسي لإقتران اللوغاريتم الطبيعي

قواعد الأسس

① $\text{هـ}^{0} = 1$

② $\frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}} = \text{هـ}^{-\text{س}}$

③ $\text{هـ}^{\text{أ}} \times \text{هـ}^{\text{ن}} = \text{هـ}^{(\text{أ}+\text{ن})}$

④ $\frac{\text{هـ}^{\text{أ}}}{\text{هـ}^{\text{ن}}} = \text{هـ}^{(\text{أ}-\text{ن})}$

⑤ $(\text{هـ}^{\text{أ}})^{\text{ب}} = \text{هـ}^{(\text{أ}\times\text{ب})}$

⑥ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{ق(س)}} = \text{ق(س)}$

⑦ $\text{هـ}^{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ق(س)})} = \text{ق(س)}$

الجزء الأول :
مشتقة الإقتران الأسي

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

نتائج

① $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ق(س)}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قَ(س)} \times \text{هـ}^{\text{ق(س)}}$

② $\text{ص} = \text{أ}^{\text{ق(س)}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قَ(س)} \times \text{أ}^{\text{ق(س)}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

مثال (١) : كتاب

إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، أثبت أن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

الحل $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \longrightarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{س}$

$\frac{\text{صَ}}{\text{ص}} = 1 \longrightarrow \text{صَ} = \text{ص}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

مثال (٢) كتاب

إذا كان $\text{ص} = \text{أ}^{\text{ق(س)}}$ ، أثبت أن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قَ(س)} \times \text{أ}^{\text{(س)}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

الحل $\text{ص} = \text{أ}^{\text{ق(س)}} \longleftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}^{\text{ق(س)}}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{ق(س)}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

$\frac{1}{\text{ص}}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}\ \text{قَ(س)}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}\ \text{قَ(س)}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قَ(س)}\ \text{أ}^{\text{ق(س)}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

مثال (٣) : جد المشتقة الأولى في كل من الآتي

① $\text{ص} = \text{هـ}^{(3\text{س}^2+1)}$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 6\text{س} \times \text{هـ}^{(3\text{س}^2+1)}$

② $\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٥\,\text{هـ}^{\text{س}}$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} - ٥\,\text{هـ}^{\text{س}}$

③ $\text{ص} = \text{هـ}^{(\text{س}^{٣} + \text{جاس})}$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٣\text{س}^{٢} + \text{جتاس})\,\text{هـ}^{(\text{س}^{٣} + \text{جاس})}$

④ $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}}$

الحل $\text{د ص} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}} \times \text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}}$

⑤ $\text{ص} = \text{هـ}^{٢} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

⑥ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جتا}٣\text{س}}$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٣\text{جا}٣\text{س} \times \text{هـ}^{\text{جتا}٣\text{س}}$

⑦ $\text{ص} = \text{ظا}^{٣}(\text{هـ}^{٢\text{س}})$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{ظا}^{٢}(\text{هـ}^{٢\text{س}}) \times \text{قا}^{٢}(\text{هـ}^{٢\text{س}}) \times ٢\text{هـ}^{٢\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٦\text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{ظا}^{٢}(\text{هـ}^{٢\text{س}})\,\text{قا}^{٢}(\text{هـ}^{٢\text{س}})$

⑧ $\text{ص} = (\text{هـ}^{\text{س}^{٢}})^{٦}$

الحل $\text{ص} = \text{هـ}^{٦\text{س}^{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٢\text{س}\,\text{هـ}^{٦\text{س}^{٢}}$

⑨ $\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{٣\text{س}} + ٥\text{س}}$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٣\text{هـ}^{٣\text{س}} + ٥}{٢\sqrt{\text{هـ}^{٣\text{س}} + ٥\text{س}}}$

⑩ $\text{ص} = \frac{١}{\sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}^{٥}}}}$

الحل $\text{ص} = \frac{١}{(\text{هـ}^{٢\text{س}^{٥}})^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}^{٥}}} = \text{هـ}^{-\text{س}^{٥}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٥\text{س}^{٤}\,\text{هـ}^{-\text{س}^{٥}}$

⑪ $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

الحل $\text{ص} = ١ - \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}} = ١ - \text{هـ}^{-\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{-\text{س}}$

⑫ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٣} - ٢\text{س})$

الحل $\frac{\text{د ص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}} + \frac{٣\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س}^{٣} - ٢\text{س}}$

⑬ $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{لو}_{\text{هـ}}(٥\text{س}+١)^{٢}$ ، $\text{قَ}(٠)$

الحل $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جاس}} + ٢\text{لو}_{\text{هـ}}(٥\text{س}+١)$

$\text{قَ}(\text{س}) = \text{جتاس} \times \text{هـ}^{\text{جاس}} + \frac{١٠}{٥\text{س}+١}$

$\text{قَ}(٠) = ١ \times ١ + ١٠ = \boxed{١١}$

⑭ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{هـ}^{\text{جتاس}}$

الحل $\text{ص} = \text{هـ}^{(\text{جاس} + \text{جتاس})}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{جتاس} - \text{جاس}) \times \text{هـ}^{(\text{جاس} + \text{جتاس})}$

⑮ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \text{هـ}^{\text{س}}$

⑯ $\text{ص} = \text{هـ}^{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٢}+٥)}$

الحل $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٥ \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$

⑰ $\text{ص} = \text{هـ}^{(-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس})}$

الحل $\text{ص} = \text{هـ}^{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}^{-١})} = \text{جاس}^{-١} = \frac{١}{\text{جاس}}$

$\text{ص} = \text{قتاس} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{قتاس ظتاس}$

⑱ $\text{ص} = ٣\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}{}^{\text{س}}$

الحل $\text{ص} = ٣\text{س}^{٢} \rightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٦\text{س}$

ش ٢٠١٧

⑲ $\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١)}$ ،

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ٠

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢\text{هـ}^{٢\text{س}} + \frac{١}{\text{س}+١}}{٢\sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}+١}}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=٠} = \frac{٢\text{هـ}^{٠} + ١}{٢\sqrt{١+٠}} = \frac{٣}{٢}$

---

⑳ $\text{ص} = ٣^{(\text{س}^{٢}+٥)}$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}{}^{٣} \times ٣^{(\text{س}^{٢}+٥)}$

㉑ $\text{ص} = ٥^{\text{جاس}}$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\ \text{جتاس}\ ٥^{\text{جاس}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}{}^{٥}$

㉒ $\text{هـ}^{\text{ص}} = ٢\text{س}$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\text{هـ}^{\text{ص}} = ٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢}{\text{هـ}^{\text{ص}}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢}{٢\text{س}} = \frac{١}{\text{س}}$

㉓ $\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{جتاس}$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\text{هـ}^{\text{ص}} = -\text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{جاس}}{\text{هـ}^{\text{ص}}} = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} = -\text{ظاس}$

ط٢

$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{جتاس} \rightarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} = -\text{ظاس}$

㉔ $\text{ص} = (\text{س})^{\text{س}}$ ، جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١}$

الحل $\text{ص} = (\text{س})^{\text{س}} \rightarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س})^{\text{س}}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{١}{\text{ص}} = \text{س} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \times \text{ص}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \times (\text{س})^{\text{س}}$

ش ٢٠٠٩

㉕ $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{٤\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} + \int^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{دس}}{١+\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

أوجد $\text{قَ}(\frac{\pi}{٤})$

الحل $\text{قَ}(\text{س}) = ٤\text{هـ}^{٤\text{س}} + \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظاس}} + ٠$

$\text{قَ}(\frac{\pi}{٤}) = ٤\text{هـ}^{\pi} + ٢$

مثال (٤) كتاب + ٢٠٠٩ ص

إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{م}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس} + \int^{\frac{\pi}{٣}} \frac{\text{دس}}{١+\text{ظا}^{٢}\text{س}}$

وكان $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}} = ٢\text{هـ} + ١$ ، جد قيمة (م)

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{هـ}^{\text{ظاس}} - \text{م}\ \text{ظاس} + ٠$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}} = ٢\text{هـ} - \text{م} = ٢\text{هـ} + ١$

$\boxed{\text{م} = -١}$

مثال (٥) كتاب

إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{مس}}$ ، أوجد قيمة الثابت (م)

التي تحقق المعادلة $\text{صً} - ٥\text{صَ} + ٦\text{ص} = ٠$

الحل $\text{صَ} = \text{م}\,\text{هـ}^{\text{مس}}$ ، $\text{صً} = \text{م}^{٢}\text{هـ}^{\text{مس}}$

$\text{صً} - ٥\text{صَ} + ٦\text{ص} = \text{م}^{٢}\text{هـ}^{\text{مس}} - ٥\text{م}\,\text{هـ}^{\text{مس}} + ٦\text{هـ}^{\text{مس}} = ٠$

$\text{هـ}^{\text{مس}}(\text{م}^{٢} - ٥\text{م} + ٦) = ٠$

$\text{هـ}^{\text{مس}}(\text{م} - ٢)(\text{م} - ٣) = ٠$

$\text{هـ}^{\text{مس}} = ٠$ تهمل $\text{هـ}^{\text{مس}} > ٠$

$\text{م} - ٢ = ٠ \leftarrow \text{م} = ٢$ ، $\text{م} - ٣ = ٠ \leftarrow \text{م} = ٣$

$\text{م} = \{٢ ، ٣\}$

مثال (٦) ٢٠٠٨ ص

إذا كان $\text{ص} = \text{م}\,\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$

وكان $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} = \text{هـ}^{٢} + ١$ ، جد قيمة (م)

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{م}\,\text{هـ}^{٢\text{س}} + \frac{١}{\text{س}}\,\text{جتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} = ٢\text{م}\,\text{هـ}^{٢} + ١$

$٢\text{م}\,\text{هـ}^{٢} + ١ = \text{هـ}^{٣} + ١$

$٢\text{م}\,\text{هـ}^{٢} = \text{هـ}^{٣} \leftarrow \text{م} = \frac{\text{هـ}}{٢}$

مثال (٧)

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$\text{ص} = (\text{س}-١)\text{هـ}^{\text{س}} + ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٢$

عند النقطة (١ ، ٢)

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{س}-١)\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \frac{٣}{\text{س}}$

$\text{م} = \left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} \longleftarrow \text{م} = ٠ + \text{هـ} + ٣ = ٣ + \text{هـ}$

معادلة المماس $\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١)$

$\text{ص} - ٢ = (٣ + \text{هـ})(\text{س} - ١)$

مثال (٨) ٢٠١٥ ص

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+٢}}\,\text{دس}$

جد $\text{ق}''(٠)$

الحل $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+٢}}$

$$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+٢} \times \text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{١}{٢(\text{س}+٢)}}{\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+٢}\right)^{٢}}$$

$$\text{ق}''(٠) = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{٢} - \frac{١}{٤}}{\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{٢}\right)^{٢}}$$

مثال (٩) : إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}$ ، أثبت أن

$\text{ص}'' - ٢\text{ص}' + ٢\text{ص} = \text{صفر}$

الحل $\text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}$

$\text{ص}'' = \text{هـ}^{\text{س}} \times -\text{جاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}$

$\text{ص}'' = ٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}$

$\text{ص}'' - ٢\text{ص}' + ٢\text{ص}$

$= ٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} - ٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} - ٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} + ٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} = \text{صفر}$

مثال (١٠) كتاب

إذا كان $\text{هـ}^{\text{ص س}} = \text{س} - \text{ص}$ ، أثبت أن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}^{٢} - \text{ص س} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س ص} + ١}$

الحل

$(\text{ص} + \text{س ص}')\,\text{هـ}^{\text{ص س}} = ١ - \text{ص}'$

$\text{ص هـ}^{\text{ص س}} + \text{س هـ}^{\text{ص س}}\,\text{ص}' = ١ - \text{ص}'$

$\text{س هـ}^{\text{ص س}}\,\text{ص}' + \text{ص}' = ١ - \text{ص هـ}^{\text{ص س}}$

$\text{ص}'(\text{س هـ}^{\text{ص س}} + ١) = ١ - \text{ص هـ}^{\text{ص س}}$

$\text{ص}' = \frac{١ - \text{ص هـ}^{\text{ص س}}}{\text{س هـ}^{\text{ص س}} + ١}$

$\text{ص}' = \frac{١ - \text{ص}(\text{س} - \text{ص})}{\text{س}(\text{س} - \text{ص}) + ١}$

$\text{ص}' = \frac{١ - \text{س ص} + \text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢} - \text{س ص} + ١}$

مثال (١١) كتاب

إذا كان $\int \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{هـ}^{١-\text{س}^{٢}} + ٤\text{هـ}$ ، $\text{ق}(\text{ب}) = -٢\text{ب}$ ،

$\text{ب} \neq \text{صفر}$ ، جد قيمة (قيم) الثابت (ب)

الحل $\text{ق}(\text{س}) = -٢\text{س}\,\text{هـ}^{١-\text{س}^{٢}}$

$\text{ق}(\text{ب}) = -٢\text{ب}\,\text{هـ}^{١-\text{ب}^{٢}}$

$-٢\text{ب}\,\text{هـ}^{١-\text{ب}^{٢}} = -٢\text{ب}$

$\text{هـ}^{١-\text{ب}^{٢}} = ١ \longleftarrow \text{هـ}^{٠} = ١ \leftarrow \text{هـ}^{١-\text{ب}^{٢}} = \text{هـ}^{٠}$

$١ - \text{ب}^{٢} = ٠ \longleftarrow \text{ب} = \pm١ ، \{١ ، -١\}$

الجزء الثاني: تكامل الاقتران الأسي الطبيعي

① $\int \text{ه}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{ه}^{\text{س}} + \text{جـ}$

② $\int \text{ه}^{(\text{أس}+\text{ب})}\,\text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}} \times \text{ه}^{(\text{أس}+\text{ب})} + \text{جـ}$

مثال (١٢) كتاب

أثبت أن $\int \text{ه}^{(\text{أس}+\text{ب})}\,\text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}} \times \text{ه}^{(\text{أس}+\text{ب})} + \text{جـ}$

الحل $\text{ص} = \text{أس}+\text{ب} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{أ}$.

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{أ}}$

$= \frac{1}{\text{أ}}\int \text{ه}^{\text{ص}}\,\text{ءص} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{ه}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{ه}^{(\text{أس}+\text{ب})} + \text{جـ}$

مثال (١٣): أوجد التكاملات الآتية

① $\int \text{ه}^{(3\text{س}-5)}\,\text{ءس}$

الحل $= \frac{1}{3}\,\text{ه}^{(3\text{س}-5)} + \text{جـ}$

② $\int_{1}^{3} \text{ه}^{2}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل $= \text{ه}^{2}(3-1) = 2\text{ه}^{2}$

③ $\int_{1}^{\text{ه}^{2}} \frac{1}{\text{ه}-1}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل $= \frac{1}{\text{ه}-1}(\text{ه}^{2}-1)$

$= \frac{(\text{ه}+1)\cancel{(\text{ه}-1)}}{\cancel{\text{ه}-1}} = \text{ه} + 1$

④ $\int (\text{ه}^{\text{س}})^{-2}\,\text{ءس}$

الحل $= \int \text{ه}^{-2\text{س}}\,\text{ءس} = \frac{-1}{2}\,\text{ه}^{-2\text{س}} + \text{جـ}$

⑤ $\int \sqrt[3]{\text{ه}^{2\text{س}}}\,\text{ءس}$

الحل $= \int (\text{ه}^{2\text{س}})^{\frac{1}{3}}\,\text{ءس}$

$= \int \text{ه}^{\frac{2}{3}\text{س}}\,\text{ءس} = \frac{3}{2}\,\text{ه}^{\frac{2}{3}\text{س}} + \text{جـ}$

⑥ $\int \frac{2}{\text{ه}^{1-3\text{س}}}\,\text{ءس}$

الحل $= \int 2\,\text{ه}^{(3\text{س}-1)}\,\text{ءس} = \frac{2}{3}\,\text{ه}^{(3\text{س}-1)} + \text{جـ}$

⑦ $\int \text{ه}^{3\text{س}}(1+\text{ه}^{2\text{س}})\,\text{ءس}$ كتاب

الحل $= \int (\text{ه}^{3\text{س}} + \text{ه}^{5\text{س}})\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{3}\,\text{ه}^{3\text{س}} + \frac{1}{5}\,\text{ه}^{5\text{س}} + \text{جـ}$

⑧ $\int \left(\text{جاس} + \frac{1}{\text{ه}^{2\text{س}}}\right)\text{ءس}$

الحل $= \int (\text{جاس} + \text{ه}^{2\text{س}})\,\text{ءس}$

$= -\text{جتاس} + \frac{1}{2}\,\text{ه}^{2\text{س}} + \text{جـ}$

⑨ $\int (\text{ه}^{\text{س}} - 3\text{ه}^{2\text{س}})^{2}\,\text{ءس}$

$= \int \left((\text{ه}^{\text{س}})^{2} - 6\text{ه}^{3\text{س}} + 9(\text{ه}^{2\text{س}})^{2}\right)\text{ءس}$

$= \int (\text{ه}^{2\text{س}} - 6\text{ه}^{3\text{س}} + 9\text{ه}^{4\text{س}})\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\,\text{ه}^{2\text{س}} - 2\text{ه}^{3\text{س}} + \frac{9}{4}\,\text{ه}^{4\text{س}} + \text{جـ}$

⑩ $\int \frac{4\text{ه}^{4\text{س}} - 3}{\text{ه}^{4\text{س}} - 3\text{س}}\,\text{ءس}$ كتاب

الحل

مشتقة المقام $= 4\text{ه}^{4\text{س}} - 3$

$\int \frac{4\text{ه}^{4\text{س}} - 3}{\text{ه}^{4\text{س}} - 3\text{س}}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{ه}}|\text{ه}^{4\text{س}} - 3\text{س}| + \text{جـ}$

⑪ $\int \frac{4\text{ه}^{2\text{س}} - 8\text{ه}^{5\text{س}}}{2\text{ه}^{\text{س}}}\,\text{ءس}$

الحل $= \int \frac{\cancel{2\text{ه}^{\text{س}}}(2\text{ه}^{\text{س}} - 4\text{ه}^{4\text{س}})}{\cancel{2\text{ه}^{\text{س}}}}\,\text{ءس}$

$= 2\text{ه}^{\text{س}} - \text{ه}^{4\text{س}} + \text{جـ}$

⑫ $\int \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}} - ٩}{\text{هـ}^{\text{س}} + ٣}\, \text{ءس}$

الحل $= \int \frac{(\text{هـ}^{\text{س}})^{٢} - ٩}{\text{هـ}^{\text{س}} + ٣}\, \text{ءس} = \int \frac{(\text{هـ}^{\text{س}} - ٣)\cancel{(\text{هـ}^{\text{س}} + ٣)}}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}} + ٣}}\, \text{ءس}$

$= \int (\text{هـ}^{\text{س}} - ٣)\, \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} - ٣\text{س} + \text{جـ}$

⑬ $\int \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}} - ٢٧}{\text{هـ}^{\text{س}} - ٣}\, \text{ءس}$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{(\text{هـ}^{\text{س}})^{٣} - ٢٧}{\text{هـ}^{\text{س}} - ٣}\, \text{ءس}$

$= \int \frac{\cancel{(\text{هـ}^{\text{س}} - ٣)}(\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٦\text{هـ}^{\text{س}} + ٩)}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}} - ٣}}\, \text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٦\text{هـ}^{\text{س}} + ٩\text{س} + \text{جـ}$

⑭ $\int \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١}\, \text{ءس}$ (٢٠١٤ ش)

الحل $\int \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}(\text{هـ}^{-\text{س}} + ١)}\, \text{ءس} = \int \frac{\text{هـ}^{-\text{س}}}{١ + \text{هـ}^{-\text{س}}}\, \text{ءس}$

$= - \int \frac{-\text{هـ}^{-\text{س}}}{١ + \text{هـ}^{-\text{س}}}\, \text{ءس} = - \text{لو}_{\text{هـ}} |١ + \text{هـ}^{-\text{س}}| + \text{جـ}$

⑮ $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}}\, \text{ءس}$ (٢٠١٤ ص)

الحل

$= \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}}}\, \text{ءس} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\frac{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١}{\text{هـ}^{\text{س}}}}\, \text{ءس}$

$= \int \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١}\, \text{ءس} = ٢ \int \frac{\frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١}\, \text{ءس}$

$= ٢\, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١| + \text{جـ}$

⑯ $\int \text{هـ}^{٥\text{س}} \sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٤\text{هـ}^{\text{س}} + ٤}\, \text{ءس}$ (كتاب)

$= \int \text{هـ}^{٥\text{س}} \sqrt{(\text{هـ}^{\text{س}} + ٢)^{٢}}\, \text{ءس}$

$= \int \text{هـ}^{٥\text{س}} (\text{هـ}^{\text{س}} + ٢)\, \text{ءس}$

$= \int (\text{هـ}^{٦\text{س}} + ٢\text{هـ}^{٥\text{س}})\, \text{ءس}$

$= \frac{١}{٦}\text{هـ}^{٦\text{س}} + \frac{٢}{٥}\text{هـ}^{٥\text{س}} + \text{جـ}$

⑰ $\int ٣\text{س}\, \text{هـ}^{(٢ + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{٢})}\, \text{ءس}$ (كتاب)

الحل $= \int ٣\text{س} (\text{هـ}^{٢} + \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{٢}})\, \text{دس}$

$= \int ٣\text{س} (\text{هـ}^{٢} + \text{س}^{٢})\, \text{ءس}$

$= \int ٣\text{هـ}^{٢}\text{س} + ٣\text{س}^{٣}\, \text{ءس}$

$= \frac{٣}{٢}\text{هـ}^{٢}\text{س}^{٢} + \frac{٣\text{س}^{٤}}{٤} + \text{جـ}$

⑱ $\int_{٠}^{٢} |\text{هـ}^{٢\text{س} - ١} - \text{هـ}|\, \text{ءس}$ (٢٠١٧ ص)

الحل $|\text{هـ}^{٢\text{س} - ١} - \text{هـ}|$

$\text{هـ}^{٢\text{س} - ١} - \text{هـ} = ٠ \longrightarrow \text{هـ}^{٢\text{س} - ١} = \text{هـ} \rightarrow \text{هـ}^{٢\text{س} - ١} = \text{هـ}^{١}$

$٢\text{س} - ١ = ١ \longrightarrow \boxed{\text{س} = ١}$

$-(\text{هـ}^{٢\text{س} - ١} - \text{هـ}) \quad \text{هـ}^{٢\text{س} - ١} - \text{هـ}$

$٠ \quad - \quad ١ \quad + \quad ٢$

$= \int_{٠}^{١} -(\text{هـ}^{٢\text{س} - ١} - \text{هـ})\, \text{ءس} + \int_{١}^{٢} (\text{هـ}^{٢\text{س} - ١} - \text{هـ})\, \text{ءس}$

$= \text{هـ}\text{س} - \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س} - ١} \Big|_{٠}^{١} + \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س} - ١} - \text{هـ}\text{س} \Big|_{١}^{٢}$

$= \frac{\text{هـ}}{٢} + \frac{\text{هـ}^{-١}}{٢} + \frac{\text{هـ}^{٣}}{٢} - \frac{\text{هـ}}{٢}$

$= \frac{-٢\text{هـ} + \text{هـ}^{-١} + \text{هـ}^{٣}}{٢}$

مثال (١٤) (كتاب) + (٢٠١٤ ص)

إذا كان $\text{مَ}''(\text{س}) = \text{جاس} + \text{هـ}^{٢\text{س}}$ ، $\text{م}(٠) = \frac{١}{٤}$ ،

$\text{مَ}(٠) = \frac{١}{٢}$ ، جد قاعدة الاقتران $\text{م}(\text{س})$.

الحل $\text{مَ}(\text{س}) = \int \text{مَ}''(\text{س})\, \text{ءس} = \int (\text{جاس} + \text{هـ}^{٢\text{س}})\, \text{ءس}$

$\text{مَ}(\text{س}) = - \text{جتاس} + \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{جـ}$

$\text{مَ}(٠) = \frac{١}{٢} \leftarrow -١ + \frac{١}{٢} + \text{جـ} = \frac{١}{٢}$

$\leftarrow \text{جـ} = ١$ ، $\text{مَ}(\text{س}) = - \text{جتاس} + \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١$

$\text{م}(\text{س}) = \int \text{مَ}(\text{س})\, \text{ءس} = \int (- \text{جتاس} + \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١)\, \text{ءس}$

$\text{م}(\text{س}) = - \text{جاس} + \frac{١}{٤}\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{س} + \text{جـ}^{*}$

$\text{م}(٠) = \frac{١}{٤} \leftarrow ٠ + \frac{١}{٤} + ٠ + \text{جـ}^{*} = \frac{١}{٤} \leftarrow \boxed{\text{جـ}^{*} = ٠}$

$\text{م}(\text{س}) = - \text{جاس} + \frac{١}{٤}\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{س}$

ورقة عمل (٥)

السؤال الأول:

أ) جد المشتقة الأولى في كل من الآتي

① $\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{(\text{٢س}^{٣})}}$

الجواب $\text{٣س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٣}}$

② $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}} + ١}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

الجواب $-\text{هـ}^{-\text{س}}$

③ ١٩٩٧ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣}$

الجواب $\frac{\text{٣هـ}^{\text{س}^{٢}}}{\text{س}} + \text{٦س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

④ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{٤س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{دس}}{١ + \text{جتا}^{٢}\text{س}}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}}$

الجواب $\text{٤هـ}^{\pi} + ٢$

⑤ $\int \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} + \text{جـ}$ ، قَ(س)

الجواب: $\text{قَ(س)} = \text{٤س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} + \text{٢هـ}^{\text{س}} - \text{قتا}^{٢}\text{س}$

⑥ ٢٠١٢ ش $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{جا}^{٢}\frac{\pi}{٤}} + \text{لو}_{\text{هـ}}^{(١-\text{جتا}^{٢}\text{س})}$ ، $\text{قَ}(\frac{\pi}{٤})$

$\boxed{٣}$

السؤال الثاني (٢٠١٦ ش)

إذا كان $\text{ق(س)} = \int (\text{هـ}^{\text{جتا٢س}} + \text{جا٢س})\,\text{دس}$

جد $\text{قً}(\frac{\pi}{٤})$ ، $\boxed{-٢}$

السؤال الثالث

① إذا كان $\text{ص}^{٢} = \text{لو}_{\text{هـ}}^{\text{س ص}} - \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}$

أثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص} - \text{٢س}^{٢}\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}}{\text{٢س ص}^{٢} - \text{س}}$

② إذا كان $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} + \text{ص}$ ، أثبت أن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١ - \text{س ص} - \text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢} + \text{س ص} - ١}$

③ (كتاب) + (٢٠١٣ ص)

$\text{ص} = (٤)^{\text{ق(س)}}$ ، أثبت أن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٤)^{\text{ق(س)}} \times \text{قَ(س)} \times \text{لو}_{\text{هـ}}٤$

السؤال الرابع: (كتاب)

جد المشتقة الأولى لكل من الآتي

① $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}$

الجواب $\frac{-١}{\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\frac{-١}{\text{س}}}} + \frac{١}{\text{٢س}}$

② $\text{ص} = \sqrt{١ + \text{هـ}^{\text{٢س}}}$

الجواب: $\frac{\text{هـ}^{\text{٢س}}}{\sqrt{١ + \text{هـ}^{\text{٢س}}}}$

③ $\text{ص} = \text{هـ}^{٢} + \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{جاس}}$

الجواب $\text{س}^{٣}\,\text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{٣س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{جاس}}$

④ $\text{ص} = (\text{هـ}^{\text{٤س}+٥})^{٦}$

الجواب: $٢٤\,\text{هـ}^{(\text{٢٤س}+٣٠)}$

السؤال الخامس: جد التكاملات الآتية

① $\int \text{هـ}^{\text{س}}(\text{هـ}^{\text{٣س}} - \text{٢هـ}^{\text{٥س}})\,\text{دس}$

الجواب $\frac{١}{٤}\text{هـ}^{\text{٤س}} - \frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{٦س}} + \text{جـ}$

② $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس}$ ، الجواب $\text{س} - \frac{١}{٢}\text{هـ}^{-\text{٢س}} + \text{جـ}$

③ $\int_{٠}^{١} (١ + \text{هـ}^{\text{س}})^{٢}\,\text{دس}$ (كتاب)

④ ٢٠٠٨ ش $\int_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٢} \text{هـ}^{\text{س}}(٩ - \text{٤هـ}^{\text{س}})\,\text{دس}$ ، $\boxed{٣}$

⑤ $\int_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٣} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{٤ + \text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس}$ ، $\boxed{\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{٧}{٥}}$

الدرس السادس : التكامل بالتعويض

تعلمت سابقاً أن التكامل لا يوزع على عمليتي الضرب والقسمة ويصعب حله باستخدام قواعد التكامل في هذه الحالة نلجأ لطرق أخرى تسمى طرائق التكامل وهي

① التكامل بالتعويض
② التكامل بالأجزاء
③ التكامل بالكسور الجزئية

التكامل بالتعويض

يستخدم التكامل بالتعويض عند تكامل حاصل ضرب أو قسمة اقترانين احداهما مشتقة الآخر أو جزء منها

خطوات استخدام التعويض لإجراء التكامل

$$\int \text{م}(\text{هـ(س)}) \times \text{هـَ(س)} \, \text{ءس}$$

① نفرض $\text{ص} = \text{هـ(س)}$
② نشتق $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـَ(س)}$
③ نجد $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{المشتقة}} = \frac{\text{ءص}}{\text{هـَ(س)}}$
④ نستبدل : نجعل التكامل بدلالة (ص)
⑤ نختصر إن أمكن
⑥ نجد التكامل مستخدماً قواعد التكامل

الجزء الأول : التكامل بالتعويض بشكل مباشر

① $\int \text{مَ(س)} \times (\text{م(س)})^{\text{ن}} \, \text{ءس}$

$\int \frac{\text{مَ(س)}}{(\text{م(س)})^{\text{ن}}} \, \text{ءس}$

نفرض $\text{ص} = \text{م(س)}$ ما داخل القوس

② $\int \text{مَ(س)} = \sqrt[\text{ن}]{\text{م(س)}} \, \text{ءس}$

$\int \frac{\text{مَ(س)}}{\sqrt[\text{ن}]{\text{م(س)}}} \, \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{م(س)}$ ما داخل الجذر

أو $\text{ص} = \sqrt[\text{ن}]{\text{م(س)}}$ الجذر نفسه

③ $\int \text{مَ(س)} \times \text{هـ}^{\text{م(س)}} \, \text{ءس}$

$\text{م(س)} \neq \text{أس} + \text{ب}$

دائماً إذا كان الأس غير خطي

نفرض $\text{ص} = \text{الأس} = \text{م(س)}$

④ $\int \text{مَ(س)} \times \text{دائري}\left(\overset{\text{م(س)}}{\underset{\text{خطية}}{\text{زاوية ليست}}}\right)$

دائماً إذا كانت الزاوية ليست خطية

نفرض $\text{ص} = \text{الزاوية} = \text{م(س)}$

⑤ $\int \text{دائري} \times \text{دائري} \, \text{ءس}$

$\int \frac{\text{دائري}}{\text{دائري}} \, \text{ءس}$

احداهما مشتقة الآخر

ص = الاقتران الذي مشتقته متوفره

مثال (١) أوجد التكاملات الآتية

① $\int ٢س\,(س^٢+١)^٧\,\text{د}س$

الحل $ص = س^٢+١$ ، $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = ٢س$ ، $\text{د}س = \frac{\text{د}ص}{٢س}$

$= \int \cancel{٢س}\,ص^٧\,\frac{\text{د}ص}{\cancel{٢س}} = \int ص^٧\,\text{د}ص$

$= \frac{ص^٨}{٨} + جـ = \frac{(س^٢+١)^٨}{٨} + جـ$

② $\int_٠^١ س\,(١+س^٢)^٤\,\text{د}س$ (٢٠٠٥)

الحل $= \int_١^٢ \cancel{س}\,ص^٤\,\frac{\text{د}ص}{٢\cancel{س}}$

$= \int_١^٢ \frac{١}{٢}\,ص^٤\,\text{د}ص$

$= \frac{١}{١٠}\,ص^٥ \Big|_١^٢$

$= \frac{٣١}{١٠}$

$ص = ١+س^٢$

$\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = ٢س$

$\text{د}س = \frac{\text{د}ص}{٢س}$

$س = ٠ \leftarrow ص = ١$

$س = ١ \leftarrow ص = ٢$

③ $\int \frac{١٠س - ٥}{\sqrt[٣]{(س^٢-س+١)^٢}}\,\text{د}س$ (كتاب)

الحل $\int \frac{١٠س-٥}{\sqrt[٣]{ص^٢}}\,\frac{\text{د}ص}{٢س-١}$

$= \int \frac{٥\cancel{(٢س-١)}}{\sqrt[٣]{ص^٢}}\,\frac{\text{د}ص}{\cancel{٢س-١}}$

$= \int ٥\,ص^{\frac{-٢}{٣}}\,\text{د}ص$

$= ٥ \times ٣ص^{\frac{١}{٣}} + جـ = ١٥\sqrt[٣]{س^٢-س+١} + جـ$

$ص = س^٢-س+١$

$\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = ٢س-١$

$\text{د}س = \frac{\text{د}ص}{٢س-١}$

④ $\int \frac{(٥+\sqrt{س})^٧}{\sqrt{س}}\,\text{د}س$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{(٥+ص)^٧}{\cancel{ص}}\,٢\cancel{ص}\,\text{د}ص$

$= \int ٢(٥+ص)^٧\,\text{د}ص$

$= ٢\,\frac{(٥+ص)^٨}{٨} + جـ$

$= \frac{١}{٤}(٥+\sqrt{س})^٨ + جـ$

$ص = \sqrt{س}$

$ص^٢ = س$

$٢ص\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = ١$

$\text{د}س = ٢ص\,\text{د}ص$

⑤ $\int \frac{\text{د}س}{س\sqrt{\text{لو}_{هـ}س+١}}$ (كتاب)

الحل

$= \int \frac{٢\cancel{س}\,\cancel{ص}}{\cancel{س}\,\cancel{ص}}\,\text{د}ص$

$= \int ٢\,\text{د}ص$

$= ٢ص + جـ$

$= ٢\sqrt{\text{لو}_{هـ}س+١} + جـ$

$ص = \sqrt{\text{لو}_{هـ}س+١}$

$ص^٢ = \text{لو}_{هـ}س+١$

$٢ص\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = \frac{١}{س}$

$\text{د}س = ٢س\,ص\,\text{د}ص$

⑥ $\int_٠^٤ س\sqrt{س^٢+٩}\,\text{د}س$ (٢٠٠٦ ص)

الحل $\int_٣^٥ س\,ص \times \frac{ص}{س}\,\text{د}ص$

$= \int_٣^٥ ص^٢\,\text{د}ص$

$= \frac{ص^٣}{٣}\Big|_٣^٥ = \frac{١٢٥}{٣} - \frac{٢٧}{٣}$

$= \frac{٩٨}{٣}$

$ص = \sqrt{س^٢+٩}$

$ص^٢ = س^٢+٩$

$٢ص\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = ٢س$

$\text{د}س = \frac{ص}{س}\,\text{د}ص$

$س = ٠ \leftarrow ص = ٣$

$س = ٤ \leftarrow ص = ٥$

⑦ $\int \text{جا}س\,(١+\text{جتا}٢س)^٥\,\text{د}س$ (كتاب)

الحل $= \int \text{جا}س\,(١+٢\text{جتا}^٢س-١)^٥\,\text{د}س$

$= \int \text{جا}س\,(٢\text{جتا}^٢س)^٥\,\text{د}س$

$= \int ٣٢\,\text{جا}س\,\text{جتا}^{١٠}س\,\text{د}س$

$= \int -٣٢\,\cancel{\text{جا}س}\,ص^{١٠}\,\frac{\text{د}ص}{\cancel{\text{جا}س}}$

$= \int -٣٢\,ص^{١٠}\,\text{د}ص$

$= -٣٢\,\frac{ص^{١١}}{١١} + جـ = \frac{-٣٢}{١١}\,\text{جتا}^{١١}س + جـ$

$ص = \text{جتا}س$

$\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = -\text{جا}س$

$\text{د}س = \frac{-\text{د}ص}{\text{جا}س}$

⑧ $\int \text{ظتا}^٥س\,\text{قتا}^٢س\,\text{د}س$

الحل

$\int ص^٥\,\cancel{\text{قتا}^٢س} \times \frac{-\text{د}ص}{\cancel{\text{قتا}^٢س}}$

$= \int -ص^٥\,\text{د}ص$

$= -\frac{ص^٦}{٦} + جـ = \frac{-١}{٦}\,\text{ظتا}^٦س + جـ$

$ص = \text{ظتا}س$

$\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = -\text{قتا}^٢س$

$\text{د}س = \frac{-\text{د}ص}{\text{قتا}^٢س}$

⑨ $\int (٢+\text{قتا}^2\text{س})\,\text{ظتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

الحل $= \int (٢\text{ظتا}^2\text{س} + \text{ظتا}^2\text{س}\ \text{قتا}^2\text{س})\ \text{ءس}$

$= \int ٢\text{ظتا}^2\text{س}\ \text{ءس} + \int \text{ظتا}^2\text{س}\ \text{قتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

* $\int ٢\text{ظتا}^2\text{س}\ \text{ءس} = \int ٢(\text{قتا}^2\text{س}-١)\ \text{ءس}$

$= ٢(-\text{ظتاس} - \text{س})$

* $\int \text{ظتا}^2\text{س}\ \text{قتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int \text{ص}^2 \cancel{\text{قتا}^2\text{س}}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{-\text{قتا}^2\text{س}}}$

$= \int -\text{ص}^2\,\text{ءص} = -\frac{\text{ص}^3}{٣} + \text{ج}$

$= \frac{-١}{٣}\text{ظتا}^3\text{س} + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{ظتاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{قتا}^2\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{قتا}^2\text{س}}$

* $\int (٢+\text{قتا}^2\text{س})\,\text{ظتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

$= -٢\text{ظتاس} - ٢\text{س} - \frac{١}{٣}\text{ظتا}^3\text{س} + \text{ج}$

---

⑩ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\sqrt{١+\text{جتا}^2\text{س}}}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{٢\text{جاس}\ \text{جتاس}}{\sqrt{١+\text{جتا}^2\text{س}}}$

$= \int_{\sqrt{٢}}^{١} \frac{٢\cancel{\text{جاس}\ \text{جتاس}}}{\cancel{\text{ص}}} \times \frac{\cancel{\text{ص}}\ \text{ءص}}{\cancel{-\text{جاس}\ \text{جتاس}}}$

$= \int_{\sqrt{٢}}^{١} -٢\ \text{ءص}$

$= -٢(١-\sqrt{٢})$

$\text{ص} = \sqrt{١+\text{جتا}^2\text{س}}$

$\text{ص}^2 = ١+\text{جتا}^2\text{س}$

$٢\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٢\text{جاس}\ \text{جتاس}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ص}\ \text{ءص}}{-\text{جاس}\ \text{جتاس}}$

$\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = \sqrt{٢}$

$\text{س} = \frac{\pi}{٢} \leftarrow \text{ص} = ١$

---

⑪ $\int \frac{\text{جاس}\sqrt{\text{جا}^2\text{س}+٤}}{\text{قاس}}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل

$= \int \text{جاس}\ \text{جتاس}\sqrt{\text{جا}^2\text{س}+٤}\ \text{ءس}$

$= \int \cancel{\text{جاس}\ \text{جتاس}}\ \text{ص} \times \frac{\text{ص}\ \text{ءص}}{\cancel{\text{جاس}\ \text{جتاس}}}$

$= \int \text{ص}^2\ \text{ءص}$

$= \frac{\text{ص}^3}{٣} + \text{ج}$

$= \frac{١}{٣}\left(\sqrt{\text{جا}^2\text{س}+٤}\right)^3 + \text{ج}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{جا}^2\text{س}+٤}$

$\text{ص}^2 = \text{جا}^2\text{س}+٤$

$٢\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{جاس}\ \text{جتاس}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ص}\ \text{ءص}}{\text{جاس}\ \text{جتاس}}$

---

⑫ $\int (\text{س}^2-٢)\,\text{جتا}(\text{س}^3-٦\text{س})\ \text{ءس}$

الحل

$= \int \cancel{(\text{س}^2-٢)}\ \text{جتاص}\ \frac{\text{ءص}}{\underset{٣}{\cancel{٣\text{س}^2-٦}}}$

$\text{ص} = \text{س}^3 - ٦\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^2 - ٦$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٣\text{س}^2-٦}$

$= \int \frac{١}{٣}\text{جتاص}\ \text{ءص} = \frac{١}{٣}\text{جاص} + \text{ج}$

$= \frac{١}{٣}\text{جا}(\text{س}^3-٦\text{س}) + \text{ج}$

---

⑬ $\int \frac{\text{قتا}^2\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس}$

الحل

$= \int \frac{\text{قتا}^2\text{ص}}{\cancel{\text{ص}}}\ ٢\cancel{\text{ص}}\ \text{ءص}$

$= \int ٢\text{قتا}^2\text{ص}\ \text{ءص}$

$= -٢\text{ظتاص} + \text{ج}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^2 = \text{س}$

$٢\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$

$\text{ءس} = ٢\text{ص}\ \text{ءص}$

$= -٢\ \text{ظتا}\sqrt{\text{س}} + \text{ج}$

---

⑭ $\int \text{جتاس}\ \text{قتا}^2(\text{جاس})\ \text{ءس}$

الحل $= \int \cancel{\text{جتاس}}\ \text{قتا}^2\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int \text{قتا}^2\text{ص}\ \text{ءص}$

$= -\text{ظتاص} + \text{ج}$

$= -\text{ظتا}(\text{جاس}) + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

---

⑮ $\int \frac{\text{س}\ \text{ظا}^2\sqrt{\text{س}^2+١}}{\sqrt{\text{س}^2+١}}\ \text{ءس}$

الحل

$= \int \frac{\cancel{\text{س}}\ \text{ظا}^2\text{ص}}{\cancel{\text{ص}}}\ \frac{\cancel{\text{ص}}}{\cancel{\text{س}}}\ \text{ءص}$

$= \int \text{ظا}^2\text{ص}\ \text{ءص}$

$= \int (\text{قا}^2\text{ص} - ١)\ \text{ءص}$

$= \text{ظاص} - \text{ص} + \text{ج}$

$= \text{ظا}\sqrt{\text{س}^2+١} - \sqrt{\text{س}^2+١} + \text{ج}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^2+١}$

$\text{ص}^2 = \text{س}^2+١$

$٢\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}\ \text{ءص}$

⑯ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2\text{س} + \frac{1}{2}\text{جا}2\text{س}\ \text{جتاس}}\ \text{ءس}$ (ش٢٠١٦)

الحل

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جاس جتاس جتاس}}\ \text{ءس}$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س جاس}}\ \text{ءس}$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2\text{س}\,(1+\text{جاس})}\ \text{ءس}$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2\text{س}}\ \sqrt{1+\text{جاس}}\ \text{ءس}$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\text{جتاس}|\ \sqrt{1+\text{جاس}}\ \text{ءس}$

$|\text{جتاس}|$

جتاس −جتاس

$\frac{\pi}{4}$ + + $\frac{\pi}{2}$ − − π

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتاس}\sqrt{1+\text{جاس}}\ \text{ءس} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\text{جتاس}\sqrt{1+\text{جاس}}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt{1+\text{جاس}}$

$\text{ص}^2 = 1+\text{جاس}$

$2\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس}$

$\text{ءس} = \frac{2\text{ص}}{\text{جتاس}}\ \text{ءص}$

$\text{س} = \frac{\pi}{4} \leftarrow \text{ص} = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\text{س} = \frac{\pi}{2} \leftarrow \text{ص} = \sqrt{2}$

$\text{س} = \pi \leftarrow \text{ص} = 1$

$= \int_{\frac{1}{1-\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \cancel{\text{جتاس}}\ \text{ص} \times \frac{2\text{ص}}{\cancel{\text{جتاس}}}\ \text{ءص}$ ⊕ $\int_{\sqrt{2}}^{1} \cancel{-\text{جتاس}}\ \text{ص} \times \frac{2\text{ص}}{\cancel{\text{جتاس}}}\ \text{ءص}$

$= \int_{\frac{1}{1-\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} 2\text{ص}^2\ \text{ءص} + \int_{\sqrt{2}}^{1} -2\text{ص}^2\ \text{ءص}$

$= \frac{2}{3}\text{ص}^3 \Big|_{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}}^{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\text{ص}^3 \Big|_{\sqrt{2}}^{1}$

$\frac{2}{3}(\sqrt{2})^3 - \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^3 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(\sqrt{2})^3$

$= \frac{4}{3}(\sqrt{2})^3 - \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^3 - \frac{2}{3}$

⑰ $\int_{0}^{2} \text{س}\,[\text{س}^2 - 3]\ \text{ءس}$

الحل

$\text{ص} = \text{س}^2 - 3$

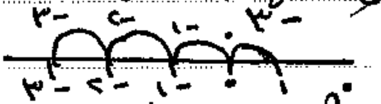
$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{2\text{س}}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = -3$

$\text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = 1$

$= \int_{-3}^{1} \text{س}\,[\text{ص}]\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{2\text{س}}} = \int_{-3}^{1} \frac{1}{2}\,[\text{ص}]\ \text{ءص}$



$\text{ص} = 0$ ، $\text{ل} = 1$

$= \int_{-3}^{-2} \frac{-3}{2}\ \text{ءص} + \int_{-2}^{-1} -1\ \text{ءص} + \int_{-1}^{0} \frac{-1}{2}\ \text{ءص} + \int_{0}^{1} 0\ \text{ءص}$

$= -3$

⑱ $\int \frac{1}{\sqrt{\text{س}} + 2\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل $\int \frac{2\text{ص}}{\text{ص} + 2\text{ص}^2}\ \text{ءص}$

$= \int \frac{2\text{ص}}{\text{ص}(1+2\text{ص})}\ \text{ءص}$

$= \int \frac{2}{2\text{ص}+1}\ \text{ءص}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |2\text{ص}+1| + \text{جـ}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |2\sqrt{\text{س}}+1| + \text{جـ}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^2 = \text{س}$

$2\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1$

$\text{ءس} = 2\text{ص}\ \text{ءص}$

⑲ $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}\sqrt{\text{س}} + 1}\ \text{ءس}$

الحل $= \int \frac{\text{ص}}{\text{ص}^2 \times \text{ص} + 1} \times 2\text{ص}\ \text{ءص}$

$= \int \frac{2\text{ص}^2}{\text{ص}^3 + 1}\ \text{ءص}$

$= \frac{2}{3}\int \frac{3\text{ص}^2}{\text{ص}^3 + 1}\ \text{ءص}$

$= \frac{2}{3}\ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}^3 + 1| + \text{جـ}$

$= \frac{2}{3}\ \text{لو}_{\text{هـ}} |(\sqrt{\text{س}})^3 + 1| + \text{جـ}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^2 = \text{س}$

$2\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1$

$\text{ءس} = 2\text{ص}\ \text{ءص}$

⑳ $\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}}}{5 - \text{س}\sqrt[3]{\text{س}}}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل

$= \int \frac{3\text{ص}^3}{5 - \text{ص}^4}\ \text{ءص}$

$= \frac{-3}{4}\int \frac{-4\text{ص}^3}{5 - \text{ص}^4}\ \text{ءص}$

$= \frac{-3}{4}\ \text{لو}_{\text{هـ}} |5 - \text{ص}^4| + \text{جـ}$

$= \frac{-3}{4}\ \text{لو}_{\text{هـ}} |5 - (\sqrt[3]{\text{س}})^4| + \text{جـ}$

$\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}}$

$\text{ص}^3 = \text{س}$

$3\text{ص}^2\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1$

$\text{ءس} = 3\text{ص}^2\ \text{ءص}$

㉑ $\int \frac{1}{\text{س}}\, \text{جا}^2(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\, \text{ءس}$

الحل $= \int \frac{1}{\text{س}}\, \text{جا}^2\text{ص}\ \text{س}\,\text{ءص}$

$= \int \text{جا}^2\text{ص}\,\text{ءص}$

$= \int \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2\text{ص})\,\text{ءص}$

$= \frac{1}{2}(\text{ص} - \frac{1}{2}\,\text{جا}2\text{ص}) + \text{ج}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{2}\,\text{جا}(2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\right) + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$

$\text{ءس} = \text{س}\,\text{ءص}$

㉒ $\int \text{ظتاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}\ \text{ءس}$ (٢٠١٤ ش معدّل)

الحل

$= \int \cancel{\text{ظتاس}} \times \text{ص}\, \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{ظتاس}}}$

$= \int \text{ص}\,\text{ءص}$

$= \frac{\text{ص}^2}{2} + \text{ج} = \frac{1}{2}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس})^2 + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{ظتاس}}$

㉓ $\int \frac{1}{\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\, \text{ءس}$

الحل

$= \int \frac{\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}\ \text{ص}}\, \text{ءص}$

$= \int \frac{1}{\text{ص}}\, \text{ءص}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{ج}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$

$\text{ءس} = \text{س}\,\text{ءص}$

㉔ $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+1}}{\text{س}+1}\, \text{ءس}$

الحل $= \int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}}{\text{س}+1}\, \text{ءس}$

$= \int \frac{1}{2}\, \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}+1}{\text{س}+1}\, \text{ءس}$

$= \int \frac{1}{2}\, \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}+1}}\, \cancel{(\text{س}+1)}\,\text{ءص}$

$= \int \frac{1}{2}\,\text{ص}\,\text{ءص} = \frac{\text{ص}^2}{4} + \text{ج}$

$= \frac{1}{4}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}+1)^2 + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}+1$

$\frac{1}{\text{س}+1} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\text{ءس} = (\text{س}+1)\,\text{ءص}$

㉕ $\int \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2}{\text{س}}\, \text{ءس}$

الحل

$= \int \frac{\text{ص}^2}{\text{س}} \times \text{س}\,\text{ءص}$

$= \int \text{ص}^2\,\text{ءص}$

$= \frac{\text{ص}^3}{3} + \text{ج} = \frac{1}{3}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^3 + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$

$\text{ءس} = \text{س}\,\text{ءص}$

㉖ $\int^{1} \text{س}^2\, \text{هـ}^{\text{س}^3+1}\, \text{ءس}$

الحل

$= \int^{2} \cancel{\text{س}^2}\, \text{هـ}^{\text{ص}}\, \frac{\text{ءص}}{3\cancel{\text{س}^2}}$

$= \frac{1}{3}\int_{1}^{2} \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$

$= \frac{1}{3}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\Big|_{1}^{2}$

$= \frac{1}{3}(\text{هـ}^2 - \text{هـ})$

$\text{ص} = \text{س}^3+1$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3\text{س}^2$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{3\text{س}^2}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 2$

㉗ $\int \text{جا}2\text{س}\ \text{هـ}^{\text{جتا}^2\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل

$= \int \cancel{\text{جا}2\text{س}}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\, \frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{جا}2\text{س}}}$

$= \int -\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$

$= -\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ج} = -\text{هـ}^{\text{جتا}^2\text{س}} + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{جتا}^2\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -2\,\text{جتاس}\ \text{جاس}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{جا}2\text{س}}$

㉘ $\int \text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{جتا}^2(\text{هـ}^{2\text{س}})\, \text{ءس}$

الحل

$= \int \cancel{\text{هـ}^{2\text{س}}}\ \text{جتا}^2\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{2\cancel{\text{هـ}^{2\text{س}}}}$

$= \int \frac{1}{2}\,\text{جتا}^2\text{ص}\,\text{ءص}$

$= \int \frac{1}{4}(1 + \text{جتا}2\text{ص})\,\text{ءص}$

$= \frac{1}{4}(\text{ص} + \frac{1}{2}\,\text{جا}2\text{ص}) + \text{ج}$

$= \frac{1}{4}(\text{هـ}^{2\text{س}} + \frac{1}{2}\,\text{جا}2\text{هـ}^{2\text{س}}) + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{2\text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{هـ}^{2\text{س}}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{2\text{هـ}^{2\text{س}}}$

㉙ $\int_{1}^{2} \frac{\text{ه}^{\frac{3}{\text{س}}}}{\text{س}^2}\,\text{د س}$ (كتاب)

الحل

$\text{ص} = \frac{3}{\text{س}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-3}{\text{س}^2}$

$\text{د س} = \frac{-\text{س}^2}{3}\,\text{د ص}$

$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 3$

$\text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = \frac{3}{2}$

$= \int_{3}^{\frac{3}{2}} \frac{\text{ه}^{\text{ص}}}{\cancel{\text{س}^2}} \times \frac{-\cancel{\text{س}^2}}{3}\,\text{د ص}$

$= \int_{3}^{\frac{3}{2}} \frac{-1}{3}\,\text{ه}^{\text{ص}}\,\text{د ص}$

$= \frac{-1}{3}\,\text{ه}^{\text{ص}} \Big|_{3}^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{-1}{3}\left(\text{ه}^{\frac{3}{2}} - \text{ه}^{3}\right)$

㉚ $\int \frac{\text{س}\,\text{ه}^{\text{س}^2}}{1+\text{ه}^{\text{س}^2}}\,\text{د س}$

الحل

$\text{ص} = \text{ه}^{\text{س}^2}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 2\text{س}\,\text{ه}^{\text{س}^2}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{2\text{س}\,\text{ه}^{\text{س}^2}}$

$= \int \frac{\cancel{\text{س}\,\text{ه}^{\text{س}^2}}}{1+\text{ص}}\;\frac{\text{د ص}}{2\cancel{\text{س}\,\text{ه}^{\text{س}^2}}}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\text{ص}+1}\,\text{د ص}$

$= \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{ه}}|1+\text{ص}| + \text{ج} = \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{ه}}|1+\text{ه}^{\text{س}^2}| + \text{ج}$

الجزء الثاني:
التكامل بالتعويض ثم الرجوع للفرض مرة أخرى

تستخدم هذه الحالة بعد الفرض والاختصار لكن يتبقى جزء من المتغير بعد الاختصار نرجع للفرض لاستبداله

مثال (٢) جد التكاملات الآتية

① $\int \text{س}^7 \sqrt{\text{س}^4 - 3}\,\text{د س}$ (كتاب)

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^4 - 3}$

$\text{ص}^2 = \text{س}^4 - 3$

$2\text{ص}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 4\text{س}^3$

$\text{د س} = \frac{2\text{ص}\,\text{د ص}}{4\text{س}^3}$

$= \int \text{س}^7\,\text{ص} \times \frac{\text{ص}}{2\text{س}^3}\,\text{د ص}$

$\text{س}^4 = \text{ص}^2 + 3$

$= \int \frac{1}{2}\,\text{س}^4\,\text{ص}^2\,\text{د ص}$

$= \int \frac{1}{2}\,\text{ص}^2\left(\text{ص}^2+3\right)\text{د ص}$

$= \int \left(\frac{1}{2}\,\text{ص}^4 + \frac{3}{2}\,\text{ص}^2\right)\text{د ص}$

$= \frac{1}{10}\,\text{ص}^5 + \frac{1}{2}\,\text{ص}^3 + \text{ج}$

$= \frac{1}{10}\left(\sqrt{\text{س}^4-3}\right)^5 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\text{س}^4-3}\right)^3 + \text{ج}$

② $\int \text{س}^2 \sqrt[3]{\text{س}^3 - 1}\,\text{د س}$

الحل

$\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}^3 - 1}$

$\text{ص}^3 = \text{س}^3 - 1$

$3\text{ص}^2\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 1$

$\text{د س} = 3\text{ص}^2\,\text{د ص}$

$\boxed{\text{س}^3 = \text{ص}^3 + 1}$

$\int \text{س}^2\,\text{ص} \times 3\text{ص}^2\,\text{د ص}$

$= \int \left(\text{ص}^3+1\right)^2 \times 3\text{ص}^3\,\text{د ص}$

$= \int \left(\text{ص}^6 + 2\text{ص}^3 + 1\right) \times 3\text{ص}^3\,\text{د ص}$

$= \int \left(3\text{ص}^9 + 6\text{ص}^6 + 3\text{ص}^3\right)\text{د ص}$

$= 3\,\frac{\text{ص}^{10}}{10} + 6\,\frac{\text{ص}^7}{7} + 3\,\frac{\text{ص}^4}{4} + \text{ج}$

$= \frac{3}{10}\left(\sqrt[3]{\text{س}^3-1}\right)^{10} + \frac{6}{7}\left(\sqrt[3]{\text{س}^3-1}\right)^{7} + \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\text{س}^3-1}\right)^{4} + \text{ج}$

③ $\int 2\text{س}^5 \left(\text{س}^3 + 5\right)^4 \text{د س}$ (كتاب)

الحل

$\text{ص} = \text{س}^3 + 5$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 3\text{س}^2$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{3\text{س}^2}$

$= \int 2\text{س}^5\,\text{ص}^4\,\frac{\text{د ص}}{3\text{س}^2}$

$= \int \frac{2}{3}\,\text{س}^3\,\text{ص}^4\,\text{د ص}$

$\boxed{\text{س}^3 = \text{ص} - 5}$

$= \int \frac{2}{3}\left(\text{ص} - 5\right)\text{ص}^4\,\text{د ص}$

$= \frac{2}{3}\int \left(\text{ص}^5 - 5\text{ص}^4\right)\text{د ص}$

$= \frac{2}{3}\left(\frac{\text{ص}^6}{6} - \text{ص}^5\right) + \text{ج}$

$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\left(\text{س}^3+5\right)^6 - \left(\text{س}^3+5\right)^5\right) + \text{ج}$

④ $\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{1-\sqrt{\text{س}}}}$

الحل $= \int \frac{-4\cancel{\text{ص}}\sqrt{\text{س}}}{\cancel{\text{ص}}}\ \text{د ص}$

$= \int -4\sqrt{\text{س}}\ \text{د ص}$

$= \int -4(1-\text{ص}^2)\ \text{د ص}$

$= -4(\text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{3}) + \text{جـ}$

$\text{ص} = \sqrt{1-\sqrt{\text{س}}}$

$\text{ص}^2 = 1-\sqrt{\text{س}}$

$2\text{ص}\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-1}{2\sqrt{\text{س}}}$

$\text{د س} = -4\text{ص}\sqrt{\text{س}}\ \text{د ص}$

$* \sqrt{\text{س}} = 1-\text{ص}^2$

$= -4\left(\sqrt{1-\sqrt{\text{س}}} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{1-\sqrt{\text{س}}}\right)^3\right) + \text{جـ}$

* يمكن فرض $\text{ص} = 1-\sqrt{\text{س}}$

⑤ $\int_0^4 \frac{\text{س}^3}{\sqrt{(\text{س}^2+9)^3}}$ (كتاب) +٢٠١٠ص

الحل $= \int_9^{25} \frac{\text{س}^3}{\sqrt{\text{ص}^3}}\ \frac{\text{د ص}}{2\text{س}}$

$= \int_9^{25} \frac{\text{س}^2}{2\sqrt{\text{ص}^3}}\ \text{د ص}$

$= \int_9^{25} \frac{\text{ص}-9}{2\text{ص}^{\frac{3}{2}}}\ \text{د ص}$

$\text{ص} = \text{س}^2+9$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 2\text{س}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{2\text{س}}$

$\text{س}^2 = \text{ص}-9$

$\text{س}=0 \rightarrow \text{ص}=9$

$\text{س}=4 \rightarrow \text{ص}=25$

$= \frac{1}{2}\int_9^{25} \left(\text{ص}^{-\frac{1}{2}} - 9\text{ص}^{-\frac{3}{2}}\right) \text{د ص}$

$= \frac{1}{2}\left(2\text{ص}^{\frac{1}{2}} - 9\times -2\text{ص}^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_9^{25}$

$= \sqrt{\text{ص}} + \frac{9}{\sqrt{\text{ص}}}\Big|_9^{25} = \frac{4}{5}$

⑥ $\int \text{س}^{14}(\text{س}^5+1)^7\ \text{د س}$

الحل $\text{ص} = \text{س}^5+1$ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 5\text{س}^4$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{5\text{س}^4}$ ، $\text{س}^5 = \text{ص}-1$

$\int \text{س}^{14}\ \text{ص}^7 \frac{\text{د ص}}{5\text{س}^4} = \int \frac{1}{5}\text{س}^{10}\ \text{ص}^7\ \text{د ص}$

$= \int \frac{1}{5}(\text{س}^5)^2\ \text{ص}^7\ \text{د ص}$

$= \int \frac{1}{5}\text{ص}^7(\text{ص}-1)^2\ \text{د ص}$

$= \int \frac{1}{5}\text{ص}^7(\text{ص}^2-2\text{ص}+1)\ \text{د ص}$

$= \int \frac{1}{5}(\text{ص}^9-2\text{ص}^8+\text{ص}^7)\ \text{د ص}$

$= \frac{1}{5}\left(\frac{\text{ص}^{10}}{10} - \frac{2\text{ص}^9}{9} + \frac{\text{ص}^8}{8}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{1}{5}\left(\frac{(\text{س}^5+1)^{10}}{10} - \frac{2(\text{س}^5+1)^9}{9} + \frac{(\text{س}^5+1)^8}{8}\right) + \text{جـ}$

⑦ $\int \text{قاس}\,(\text{قاس}+\text{ظاس})^4\ \text{د س}$

الحل

$= \int \frac{\text{قاس}\ \cancel{\text{ص}^4}\ \text{د ص}}{\cancel{\text{ص}}\ \cancel{\text{قاس}}}$

$= \int \text{ص}^3\ \text{د ص}$

$= \frac{\text{ص}^4}{4} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{قاس}+\text{ظاس}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قاس ظاس} + \text{قا}^2\text{س}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قاس}(\text{قاس}+\text{ظاس})$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{قاس}(\text{قاس}+\text{ظاس})}$

$= \frac{1}{4}(\text{قاس}+\text{ظاس})^4 + \text{جـ}$

⑧ $\int \frac{\sqrt{\text{ظتاس}}}{\text{جا}2\text{س}}\ \text{د س}$

$= \int \frac{\text{ص}}{2\text{جاس جتاس}} \times \frac{-2\text{ص}}{\text{قتا}^2\text{س}}\ \text{د ص}$

$= \int \frac{-\text{ص}^2}{\text{جتاس قتاس}}\ \text{د ص}$

$= \int \frac{-\text{ص}^2}{\text{ظتاس}}\ \text{د ص}$

$= \int \frac{-\text{ص}^2}{\text{ص}^2}\ \text{د ص}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{ظتاس}}$

$\text{ص}^2 = \text{ظتاس}$

$2\text{ص}\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\text{قتا}^2\text{س}$

$\text{د س} = \frac{-2\text{ص}}{\text{قتا}^2\text{س}}\ \text{د ص}$

$= \int -\text{د ص} = -\text{ص}+\text{جـ} = -\sqrt{\text{ظتاس}} + \text{جـ}$

⑨ $\int \frac{\sqrt[3]{\text{ظتاس}+3}}{2-2\text{جتا}^2\text{س}}\ \text{د س}$ (كتاب)

الحل

$= \int \frac{\text{ص}}{2\text{جا}^2\text{س}} \times \frac{-3\text{ص}^2}{\text{قتا}^2\text{س}}\ \text{د ص}$

$= \int \frac{-3}{2}\text{ص}^3\ \text{د ص}$

$= \frac{-3}{2}\ \frac{\text{ص}^4}{4} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \sqrt[3]{\text{ظتاس}+3}$

$\text{ص}^3 = \text{ظتاس}+3$

$3\text{ص}^2\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\text{قتا}^2\text{س}$

$\text{د س} = \frac{-3\text{ص}^2}{\text{قتا}^2\text{س}}\ \text{د ص}$

$= \frac{-3}{8}\left(\sqrt[3]{\text{ظتاس}+3}\right)^4 + \text{جـ}$

⑥ $\int \frac{\text{لوهـ ظاس}}{\text{جا٢س}}\,\text{ءس}$ (٢٠١٦ ص)

الحل ط١

$= \int \frac{\text{لوهـ ص}}{\text{٢جاس جتاس}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$= \int \frac{\text{لوهـ ص}}{\text{٢جاس جتاس}}\,\text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{ءص}$

$= \int \frac{\text{لوهـ ص}}{\text{٢ظاس}}\,\text{ءص} = \int \frac{\text{لوهـ ص}}{\text{٢ص}}\,\text{ءص}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$= \int \frac{\text{ع}}{\text{٢ص}}\,\text{ص}\,\text{ءع}$

$= \int \frac{١}{٢}\,\text{ع}\,\text{ءع}$

$\text{ع} = \text{لوهـ ص}$

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءص}} = \frac{١}{\text{ص}}$

$\text{ءص} = \text{ص}\,\text{ءع}$

$= \frac{١}{٤}\,\text{ع}^{٢} + \text{جـ} = \frac{١}{٤}\,(\text{لوهـ ص})^{٢} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٤}\,(\text{لوهـ ظاس})^{٢} + \text{جـ}$

ط٢

$= \int \frac{\text{ص}}{\text{٢جاس جتاس}}\,\frac{\text{ظاس}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءص}$

$= \int \frac{١}{٢}\,\text{ص}\,\text{ءص}$

$= \frac{١}{٤}\,\text{ص}^{٢} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{لوهـ ظاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظاس}}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ظاس}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$= \frac{١}{٤}\,(\text{لوهـ ظاس})^{٢} + \text{جـ}$

الجزء الثالث :

توحيد مقامات، تحليل، تحليل أسس
اخراج عامل مشترك، ثم تعويض

ملاحظة

في حالة اخراج العامل المشترك يجب الانتباه إلى الاقتران الآخر المجاور للقوس أو الجذر

① كثير حدود (العامل المشترك القوة الأصغر)
② نسبي (العامل المشترك القوة الأكبر)

مثال (٣) : جد التكاملات الآتية

① $\int \text{س}^{١٠}\left(\frac{٣}{\text{س}} - \frac{٥}{\text{س}^{٢}}\right)^{٥}\text{ءس}$

الحل $= \int \text{س}^{١٠}\left(\frac{\text{٣س} - ٥}{\text{س}^{٢}}\right)^{٥}\text{ءس}$

$= \int \cancel{\text{س}^{١٠}}\,\frac{(\text{٣س} - ٥)^{٥}}{\cancel{\text{س}^{١٠}}}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{٣س} - ٥)^{٥}\,\text{ءس} = \frac{(\text{٣س} - ٥)^{٦}}{١٨} + \text{جـ}$

② $\int \sqrt[٣]{\text{س}^{-\frac{٣}{٤}} + ١}\;\text{ءس}$ (كتاب)

الحل $\int \sqrt[٣]{\frac{١}{\text{س}^{\frac{٣}{٤}}} + ١}\;\text{ءس} = \int \sqrt[٣]{\frac{١ + \text{س}^{\frac{٣}{٤}}}{\text{س}^{\frac{٣}{٤}}}}\;\text{ءس}$

$= \int \frac{\sqrt[٣]{١ + \text{س}^{\frac{٣}{٤}}}}{\text{س}^{\frac{١}{٤}}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{٤ص}^{٣}\,\cancel{\text{س}^{\frac{١}{٤}}}}{\cancel{\text{س}^{\frac{١}{٤}}}}\,\text{ءص}$

$= \int \text{٤ص}^{٣}\,\text{ءص}$

$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}^{\frac{٣}{٤}} + ١}$

$\text{ص}^{٣} = \text{س}^{\frac{٣}{٤}} + ١$

$\text{٣ص}^{٢}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣}{٤}\,\text{س}^{-\frac{١}{٤}}$

$\text{ءس} = \text{٤ص}^{٢}\,\text{س}^{\frac{١}{٤}}\,\text{ءص}$

$= \text{ص}^{٤} + \text{جـ} = \left(\sqrt[٣]{\text{س}^{\frac{٣}{٤}} + ١}\right)^{٤} + \text{جـ}$

③ $\int (\text{٧س}^{٥} - \text{٢س})^{٣}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل $= \int (\text{س}(\text{٧س}^{٤} - ٢))^{٣}\,\text{ءس}$

$= \int \text{س}^{٣}(\text{٧س}^{٤} - ٢)^{٣}\,\text{ءس}$

$= \int \text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٣}\,\frac{\text{ءص}}{\text{٢٨س}^{٣}}$

$= \int \frac{١}{٢٨}\,\text{ص}^{٣}\,\text{ءص}$

$\text{ص} = \text{٧س}^{٤} - ٢$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢٨س}^{٣}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢٨س}^{٣}}$

$= \frac{١}{٢٨}\,\frac{\text{ص}^{٤}}{٤} + \text{جـ} = \frac{١}{١١٢}\,(\text{٧س}^{٤} - ٢)^{٤} + \text{جـ}$

④ $\int \sqrt[٣]{\text{٤س}^{٥} + \text{٢س}^{٣}}\;\text{ءس}$ (كتاب)

الحل $\int \sqrt[٣]{\text{س}^{٣}(\text{٤س}^{٢} + ٢)}\;\text{ءس}$

$= \int \text{س}\,\sqrt[٣]{\text{٤س}^{٢} + ٢}\;\text{ءس}$

$= \int \text{س}\,\text{ص} \times \frac{\text{٣ص}^{٢}}{\text{٨س}}\,\text{ءص}$

$= \int \frac{٣}{٨}\,\text{ص}^{٣}\,\text{ءص} = \frac{٣}{٣٢}\,\text{ص}^{٤} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{٤س}^{٢} + ٢}$

$\text{ص}^{٣} = \text{٤س}^{٢} + ٢$

$\text{٣ص}^{٢}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٨س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{٣ص}^{٢}}{\text{٨س}}\,\text{ءص}$

$= \frac{٣}{٣٢}\left(\sqrt[٣]{\text{٤س}^{٢} + ٢}\right)^{٤} + \text{جـ}$

⑤ $\int \text{س}\,(\text{س}^{٢}-٤\text{س}+٤)^{٥}\,\text{دس}$

الحل $= \int \text{س}\,((\text{س}-٢)^{٢})^{٥}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}\,(\text{س}-٢)^{١٠}\,\text{دس}$ | $\text{ص}=\text{س}-٢$

$= \int (\text{ص}+٢)\,\text{ص}^{١٠}\,\text{دص}$ | $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=١$

$= \int (\text{ص}^{١١}+٢\text{ص}^{١٠})\,\text{دص}$ | $\text{دس}=\text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{١٢}}{١٢}+\frac{٢\text{ص}^{١١}}{١١}+\text{جـ}$ | $\text{س}=\text{ص}+٢$

$= \frac{١}{١٢}(\text{س}-٢)^{١٢}+\frac{٢}{١١}(\text{س}-٢)^{١١}+\text{جـ}$

---

⑥ $\int \text{س}^{٢}\sqrt[٣]{\text{س}^{٧}-٥\text{س}^{٣}}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل $= \int \text{س}^{٢}\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}(\text{س}^{٤}-٥)}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}^{٣}\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}-٥}\,\text{دس}$ | $\text{ص}=\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}-٥}$

$= \int \text{س}^{٣}\,\text{ص}\,\frac{٣\text{ص}^{٢}}{٤\text{س}^{٣}}\,\text{دص}$ | $\text{ص}^{٣}=\text{س}^{٤}-٥$

$= \int \frac{٣}{٤}\text{ص}^{٣}\,\text{دص}$ | $٣\text{ص}^{٢}\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=٤\text{س}^{٣}$

$= \frac{٣}{١٦}\text{ص}^{٤}+\text{جـ}$ | $\text{دس}=\frac{٣\text{ص}^{٢}}{٤\text{س}^{٣}}\,\text{دص}$

$= \frac{٣}{١٦}\left(\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}-٥}\right)^{٤}+\text{جـ}$

---

⑦ $\int \frac{\text{س}^{٣}}{(\text{س}+١)^{٥}}\,\text{دس}$ كتاب

الحل $= \int \frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٥}(١+\frac{١}{\text{س}})^{٥}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{١}{\text{س}^{٢}(١+\frac{١}{\text{س}})^{٥}}\,\text{دس}$ | $\text{ص}=١+\frac{١}{\text{س}}$

$= \int \frac{-\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٥}}\,\text{دص}$ | $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$

$= -\int \text{ص}^{-٥}\,\text{دص}$ | $\text{دس}=-\text{س}^{٢}\,\text{دص}$

$= -\frac{\text{ص}^{-٤}}{-٤}+\text{جـ} = \frac{١}{٤\,\text{ص}^{٤}}+\text{جـ}$

$= \frac{١}{٤(١+\frac{١}{\text{س}})^{٤}}+\text{جـ}$

---

⑧ $\int \frac{١}{\text{س}^{١٠}+\text{س}}\,\text{دس}$

الحل $= \int \frac{١}{\text{س}^{١٠}(١+\text{س}^{-٩})}\,\text{دس}$

$= \int \frac{-\text{س}^{١٠}}{٩\text{س}^{١٠}\,\text{ص}}\,\text{دص}$ | $\text{ص}=١+\text{س}^{-٩}$

$= \int \frac{-١}{٩\text{ص}}\,\text{دص}$ | $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=-٩\text{س}^{-١٠}$

$= \frac{-١}{٩}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}|+\text{جـ}$ | $\text{دس}=\frac{-\text{س}^{١٠}}{٩}\,\text{دص}$

$= \frac{-١}{٩}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|١+\text{س}^{-٩}|+\text{جـ}$

---

⑨ $\int_{١}^{٢} \text{س}^{٤}\sqrt{\left(\frac{٢-\text{س}}{\text{س}^{٢}}\right)^{٣}}\,\text{دس}$ (كتاب)
(٢٠١٧ ش)

الحل $\int_{١}^{٢} \text{س}^{٤}\sqrt{\frac{(٢-\text{س})^{٣}}{\text{س}^{٦}}}\,\text{دس}$

$= \int_{١}^{٢} \frac{\text{س}^{٤}}{|\text{س}^{٣}|}(٢-\text{س})^{٣/٢}\,\text{دس}$

$|\text{س}^{٣}|$ $\quad -\text{س}^{٣}\;\; - \;\; + \;\; \boxed{\text{س}^{٣}}$ $\quad ٠ \quad ① \quad ②$

$= \int_{١}^{٢} \text{س}\,(٢-\text{س})^{٣/٢}\,\text{دس}$ (٢٠١٧ ش)

$= -\int_{١}^{٠} (٢-\text{ص})\,\text{ص}^{٣/٢}\,\text{دص}$ | $\text{ص}=٢-\text{س}$

| $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=-١$

$= \int_{٠}^{١} (٢\text{ص}^{٣/٢}-\text{ص}^{٥/٢})\,\text{دص}$ | $\text{دس}=-\text{دص}$

$= \frac{٤}{٥}\text{ص}^{٥/٢}-\frac{٢}{٧}\text{ص}^{٧/٢}\Big|_{٠}^{١}$ | $\text{س}=١ \rightarrow \text{ص}=١$ ، $\text{س}=٢ \rightarrow \text{ص}=٠$

| $\text{س}=٢-\text{ص}$

$= \frac{٤}{٥}\sqrt{\text{ص}^{٥}}-\frac{٢}{٧}\sqrt{\text{ص}^{٧}}\Big|_{٠}^{١} = \frac{١٨}{٣٥}$

---

⑩ $\int \frac{\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{س}^{٤}}}{\text{س}^{٥}}\,\text{دس}$

الحل $\int \frac{\sqrt{\text{س}^{٤}(\text{س}^{-٢}-١)}}{\text{س}^{٥}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{-٢}-١}}{\text{س}^{٥}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\sqrt{\text{س}^{-٢}-١}}{\text{س}^{٣}}\,\text{دس}$ | $\text{ص}=\sqrt{\text{س}^{-٢}-١}$

$= \int \frac{-\text{ص}^{٢}\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٣}}\,\text{دص}$ | $\text{ص}^{٢}=\text{س}^{-٢}-١$

$= -\int \text{ص}^{٢}\,\text{دص}$ | $٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=-٢\text{س}^{-٣}$

$= \frac{-١}{٣}\text{ص}^{٣}+\text{جـ}$ | $\text{دس}=-\text{ص}\,\text{س}^{٣}\,\text{دص}$

$= \frac{-١}{٣}\left(\sqrt{\text{س}^{-٢}-١}\right)^{٣}+\text{جـ}$

⑪ $\int_{١}^{٢} \frac{(\text{س}+١)^{٥}}{\text{س}^{٧}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل $= \int_{١}^{٢} \frac{\text{س}^{٥}(١+\frac{١}{\text{س}})^{٥}}{\text{س}^{٧}}\,\text{ءس}$

$= \int_{١}^{٢} \frac{(١+\frac{١}{\text{س}})^{٥}}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

$= \int_{٢}^{\frac{٣}{٢}} \frac{-\text{ص}^{٥}}{\text{س}^{٢}}\,\text{س}^{٢}\,\text{ءص}$

$= \int_{٢}^{\frac{٣}{٢}} -\text{ص}^{٥}\,\text{ءص}$

$= -\frac{\text{ص}^{٦}}{٦}\Big|_{٢}^{\frac{٣}{٢}}$

$= \frac{-١}{٦}\left(\frac{٧٢٩}{٦٤} - ٦٤\right)$

$= \frac{٦٤}{٦} - \frac{٢٤٣}{١٢٨} = \frac{٣٣٦٧}{٢٥٦}$

$\text{ص} = ١ + \frac{١}{\text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$

$\text{ءس} = -\text{س}^{٢}\,\text{ءص}$

$\text{س} = ١ \leftarrow \text{ص} = ٢$

$\text{س} = ٢ \leftarrow \text{ص} = \frac{٣}{٢}$

⑫ $\int_{١}^{٣} \frac{(\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩)^{\frac{٧}{٢}}}{\text{س}^{٩}}\,\text{ءس}$ (٢٠١٧ ص)

الحل $= \int_{١}^{٣} \frac{\sqrt{((\text{س}-٣)^{٢})}^{\,٧}}{\text{س}^{٩}}\,\text{ءس}$

$= \int_{١}^{٣} \frac{\left(\sqrt{(\text{س}-٣)^{٢}}\right)^{٧}}{\text{س}^{٩}}\,\text{ءس} = \int_{١}^{٣} \frac{(|\text{س}-٣|)^{٧}}{\text{س}^{٩}}\,\text{ءس}$

$= \int_{١}^{٣} \frac{-(\text{س}-٣)^{٧}}{\text{س}^{٩}}\,\text{ءس} = \int_{١}^{٣} \frac{-\text{س}^{٧}(١-\frac{٣}{\text{س}})^{٧}}{\text{س}^{٩}}\,\text{ءس}$

$= -\int_{١}^{٣} \frac{(١-\frac{٣}{\text{س}})^{٧}}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

$= \int_{-٢}^{٠} \frac{-\text{ص}^{٧}}{\text{س}^{٢}}\,\frac{\text{س}^{٢}}{٣}\,\text{ءص}$

$= \int_{-٢}^{٠} \frac{-١}{٣}\,\text{ص}^{٧}\,\text{ءص}$

$= \frac{-١}{٢٤}\,\text{ص}^{٨}\Big|_{-٢}^{٠} = \frac{٣٢}{٣}$

$\text{ص} = ١ - \frac{٣}{\text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣}{\text{س}^{٢}}$

$\text{ءس} = \frac{\text{س}^{٢}}{٣}\,\text{ءص}$

$\text{س} = ١ \leftarrow \text{ص} = -٢$

$\text{س} = ٣ \leftarrow \text{ص} = ٠$

⑬ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جتاس} - \text{جتا}^{٣}\text{س}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جتاس}\,(١ - \text{جتا}^{٢}\text{س})}\,\text{ءس}$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} |\text{جاس}|\,\sqrt{\text{جتاس}}\,\text{ءس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس}\,\sqrt{\text{جتاس}}\,\text{ءس}$

$= \int_{١}^{٠} -\text{جاس}\,\frac{٢\text{ص}}{\text{جاس}}\,\text{ءص}$

$= \int_{٠}^{١} ٢\text{ص}^{٢}\,\text{ءص}$

$= \frac{٢}{٣}\,\text{ص}^{٣}\Big|_{٠}^{١}$

$= \frac{٢}{٣}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{جتاس}}$

$\text{ص}^{٢} = \text{جتاس}$

$٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس}$

$\text{ءس} = \frac{-٢\text{ص}}{\text{جاس}}\,\text{ءص}$

$\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = ١$

$\text{س} = \frac{\pi}{٢} \leftarrow \text{ص} = ٠$

⑭ $\int \text{هـ}^{(\text{س} + ٣\text{هـ}^{\text{س}})}$ (٢٠٠٧ ش)

الحل $= \int \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{٣\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{ءس}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\frac{\text{ءص}}{٣\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$

$= \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{(٣\text{هـ}^{\text{س}})} + \text{جـ}$

$\text{ص} = ٣\text{هـ}^{\text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٣\text{هـ}^{\text{س}}}$

الجزء الرابع :
تكامل الاقترانات المثلثية بالتعويض

الرياضيات أم العلوم

النوع الأول :

① ∫ جا^{ن}س ءس ② ∫ جتا^{ن}س ءس

حيث (ن) عدد صحيح فردي موجب

① ∫ جا^{ن}س ءس

* نبقي جاس ← ∫ جاس جا$^{(ن-١)}$س ← زوجي
* استخرج جا^{٢}س من جا$^{(ن-١)}$س ← (جا^{٢}س)$^{(\frac{ن-١}{٢})}$
* استبدل جا^{٢}س = ١ - جتا^{٢}س
* ص = جتاس

② ∫ جتا^{ن}س ءس

* نبقي جتاس ← ∫ جتاس جتا$^{(ن-١)}$س ← زوجي
* استخرج جتا^{٢}س من جتا$^{(ن-١)}$س ← (جتا^{٢}س)$^{(\frac{ن-١}{٢})}$
* استبدل جتا^{٢}س = ١ - جا^{٢}س
* ص = جاس

النوع الثاني

يحل دون فرض

① ∫ جا^{ن}س ءس ② ∫ جتا^{ن}س ءس

حيث (ن) عدد صحيح زوجي موجب

① ∫ جا^{ن}س ءس

* استخرج جا^{٢}س من جا^{ن}س ← (جا^{٢}س)$^{(\frac{ن}{٢})}$
* استبدل جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$(١ - جتا٢س)

② ∫ جتا^{ن}س ءس

* استخرج جتا^{٢}س من جتا^{ن}س ← (جتا^{٢}س)$^{\frac{ن}{٢}}$
* استبدل جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$(١ + جتا٢س)

النوع الثالث

∫ جا^{م}س جتا^{ن}س ءس

يوجد (٣) حالات

حالة (١)

م ، ن عدد فردي موجب

* نفرض ص = جاس أو ص = جتاس

$\boxed{\text{ص = جاس}}$ مشتقة جاس = جتاس

* بعد اختصار جتاس تصبح جتا$^{(ن-١)}$س ← زوجي
* نستخرج جتا^{٢}س من جتا$^{(ن-١)}$س ← (جتا^{٢}س)$^{(\frac{ن-١}{٢})}$

نستبدل جتا^{٢}س = (١ - جا^{٢}س)

* نستبدل جاس = ص

في حال فرض $\boxed{\text{ص = جتاس}}$ من البداية

مشتقة جتاس = - جاس

* بعد اختصار جاس تصبح جاس ← (ن-١) زوجي
* نستخرج جا^{٢}س من جا$^{(ن-١)}$س ← (جا^{٢}س)$^{(\frac{ن-١}{٢})}$
* نستبدل جا^{٢}س = ١ - جتا^{٢}س
* نستبدل جتاس = ص

حالة (٢)

م ، ن احدهما زوجي والآخر فردي

نفرض ص صاحب الأس الزوجي

[أ] ∫ جا^{م}س جتا^{ن}س ءس م (زوجي) ، ن (فردي)

* ص = جاس
* بعد الاختصار تصبح جتاس ← (ن-١) زوجي
* أكمل مثل حالة ① $\boxed{\text{ص = جاس}}$

[ب] ∫ جا^{م}س جتا^{ن}س ءس م (فردي) ، ن (زوجي)

* ص = جتاس
* بعد الاختصار يصبح جاس ← (م-١) زوجي
* أكمل مثل حالة (١) $\boxed{\text{ص = جتاس}}$

حالة (٣)

م ، ن عدد زوجي موجب

[أ] في حالة م = ن

* ∫(جاس جتاس)^{م} ءس = ∫($\frac{١}{٢}$ جا٢س)^{م}

* نستخرج جا^{٢}٢س من جا^{م}٢س ← (جا^{٢}٢س)$^{\frac{م}{٢}}$

* نستبدل جا^{٢}٢س = $\frac{١}{٢}$(١ - جتا٤س)

[ب] في حالة م ≠ ن

* نبقي جا^{٢}س جتا^{٢}س (جاس جتاس)^{٢}

* استبدل جاس جتاس = $\frac{١}{٢}$ جا٢س

* استبدل من الباقي ← جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$(١ - جتا٢س)

جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$(١ + جتا٢س)

* نقوم بعمل الضرب ثم نفصل التكامل

* إجراء كل تكامل بشكل منفرد

النوع الرابع

① ∫ قا^{ن}س ءس ، ② ∫ قتا^{ن}س ءس

حيث ن عدد زوجي موجب

① ∫ قا^{ن}س ءس

* نبقي قا^{٢}س من قا^{ن}س ← قا$^{ن-٢}$س قا^{٢}س

* استبدل قا$^{ن-٢}$س من قاس ← (قا^{٢}س)$^{(\frac{ن-٢}{٢})}$

* استبدل قا^{٢}س = ١ + ظا^{٢}س

* ص = ظاس

② ∫ قتا^{ن}س ءس

اتبع خطوات ∫ قا^{ن}س ءس

مع مراعاة قتا^{٢}س ، ظتا^{٢}س

و متطابقة قتا^{٢}س = ١ + ظتا^{٢}س

ص = ظتاس

النوع الخامس

∫ قا^{م}س ظا^{ن}س ءس

حالة (١) م ، ن عدد فردي موجب

* نبقي قاس ظاس

* اجعل الباقي بدلالة قاس

مستخدماً ظا^{٢}س = قا^{٢}س - ١ إذا لزم الأمر

* نفرض ص = قاس

حالة (٢)

م ، ن ، أحدهما زوجي والآخر فردي

① نفس حالة (١)

② في حال قا^{م} زوجي يمكن جعل قا^{٢}س مع ظا^{ن}س

ونستبدل قا^{٢}س = ظا^{٢}س + ١

ثم نفرض ص = ظاس

حالة (٣)

م ، ن ، حيث م ، ن عدد زوجي موجب

* من قا^{م}س استثني قا^{٢}س

* استبدل قا^{٢}س = ظا^{٢}س + ١

* نفرض ص = ظاس

النوع السادس :

∫ قتا^{م}س ظتا^{ن}س ءس

نفس النوع الخامس مع مراعاة .

متطابقة قتا^{٢}س = ظتا^{٢}س + ١

ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س - ١

مثال (٤) جد التكاملات الآتية

① $\int \text{جتا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$

الحل $= \int \frac{1}{2}(1+\text{جتا}2\text{س})\,\text{دس}$

$= \frac{1}{2}(\text{س} + \frac{1}{2}\text{جا}2\text{س}) + \text{جـ}$

② $\int \text{جا}^{4}\text{س}\ \text{دس}$

الحل $= \int (\text{جا}^{2}\text{س})^{2}\,\text{دس}$

$= \int \left(\frac{1}{2}(1-\text{جتا}2\text{س})\right)^{2}\text{دس}$

$= \int \frac{1}{4}(1-2\text{جتا}2\text{س}+\text{جتا}^{2}2\text{س})\,\text{دس}$

$= \int \frac{1}{4}\left(1-2\text{جتا}2\text{س}+\frac{1}{2}(1+\text{جتا}4\text{س})\right)\text{دس}$

$= \frac{1}{4}(\text{س} - \text{جا}2\text{س} + \frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{8}\text{جا}4\text{س}) + \text{جـ}$

$= \frac{3}{8}\text{س} - \frac{1}{4}\text{جا}2\text{س} + \frac{1}{32}\text{جا}4\text{س} + \text{جـ}$

③ $\int \text{جا}^{3}\text{س}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل $\int \text{جاس}\ \text{جا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \text{جاس}\,(1-\text{جتا}^{2}\text{س})\,\text{دس}$

$= \int \cancel{\text{جاس}}\,(1-\text{ص}^{2}) \times \frac{-\text{دص}}{\cancel{\text{جاس}}}$

$= \int (\text{ص}^{2}-1)\,\text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{3}}{3} - \text{ص} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{3}\text{جتا}^{3}\text{س} - \text{جتاس} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جاس}$

$\text{دس} = \frac{-\text{دص}}{\text{جاس}}$

④ $\int \text{جتا}^{3}\text{س}\ \text{دس}$

الحل $= \int \text{جتاس}\ \text{جتا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \text{جتاس}\,(1-\text{جا}^{2}\text{س})\,\text{دس}$

$= \int \cancel{\text{جتاس}}\,(1-\text{ص}^{2})\,\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int (1-\text{ص}^{2})\,\text{دص}$

$= \text{ص} - \frac{\text{ص}^{3}}{3} + \text{جـ}$

$= \text{جاس} - \frac{1}{3}\text{جا}^{3}\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

⑤ $\int \text{جتا}^{5}\text{س}\ \text{دس}$

الحل $= \int \text{جتاس}\ \text{جتا}^{4}\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \text{جتاس}\,(\text{جتا}^{2}\text{س})^{2}\text{دس} = \int \text{جتاس}\,(1-\text{جا}^{2}\text{س})^{2}\text{دس}$

$= \int \cancel{\text{جتاس}}\,(1-\ ^{2})^{2}\,\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int (1-2\text{ص}^{2}+\text{ص}^{4})\,\text{دص}$

$= \text{ص} - \frac{2\text{ص}^{3}}{3} + \frac{\text{ص}^{5}}{5} + \text{جـ}$

$= \text{جاس} - \frac{2}{3}\text{جا}^{3}\text{س} + \frac{1}{5}\text{جا}^{5}\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

⑥ $\int \text{جا}^{3}\text{س}\ \text{جتا}^{3}\text{س}\ \text{دس}$ (ح.٤ ش)

الحل $\int \text{ص}^{3}\,\text{جتا}^{3}\text{س}\,\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$= \int \text{ص}^{3}\,\text{جتا}^{2}\text{س}\ \text{دص}$

$= \int \text{ص}^{3}(1-\text{جا}^{2}\text{س})\,\text{دص}$

$= \int \text{ص}^{3}(1-\text{ص}^{2})\,\text{دص}$

$= \int (\text{ص}^{3}-\text{ص}^{5})\,\text{دص} = \frac{\text{ص}^{4}}{4} - \frac{\text{ص}^{6}}{6} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{4}\text{جا}^{4}\text{س} - \frac{1}{6}\text{جا}^{6}\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

حل٢ نفرض $\text{ص} = \text{جتاس}$

⑦ $\int \text{جا}^{3}2\text{س}\ \text{جتا}^{5}2\text{س}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل $\int \text{جا}^{3}2\text{س}\ \text{ص}^{5}\,\frac{\text{دص}}{-2\text{جا}2\text{س}}$

$= \int \frac{-1}{2}\text{ص}^{5}\,\text{جا}^{2}2\text{س}\ \text{دص}$

$= \int \frac{-1}{2}\text{ص}^{5}(1-\text{جتا}^{2}2\text{س})\,\text{دص}$

$= \int \frac{-1}{2}\text{ص}^{5}(1-\text{ص}^{2})\,\text{دص}$

$= \int \frac{-1}{2}\text{ص}^{5} + \frac{1}{2}\text{ص}^{7}\ \text{دص}$

$= \frac{-1}{12}\text{ص}^{6} + \frac{1}{16}\text{ص}^{8} + \text{جـ}$

$= \frac{-1}{12}\text{جتا}^{6}2\text{س} + \frac{1}{16}\text{جتا}^{8}2\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{جتا}2\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -2\text{جا}2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-2\text{جا}2\text{س}}$

⑧ $\int \text{جا}^{٣}\text{س}\ \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

الحل $= \int \text{جا}^{٣}\text{س}\ \text{ص}^{٢}\ \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$= \int -\text{ص}^{٢}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{دص}$

$= \int -\text{ص}^{٢}\ (١ - \text{جتا}^{٢}\text{س})\ \text{دص}$

$= \int -\text{ص}^{٢}(١ - \text{ص}^{٢})\ \text{دص}$

$= \int -\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٤}\ \text{دص}$

$= \frac{-١}{٣}\text{ص}^{٣} + \frac{١}{٥}\text{ص}^{٥} + \text{جـ}$

$= \frac{-١}{٣}\text{جتا}^{٣}\text{س} + \frac{١}{٥}\text{جتا}^{٥}\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

⑨ $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{قتا}^{٥}\text{٢س}}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل $= \int \text{جتا٢س}\ \text{جا}^{٥}\text{٢س}\ \text{دس}$

$= \int \cancel{\text{جتا٢س}}\ \text{ص}^{٥}\ \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{٢جتا٢س}}}$

$= \int \frac{١}{٢}\text{ص}^{٥}\ \text{دص}$

$= \frac{١}{١٢}\text{ص}^{٦} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{١٢}\text{جا}^{٦}\text{٢س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{جا٢س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢جتا٢س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٢جتا٢س}}$

⑩ $\int \frac{\text{دس}}{\text{قا}^{٣}\text{س}\ \text{قتا}^{٢}\text{س}}$

الحل $= \int \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \text{ص}^{٢}\ \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$= \int \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{ص}^{٢}\ \text{دص}$

$= \int (١ - \text{جا}^{٢}\text{س})\ \text{ص}^{٢}\ \text{دص}$

$= \int (١ - \text{ص}^{٢})\ \text{ص}^{٢}\ \text{دص}$

$= \int (\text{ص}^{٢} - \text{ص}^{٤})\ \text{دص}$

$= \frac{١}{٣}\text{ص}^{٣} - \frac{١}{٥}\text{ص}^{٥} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٣}\text{جا}^{٣}\text{س} - \frac{١}{٥}\text{جا}^{٥}\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

⑪ $\int \text{جا}^{٤}\text{٥س}\ \text{جتا}^{٣}\text{٥س}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل

$\int \text{ص}^{٤}\ \text{جتا}^{٣}\text{٥س}\ \frac{\text{دص}}{\text{٥جتا٥س}}$

$= \int \frac{١}{٥}\text{ص}^{٤}\ \text{جتا}^{٢}\text{٥س}\ \text{دص}$

$= \int \frac{١}{٥}\text{ص}^{٤}\ (١ - \text{جا}^{٢}\text{٥س})\ \text{دص}$

$= \int \frac{١}{٥}\text{ص}^{٤}\ (١ - \text{ص}^{٢})\ \text{دص}$

$= \int \frac{١}{٥}\text{ص}^{٤} - \frac{١}{٥}\text{ص}^{٦}\ \text{دص}$

$= \frac{١}{٢٥}\text{ص}^{٥} - \frac{١}{٣٥}\text{ص}^{٧} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٢٥}\text{جا}^{٥}\text{٥س} - \frac{١}{٣٥}\text{جا}^{٧}\text{٥س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{جا٥س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٥جتا٥س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٥جتا٥س}}$

⑫ $\int \frac{\text{جا}^{٥}\text{س}}{\sqrt{\text{جتاس}}}\ \text{دس}$

الحل

$\int \frac{\text{جا}^{٥}\text{س}}{\cancel{\text{ص}}}\ \frac{\text{٢}\cancel{\text{ص}}}{\cancel{-\text{جاس}}}\ \text{دص}$

$= \int -٢\ \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{دص}$

$= \int -٢\ (\text{جا}^{٢}\text{س})^{٢}\ \text{دص}$

$= \int -٢\ (١ - \text{جتا}^{٢}\text{س})^{٢}\ \text{دص}$

$= \int -٢\ (١ - \text{ص}^{٤})^{٢}\ \text{دص}$

$= \int -٢\ (١ - ٢\text{ص}^{٤} + \text{ص}^{٨})\ \text{دص}$

$= -٢\left(\text{ص} - \frac{٢}{٥}\text{ص}^{٥} + \frac{١}{٩}\text{ص}^{٩}\right) + \text{جـ}$

$= -٢\left(\text{جتاس} - \frac{٢}{٥}\text{جتا}^{٥}\text{س} + \frac{١}{٩}\text{جتا}^{٩}\text{س}\right) + \text{جـ}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{جتاس}}$

$\text{ص}^{٢} = \text{جتاس}$

$\text{٢ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{٢ص دص}}{-\text{جاس}}$

⑬ $\int \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{جتا}^{٤}\text{س}\ \text{دس}$

الحل $\int (\text{جاس جتاس})^{٤}\ \text{دس} = \int \left(\frac{١}{٢}\text{جا٢س}\right)^{٤}\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{١٦}\ \text{جا}^{٤}\text{٢س}\ \text{دس} = \int \frac{١}{١٦}\ (\text{جا}^{٢}\text{٢س})^{٢}\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{١٦}\left(\frac{١}{٢}(١ - \text{جتا٤س})\right)^{٢}\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{٦٤}\ (١ - \text{٢جتا٤س} + \text{جتا}^{٢}\text{٤س})\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{٦٤}\ (١ - \text{٢جتا٤س} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\text{جتا٨س})\ \text{دس}$

$= \frac{١}{٦٤}\left(\text{س} - \frac{١}{٢}\text{جا٤س} + \frac{١}{٢}\text{س} + \frac{١}{١٦}\text{جا٨س}\right) + \text{جـ}$

⑭ $\int \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$ (الكتاب)

الحل $= \int \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int (\text{جتاس جاس})^{٢}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{١}{٤}\text{جا}^{٢}\text{٢س}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{١}{٤}\text{جا}^{٢}\text{٢س} \times \frac{١}{٢}(\text{١} - \text{جتا٢س})\ \text{ءس}$

$= \int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\text{٢س} - \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\text{٢س}\ \text{جتا٢س}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\text{٢س}\ \text{ءس} - \int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\text{٢س}\ \text{جتا٢س}\ \text{ءس}$

$\boxed{\text{أ}}$ $\boxed{\text{ب}}$

$\text{أ} = \int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\text{٢س}\ \text{ءس} = \int \frac{١}{١٦}(\text{١} - \text{جتا٤س})\ \text{ءس}$

$= \frac{١}{١٦}(\text{س} - \frac{١}{٤}\text{جا٤س}) + \text{جـ}$

$\text{ب} = \int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\text{٢س}\ \text{جتا٢س}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{١}{٨}\text{ص}^{٢}\ \cancel{\text{جتا٢س}}\ \frac{\text{ءص}}{\text{٢}\cancel{\text{جتا٢س}}}$

$= \int \frac{١}{١٦}\text{ص}^{٢}\ \text{ءص}$

$= \frac{١}{٤٨}\text{ص}^{٣} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٤٨}\text{جا}^{٣}\text{٢س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{جا٢س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢جتا٢س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢جتا٢س}}$

$\text{أ} - \text{ب} = \frac{١}{١٦}(\text{س} - \frac{١}{٤}\text{جا٤س}) - \frac{١}{٤٨}\text{جا}^{٣}\text{٢س} + \text{جـ}$

⑮ $\int \text{ظا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$

الحل $= \int \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int \text{ظا}^{٢}\text{س}\ (\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{١})\ \text{ءس}$

$= \int (\text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س})\ \text{ءس}$

$= \int \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس} - \int \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$

$\boxed{\text{أ}}$ $\boxed{\text{ب}}$

$\text{أ} = \int \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int \text{ص}^{٢}\ \cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}$

$= \int \text{ص}^{٢}\ \text{ءص} = \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٣}\text{ظا}^{٣}\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$\text{ب} = \int \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس} = \int (\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{١})\ \text{ءس}$

$= \text{ظاس} - \text{س} + \text{جـ}$

$\text{أ} - \text{ب} = \frac{١}{٣}\text{ظا}^{٣}\text{س} - \text{ظاس} + \text{س} + \text{جـ}$

⑯ $\int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ظا}^{٣}\text{س}\ \text{ءس}$

الحل $\int \text{قاس ظاس}\ \text{قاس}\ \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int \text{قاس ظاس}\ (\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{١})\ \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int \cancel{\text{قاس ظاس}}\ \text{ص}(\text{ص}^{٢} - \text{١})\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قاس ظاس}}}$

$= \int \text{ص}^{٣} - \text{ص}\ \text{ءص}$

$= \frac{\text{ص}^{٤}}{٤} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٤}\text{قا}^{٤}\text{س} - \frac{١}{٢}\text{قا}^{٢}\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{قاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قاس ظاس}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قاس ظاس}}$

⑰ $\int \text{ظا}^{٥}\text{٣س}\ \text{قا}^{٢}\text{٣س}$ (الكتاب)

الحل $= \int \text{قا٣س ظا٣س}\ \text{ظا}^{٤}\text{٣س}\ \text{قا٣س}\ \text{ءس}$

$= \int \text{قا٣س ظا٣س}\ (\text{ظا}^{٢}\text{٣س})^{٢}\ \text{قا٣س}\ \text{ءس}$

$= \int \text{قا٣س ظا٣س}\ (\text{قا}^{٢}\text{٣س} - \text{١})^{٢}\ \text{قا٣س}\ \text{ءس}$

$= \int \cancel{\text{قا٣س ظا٣س}}\ \text{ص}(\text{ص}^{٢} - \text{١})^{٢}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{٣قا٣س ظا٣س}}}$

$= \int \frac{١}{٣}\text{ص}(\text{ص}^{٤} - \text{٢ص}^{٢} + \text{١})\ \text{ءص}$

$= \int (\frac{١}{٣}\text{ص}^{٥} - \frac{٢}{٣}\text{ص}^{٣} + \frac{١}{٣}\text{ص})\ \text{ءص}$

$= \frac{١}{١٨}\text{ص}^{٦} - \frac{١}{٦}\text{ص}^{٤} + \frac{١}{٦}\text{ص}^{٢} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{١٨}\text{قا٣س} - \frac{١}{٦}\text{قا}^{٤}\text{٣س} + \frac{١}{٦}\text{قا}^{٢}\text{٣س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{قا٣س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣قا٣س ظا٣س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٣قا٣س ظا٣س}}$

⑱ $\int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$ (الكتاب)

الحل $\int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int \text{قا}^{٢}\text{س}\ (\text{ظا}^{٢}\text{س} + \text{١})\ \text{ءس}$

$= \int \cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}\ (\text{ص}^{٢} + \text{١})\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}$

$= \int \text{ص}^{٢} + \text{١}\ \text{ءص} = \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{ص} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{ظا}^{٣}}{٣} + \text{ظاس} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

⑲ $\int$ جا^{2}س / جتا^{4}س دس

الحل

= $\int$ ظا^{2}س قا^{2}س دس

ص = ظاس

دص/دس = قا^{2}س

دس = دص / قا^{2}س

= $\int$ ص^{2} $\cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}$ دص / $\cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}$

= $\int$ ص^{2} دص

= ص^{3}/٣ + جـ = ١/٣ ظا^{3}س + جـ

⑳ $\int$ ظتا^{5}س قتاس دس

الحل = $\int$ ظتاس قتاس ظتا^{4}س دس

= $\int$ ظتاس قتاس (ظتا^{2}س)^{2} دس

= $\int$ ظتاس قتاس (قتا^{2}س − ١)^{2} دس

ص = قتاس

دص/دس = −قتاس ظتاس

دس = دص / −قتاس ظتاس

= $\int$ $\cancel{\text{ظتاس قتاس}}$ (ص^{2} − ١)^{2} دص / $\cancel{\text{−قتاس ظتاس}}$

= −$\int$ (ص^{2} − ١)^{2} دص

= $\int$ (−ص^{4} + ٢ص^{2} − ١) دص

= −ص^{5}/٥ + ٢ص^{3}/٣ − ص + جـ

= −١/٥ قتا^{5}س + ٢/٣ قتا^{3}س − قتاس + جـ

الجزء الخامس :
تكامل تركيب اقترانين

مثال (٥) (١٩٩٩)

إذا كان ق(س) قابل للاشتقاق على ح وكان ق(٩) = ٨ ، ق(٤) = ٣، جد

$\int_{٢}^{٣}$ ٢س قَ(س^{2}) دس

الحل = $\int_{٤}^{٩}$ $\cancel{٢س}$ قَ(ص) دص / $\cancel{٢س}$

ص = س^{2}

دص/دس = ٢س

دس = دص / ٢س

س = ٢ ← ص = ٤

س = ٣ ← ص = ٩

= $\int_{٤}^{٩}$ قَ(ص) دص

= ق(ص) $\Big|_{٤}^{٩}$

= ق(٩) − ق(٤)

= ٨ − ٣ = ٥

مثال (٦)

إذا كان ق(س) اقتران قابل للتكامل على [١ ، ٢] ، وكان ق(١) = ١ ، ق(٢) = ٤

فإن $\int_{١}^{٢}$ ٣ قَ(س) $\sqrt{\text{ق(س)}}$ دس يساوي

أ) ١٤ ب) −١٤ جـ) ١/٣ د) −١/٣

الحل

= $\int_{١}^{٢}$ ٣ $\cancel{\text{قَ(س)}}$ ص × ٢ص دص / $\cancel{\text{قَ(س)}}$

ص = $\sqrt{\text{ق(س)}}$

ص^{2} = ق(س)

٢ص دص/دس = قَ(س)

دس = دص / ٢ص قَ(س)

س = ١ ← ص = ١

س = ٢ ← ص = ٢

= $\int_{١}^{٢}$ ٦ص^{2} دص

= ٢ص^{3} $\Big|_{١}^{٢}$

= ١٦ − ٢ = $\boxed{١٤}$

مثال (٧) (كتاب)

إذا كان $\int_{١}^{٨}$ ق(س) دس = ١٨ ، جد قيمة

$\int_{١}^{٢}$ س^{2} ق(س^{3}) دس

الحل = $\int_{١}^{٨}$ $\cancel{\text{س}^{2}}$ ق(ص) دص / $\cancel{٣\text{س}^{2}}$

ص = س^{3}

دص/دس = ٣س^{2}

دس = دص / ٣س^{2}

س = ١ ← ص = ١

س = ٢ ← ص = ٨

= ١/٣ $\int_{١}^{٨}$ ق(ص) دص

= ١/٣ × ١٨ = $\boxed{٦}$

مثال (٨) (كتاب)

إذا كان $\int_{٠}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٨$ ، جد قيمة $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ٣\,\text{جتا}(٢\text{س})\,\text{ق}(\text{جا}٢\text{س})\,\text{ءس}$

الحل $= \int_{٠}^{١} ٣\,\cancel{\text{جتا}٢\text{س}}\,\text{ق}(\text{ص})\,\frac{\text{ءص}}{٢\,\cancel{\text{جتا}٢\text{س}}}$

$= \frac{٣}{٢}\int_{٠}^{١} \text{ق}(\text{ص})\,\text{ءص}$

$= \frac{٣}{٢} \times ٨ = ١٢$

$\text{ص} = \text{جا}٢\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{جتا}٢\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\,\text{جتا}٢\text{س}}$

$\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = ٠$

$\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٤} \leftarrow \text{ص} = ١$

مثال (٩) (٢٠١٦ ص)

إذا كان $\int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٤$ ،

$\int_{٠}^{٣} \left(\text{أ}\,\text{ق}(٣-\text{س}) + ٦\text{س} + ١\right)\text{ءس} = ٤٢$

جد قيمة الثابت (أ)

الحل $\text{أ}\int_{٠}^{٣} \text{ق}(٣-\text{س})\,\text{ءس} + \int_{٠}^{٣}(٦\text{س}+١)\,\text{ءس} = ٤٨$

$\text{أ}\int_{٣}^{٠} -\text{ق}(\text{ص})\,\text{ءص} + \left[٣\text{س}^٢ + \text{س}\right]_{٠}^{٣} = ٤٨$

$\text{أ}\int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{ص})\,\text{ءص} + ٣٠ = ٤٨$

$٤\text{أ} = ١٢$

$\text{أ} = ٣$

$\text{ص} = ٣ - \text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -١$

$\text{ءس} = -\text{ءص}$

$\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = ٣$

$\text{س} = ٣ \leftarrow \text{ص} = ٠$

مثال (١٠) (٢٠١٢ ص)

إذا كان ق(س) اقتران متصل ، م(س) معكوس مشتقة الاقتران ق(س) ، وكان أ ، جـ ثوابت حيث $\text{أ} \neq ٠$ ، أوجد $\int \text{ق}(\text{أس})\,\text{ءس}$

الحل $\int \text{ق}(\text{أس})\,\text{ءس}$

$= \int \frac{١}{\text{أ}}\,\text{ق}(\text{ص})\,\text{ءص}$

$= \frac{١}{\text{أ}}\int \text{ق}(\text{ص})\,\text{ءص}$

$= \frac{١}{\text{أ}}\,\text{م}(\text{ص}) + \text{جـ} = \frac{١}{\text{أ}}\,\text{م}(\text{أس}) + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{أ}\,\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{أ}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{أ}}$

مثال (١١) (٢٠٠١)

إذا كان ق(س) متصل على ح ، وكان (أ) عدد ثابت ، أثبت أن

$\int_{\text{أ}}^{٢\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{٠}^{\text{أ}} \text{ق}(٢\text{أ}-\text{س})\,\text{ءس}$

الحل $\int_{٠}^{\text{أ}} \text{ق}(٢\text{أ}-\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int_{٢\text{أ}}^{\text{أ}} -\text{ق}(\text{ص})\,\text{ءص}$

$= \int_{\text{أ}}^{٢\text{أ}} \text{ق}(\text{ص})\,\text{ءص}$

$\text{ص} = ٢\text{أ} - \text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -١$

$\text{ءس} = -\text{ءص}$

$\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = ٢\text{أ}$

$\text{س} = \text{أ} \leftarrow \text{ص} = \text{أ}$

$\int_{\text{أ}}^{٢\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{٠}^{\text{أ}} \text{ق}(٢\text{أ}-\text{س})\,\text{ءس}$

مثال (١٢) (كتاب) فكرة حلوه

أثبت $\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(\text{س}-١)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}+٢}}\,\text{ءس} = \begin{cases} \frac{-١}{\text{ن}+١} & \text{، ن عدد فردي} \\ \frac{١}{\text{ن}+١} & \text{، ن عدد زوجي} \end{cases}$

الحل $\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(\text{س}-١)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}} \times \text{س}^٢}\,\text{ءس} = \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{١}{\text{س}^٢}\left(\frac{\text{س}-١}{\text{س}}\right)^{\text{ن}}\text{ءس}$

$= \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{١}{\text{س}^٢}\left(١-\frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ن}}\text{ءس}$

$= \int_{-١}^{٠} \frac{١}{\cancel{\text{س}^٢}}\,\text{ص}^{\text{ن}} \times \cancel{\text{س}^٢}\,\text{ءص}$

$= \int \text{ص}^{\text{ن}}\,\text{ءص}$

$= \frac{\text{ص}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}\Big|_{-١}^{٠}$

$\text{ص} = ١ - \frac{١}{\text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}^٢}$

$\text{ءس} = \text{س}^٢\,\text{ءص}$

$\text{س} = \frac{١}{٢} \leftarrow \text{ص} = -١$

$\text{س} = ١ \leftarrow \text{ص} = ٠$

$= ٠ - \left(\frac{(-١)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}\right) = -\left(\frac{(-١)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}\right)$

* $(-١)^{\text{ن}+١}$

$= -١ \leftarrow \text{(ن+١)}$ عدد فردي ← ن عدد زوجي

$-١ \times -١ = \boxed{١}$

$= ١ \leftarrow \text{(ن+١)}$ عدد زوجي ← ن عدد فردي

$-١ \times ١ = \boxed{-١}$

$\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(\text{س}-١)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}+٢}}\,\text{ءس} = \begin{cases} \frac{-١}{\text{ن}+١} & \text{، ن عدد فردي} \\ \frac{١}{\text{ن}+١} & \text{، ن عدد زوجي} \end{cases}$

ورقة عمل (٦)

السؤال الأول: جد التكاملات الآتية

① $\int س^{5}\left(1+\frac{1}{س}\right)^{5} \, \text{ءس}$

الجواب $\frac{1}{6}(س+1)^{6} + \text{جـ}$

② $\int \frac{\text{ءس}}{\sqrt{س}\,(1+\sqrt{س})^{4}}$

الجواب $\frac{-2}{3(1+\sqrt{س})^{3}} + \text{جـ}$

③ $\int س^{5}\sqrt{س^{3}+2} \, \text{ءس}$

الجواب $\frac{2}{15}\sqrt{(س^{3}+2)^{5}} - \frac{4}{9}\sqrt{(س^{3}+2)^{3}} + \text{جـ}$

④ $\int \text{جاس جتا}^{2}(\text{جتاس}) \, \text{ءس}$ (٢٠٠٤ ش)

الجواب $-\frac{1}{2}\,\text{جتاس} - \frac{1}{4}\,\text{جا}(2\,\text{جتاس}) + \text{جـ}$

⑤ $\int \sqrt{س^{2}+2س^{4}} \, \text{ءس}$

الجواب $\frac{1}{6}\left(\sqrt{1+2س^{2}}\right)^{3} + \text{جـ}$

⑥ $\int \frac{(1+س)^{7}}{س^{9}} \, \text{ءس}$

الجواب $\frac{-1}{8}\left(1+\frac{1}{س}\right)^{8} + \text{جـ}$

⑦ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}2س \, \text{جتاس} \, \text{ءس}$ (٢٠١٢ ص)

الجواب $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

⑧ $\int \text{قا}^{6}س \, \text{ءس}$

الجواب $\text{ظاس} + \frac{2}{3}\text{ظا}^{3}س + \frac{1}{5}\text{ظا}^{5}س + \text{جـ}$

⑨ $\int \text{قا}^{4}س \, \text{ظا}^{2}س \, \text{ءس}$

الجواب $\frac{1}{5}\text{ظا}^{5}س + \frac{1}{3}\text{ظا}^{3}س + \text{جـ}$

⑩ $\int \frac{1}{\text{ظا}^{5}س \, \text{جا}^{2}س} \, \text{ءس}$

الجواب $\frac{-1}{6}\text{ظتا}^{6}س + \text{جـ}$

⑪ $\int \text{قا}^{4}3س \, \text{ظا}3س \, \text{ءس}$ (٢٠١٣ ص)

الجواب $\frac{1}{12}\text{ظا}^{4}(3س) + \frac{1}{18}\text{ظا}^{6}(3س) + \text{جـ}$

⑫ $\int \sqrt[3]{2س^{5}-س^{3}} \, \text{ءس}$ (١٩٩٨)

الجواب $\frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{2س^{2}-1}\right)^{4} + \text{جـ}$

⑬ $\int \frac{\sqrt{س^{2}+1}}{س^{4}} \, \text{ءس}$

الجواب $\frac{-1}{3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{س^{2}}}\right)^{3} + \text{جـ}$

⑭ $\int \frac{3+\sqrt{س}}{\sqrt{س}} \, \text{ءس}$

الجواب $\frac{4}{3}\sqrt{(3+\sqrt{س})^{3}} + \text{جـ}$

⑮ $\int \text{جاس جتا}^{3}س \, \text{ءس}$

الجواب $\frac{-1}{4}\text{جتا}^{4}س + \text{جـ}$

⑯ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جاس جتاس}}{\sqrt{1+\text{جا}^{2}س}} \, \text{ءس}$

الجواب $(\sqrt{2}-1)$

⑰ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}2س \, \text{جتاس} \, \text{ءس}$

الجواب $\frac{2}{3(\sqrt{2})^{3}}$

⑱ $\int_{1}^{4} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}+5}}\,\text{ءس}$ (٢٠١٢ ص)

الجواب $\frac{8}{3}$

⑲ $\int \text{س}^{6}\left(\frac{5}{\text{س}}+\frac{4}{\text{س}^{2}}\right)^{3}\text{ءس}$

الجواب $\frac{1}{2}(5\text{س}+4)^{4}+\text{ج}$

⑳ $\int (\text{س}^{5}-3\text{س})^{3}\,\text{ءس}$ (٢٠١١)

الجواب $\frac{1}{16}(\text{س}^{2}-3)^{4}+\text{ج}$

㉑ $\int \sqrt[3]{2\text{س}^{3}-\text{س}^{5}}\,\text{ءس}$ ٢٠٠٣ ش

الجواب $\frac{-3}{8}\sqrt[3]{(2-\text{س}^{2})^{4}}+\text{ج}$

㉒ $\int \text{جا}^{4}\text{س}\ \text{جتا}^{3}\text{س}\ \text{ءس}$

الجواب $\frac{1}{5}\text{جا}^{5}\text{س}-\frac{1}{7}\text{جا}^{7}\text{س}+\text{ج}$

㉓ $\int \frac{\text{جاس}}{\text{قا}^{5}\text{س}}\,\text{ءس}$

الجواب $\frac{-1}{6}\text{جتا}^{6}\text{س}+\text{ج}$

㉔ $\int \text{قتا}^{4}\text{س}\ \text{ءس}$

الجواب $\text{ظتاس}-\frac{1}{3}\text{ظتا}^{3}\text{س}+\text{ج}$

㉕ $\int \frac{1}{\text{س}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{ءس}$

الجواب $\frac{1}{2}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2}+\text{ج}$

㉖ $\int \sqrt{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{ءس}$

الجواب $\frac{2}{3}\sqrt{\text{س}^{3}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-\frac{4}{9}\sqrt{\text{س}^{3}}+\text{ج}$

㉗ $\int \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{هـ}^{(1-\text{ظاس})}\ \text{ءس}$

الجواب $-\text{هـ}^{(1-\text{ظاس})}+\text{ج}$

㉘ $\int \frac{\text{هـ}^{\frac{5}{\text{س}}}}{\text{س}^{2}}\,\text{ءس}$

الجواب $\frac{-1}{5}\text{هـ}^{\frac{5}{\text{س}}}+\text{ج}$

㉙ $\int \frac{6\text{س}-9}{(\text{س}^{2}-3\text{س}+1)^{3}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الجواب $\frac{-3}{2(\text{س}^{2}-3\text{س}+1)^{2}}+\text{ج}$

㉚ $\int \text{س}^{3}(\text{س}^{2}+4)^{6}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الجواب $\frac{1}{16}(\text{س}^{2}+4)^{8}-\frac{2}{7}(\text{س}^{2}+4)^{7}+\text{ج}$

㉛ $\int 2\text{س}^{5}(\text{س}^{2}+5)^{4}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل $\frac{(\text{س}^{2}+5)^{7}}{7}-5\frac{(\text{س}^{2}+5)^{6}}{3}+5(\text{س}^{2}+5)^{5}+\text{ج}$

㉜ $\int \frac{\text{ظتا}^{2}\frac{1}{\text{س}}}{\text{س}^{2}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الجواب $\frac{1}{\text{س}}+\text{ظتا}(\frac{1}{\text{س}})+\text{ج}$

㉝ $\int \text{هـ}^{(\text{س}^{3}+2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}$ (كتاب)

الجواب $\frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{س}^{3}}+\text{ج}$

㉞ $\int \text{جاس}\ \text{هـ}^{\text{جتاس}}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الجواب $-\text{هـ}^{\text{جتاس}}+\text{ج}$

㉟ $\int \frac{\text{ءس}}{\sqrt{\text{س}}(1+\sqrt{\text{س}})}$ (كتاب)

الجواب $2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|1+\sqrt{\text{س}}|+\text{ج}$

(٣٦) $\int \text{جتا}٢\text{س} \left(\text{جاس} - \text{جتاس}\right)^{٨} \,\text{ءس}$ (كتاب)

الجواب $\frac{١}{١٠}\left(\text{جاس} - \text{جتاس}\right)^{١٠} + \text{جـ}$

السؤال الثاني : (٢٠٠١)

إذا كان ق(س) متصل ع(ح) وكان (أ) عدد ثابت أثبت أن

$\int_{\text{أ}}^{٢\text{أ}} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = \int_{٠}^{\text{أ}} \text{ق}(٣\text{أ} - \text{س})\,\text{ءس}$

السؤال الثالث :

إذا كان $\int_{٣}^{٢\text{أ}-١} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = ٢\int_{٢}^{٣} \text{ق}(٢\text{س} - ١)\,\text{ءس}$

جد قيمة الثابت (أ) $\boxed{٦}$

السؤال الرابع : (كتاب)

إذا كان $\int_{١}^{\text{هـ}} \text{س ق(س)}\,\text{ءس} = ٤$

فما قيمة $\int_{٠}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ق}\left(\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}\right)\text{ءس}$

أ) ١ [✓ ب) ٨] جـ) ٢ د) ٤

السؤال الخامس (٢٠١٦ ش)

إذا كان $\int_{-١}^{٢} \left(٣\,\text{ق(س)} + ٢\text{س} - ٤\right)\text{ءس} = ٣$ ،

$\int_{٣}^{١} \left(\text{ق}(\text{س}+١) - ٣\text{س}^{٢}\right)\text{ءس} = ٢٧$ ،

جد $\int_{-١}^{٤} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$

الجواب $\boxed{٣}$

---

(٣٧) $\int_{٢}^{٥} \text{هـ}^{\left(١ + \sqrt{\text{س}-١}\right)}\,\text{ءس}$ (٢٠١٥ ش)

الجواب ٢هـ^{٣}

---

(٣٨) $\int \frac{٢\text{س} + ٣\,\text{ظاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$ ٢٠١٥ ص

الجواب

$\text{س ظاس} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \frac{٣}{٢}\text{ظا}^{٢}\text{س} + \text{جـ}$

---

(٣٩) $\int \frac{\sqrt{١+\text{س}} - \sqrt{١-\text{س}}}{\sqrt{١+\text{س}} + \sqrt{١-\text{س}}}\,\text{ءس}$ ٢٠١٦ ش

الدرس السابع : التكامل بالأجزاء

يستخدم التكامل بالأجزاء لإجراء تكامل حاصل ضرب اقترانين لا يوجد بينهما علاقة بالاشتقاق ، لكن أحدها يسهل اشتقاقه والآخر يسهل تكامله

الطريقة

$\int$ ص ءهـ

$$\begin{tikzcd} \underset{\text{نكامل}}{\text{ءهـ}} & \underset{\text{نشتق}}{\text{ص}} \arrow[dl] \\ \text{هـ} \arrow[r, "\int -"] & \text{ءص} \end{tikzcd}$$

$\int$ ص ءهـ = ص هـ − $\int$ هـ ءص

مثال (١) (كتاب)

أثبت أن $\int$ ص ءهـ = ص × هـ − $\int$ هـ × ءص

الحل

نفرض أن ص(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق بالنسبة للمتغير (س)

(ص × هـ)′(س) = ص(س) هـ′(س) + هـ(س) ص′(س)

ص(س) هـ′(س) = (ص × هـ)′(س) − هـ(س) ص′(س)

$\int$ ص(س) هـ′(س) ءس = $\int$ (ص × هـ)′(س) ءس − $\int$ هـ(س) ص′(س) ءس

$\int$ ص(س) هـ′(س) ءس = (ص × هـ)(س) − $\int$ هـ(س) ص′(س) ءس

ءهـ = هـ′(س) ءس ، ءص = ص′(س) ءس

$\int$ ص ءهـ = ص × هـ − $\int$ هـ ءص

الجزء الأول : التكامل بالأجزاء بشكل مباشر

① $\int \underbrace{\text{كثير حدود}}_{\text{ص}} \times \underbrace{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\ \text{ءس}}_{\text{ءهـ}}$ ن ≠ −١

② $\int \underbrace{\text{كثير حدود}}_{\text{ص}} \times \underbrace{\text{دائري زاوية ظلي ءس}}_{\text{ءهـ}}$

③ $\int \underbrace{\text{كثير حدود}}_{\text{ص}} \times \underbrace{\sqrt[\text{ن}]{\text{أس}+\text{ب}}\ \text{ءس}}_{\text{ءهـ}}$

④ $\int \underbrace{\text{كثير حدود}}_{\text{ص}} \times \underbrace{\text{هـ}^{(\text{أس}+\text{ب})}\ \text{ءس}}_{\text{ءهـ}}$

ملاحظة

أ] إذا كان كثير الحدود من الدرجة الأولى يحل أجزاء مرة واحدة

ب] كثير الحدود من الدرجة الثانية يحل أجزاء مرتين

⑤ $\int \underbrace{\text{هـ}^{(\text{أس}+\text{ب})}}_{\text{ص}} \underbrace{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\ \text{ءس}}_{\text{ءهـ}}$ ن ≠ −١

⑥ $\int \underbrace{(\text{لوهـ}(\text{أس}+\text{ب}))^{\text{ن}}}_{\text{ص}} \times \underbrace{\text{س}^{\text{م}}\ \text{ءس}}_{\text{ءهـ}}$ ن = ١، ٢ م ≠ −١

⑦ $\int \underbrace{(\text{لوهـ}(\text{أس}+\text{ب}))^{\text{ن}}}_{\text{ص}} \underbrace{\text{ءس}}_{\text{ءهـ}}$ ن = ١، ٢

⑧ $\int \underbrace{\overset{\text{سهل الاشتقاق}}{\text{ق(س)}}}_{\text{ص}} \times \underbrace{\overset{\text{سهل التكامل}}{\text{هـ(س) ءس}}}_{\text{ءهـ}}$

ملاحظة : الاقتران الذي يشتمل إذا كان مرفوع لقوة (٢) يحل أجزاء مرتين

مثال (٢) جد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int (٢\text{س}+١)\,\text{جتا}٣\text{س}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل م = ٢س + ١ دهـ = جتا٣س دس

دم = ٢دس $\xrightarrow{-\int}$ هـ = $\frac{١}{٣}$ جا٣س

= $\frac{٢\text{س}+١}{٣}$ جا٣س − $\int \frac{٢}{٣}$ جا٣س دس

= $\frac{٢\text{س}+١}{٣}$ جا٣س + $\frac{٢}{٩}$ جتا٣س + جـ

② $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ٣\text{س}\ \text{جاس}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل م = ٣س دهـ = جاس دس

دم = ٣دس $\xrightarrow{-\int}$ هـ = − جتاس

= −٣س جتاس $\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ + $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ ٣جتاس دس

= ٠ + ٣جتاس $\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ = −٣

③ $\int \text{س}\ \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل م = س دهـ = قا²س دس

دم = دس $\xrightarrow{-\int}$ هـ = ظاس

= س ظاس − $\int$ ظاس دس

= س ظاس + لو$_{\text{هـ}}$|جتاس| + جـ

④ $\int_{-٢}^{١} ٥\text{س}\sqrt{\text{س}+٣}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل = $\int_{-٢}^{١} ٥\text{س}\ (\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}}\ \text{دس}$

م = ٥س دهـ = (س+٣)$^{\frac{١}{٢}}$ دس

دم = ٥دس $\xrightarrow{-\int}$ هـ = $\frac{٢}{٣}$(س+٣)$^{\frac{٣}{٢}}$

= $\frac{١٠}{٣}$ س $\sqrt{(\text{س}+٣)^{٣}}\Big|_{-٢}^{١}$ − $\int_{-٢}^{١} \frac{١٠}{٣}(\text{س}+٣)^{\frac{٣}{٢}}$ دس

= $\frac{١٠}{٣}$ − $\frac{٤}{٣}$(س + ٣)$^{\frac{٥}{٢}}\Big|_{-٢}^{١}$ = −٨

⑤ $\int \frac{٣\text{س}}{\sqrt[٣]{٢\text{س}+١}}\ \text{دس}$

الحل = $\int ٣\text{س}\ (٢\text{س}+١)^{-\frac{١}{٣}}\ \text{دس}$

م = ٣س دهـ = (٢س+١)$^{-\frac{١}{٣}}$ دس

دم = ٣دس $\xrightarrow{-\int}$ هـ = $\frac{٣}{٤}$(٢س+١)$^{\frac{٢}{٣}}$

= $\frac{٩}{٤}$ س $\sqrt[٣]{(٢\text{س}+١)^{٢}}$ − $\int \frac{٩}{٤}(٢\text{س}+١)^{\frac{٢}{٣}}$ دس

= $\frac{٩}{٤}$س $\sqrt[٣]{(٢\text{س}+١)^{٢}}$ − $\frac{٢٧}{٤٠}\sqrt[٣]{(٢\text{س}+١)^{٥}}$ + جـ

⑥ $\int \frac{\text{س}\ \text{جاس}}{\text{قاس}}\ \text{دس}$

الحل = $\int$ س جاس جتاس دس

= $\int \frac{١}{٢}$ س جا٢س دس

م = $\frac{١}{٢}$س دهـ = جا٢س

دم = $\frac{١}{٢}$دس $\xrightarrow{-\int}$ هـ = $\frac{-١}{٢}$ جتا٢س

= $\frac{-١}{٤}$ س جتا٢س + $\int \frac{١}{٤}$ جتا٢س دس

= $\frac{-١}{٤}$ س جتا٢س + $\frac{١}{٨}$ جا٢س + جـ

⑦ $\int \text{س}\ (\text{جاس}+\text{جتاس})^{٢}\ \text{دس}$ (كتاب + ٢٠٠٧ ش)

الحل = $\int$ س (جا²س + ٢جاس جتاس + جتا²س) دس

= $\int$ س(١ + جا٢س) دس

م = س دهـ = (١+جا٢س) دس

دم = دس $\xrightarrow{-\int}$ هـ = $\frac{-١}{٢}$ جتا٢س

= $\frac{-\text{س}}{٢}$ جتا٢س + $\int \frac{١}{٢}$ جتا٢س دس

= $\frac{-\text{س}}{٢}$ جتا٢س + $\frac{١}{٤}$ جا٢س + جـ

⑧ $\int \frac{\text{س}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس}$ (كتاب + ٢٠٠٨ ص)

الحل $\int$ س جتا²س دس

$ص = س \qquad دهـ = جتا^{٢}س\, دس$

$دص = دس \qquad هـ = \int جتا^{٢}س\, دس$

* إجراء تكامل جتا^٢س دس

$هـ = \int جتا^{٢}س\, دس = \int \frac{١}{٢}(١ + جتا٢س)\, دس$

$هـ = \frac{١}{٢}(س + \frac{١}{٢} جا٢س)$

$ص = س \qquad دهـ = جتا^{٢}س\, دس$

$دص = دس \xrightarrow{\int} هـ = \frac{١}{٢}(س + \frac{١}{٢}جا٢س)$

$= \frac{١}{٢}س\,(س + \frac{١}{٢}جا٢س) - \frac{١}{٢}\int (س + \frac{١}{٢}جا٢س)\, دس$

$= \frac{١}{٢}س\,(س + \frac{١}{٢}جا٢س) - \frac{١}{٢}(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{١}{٤}جتا٢س) + جـ$

---

⑨ $\int \frac{س}{١ - جتا٢س}\, دس$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{س}{١ - ١ + ٢جا^{٢}س}\, دس$

$= \int \frac{١}{٢} س\, قتا^{٢}س\, دس$

$ص = \frac{١}{٢}س \qquad دهـ = قتا^{٢}س\, دس$

$دص = \frac{١}{٢}دس \xrightarrow{\int} هـ = - ظتاس$

$= \frac{-١}{٢}س\, ظتاس + \int \frac{١}{٢} ظتاس\, دس$

$= \frac{-١}{٢}س\, ظتاس + \frac{١}{٢} لو_{هـ}|جاس| + جـ$

---

⑩ $\int س\, لو_{هـ}س^{٣}\, دس$ (كتاب)

الحل $= \int ٣س\, لو_{هـ}س\, دس$

$ص = لو_{هـ}س \qquad دهـ = ٣س\, دس$

$دص = \frac{١}{س}دس \xrightarrow{\int} هـ = \frac{٣س^{٢}}{٢}$

$= \frac{٣}{٢}س^{٢}لو_{هـ}س - \int \frac{٣}{٢}\, س\, دس$

$= \frac{٣}{٢}س^{٢}لو_{هـ}س - \frac{٣}{٤}س^{٢} + جـ$

---

⑪ $\int س^{٢}\, لو_{هـ}س\, دس$ (ص ٢٠١٣)

الحل $ص = لو_{هـ}س \qquad دهـ = س^{٢}دس$

$دص = \frac{١}{س}دس \xrightarrow{\int} هـ = \frac{س^{٣}}{٣}$

$= \frac{س^{٣}}{٣}لو_{هـ}س - \int \frac{س^{٢}}{٣}\, دس$

$= \frac{س^{٣}}{٣}لو_{هـ}س - \frac{س^{٣}}{٩} + جـ$

---

⑫ $\int \frac{س^{٢}}{لو_{س^{٣}}هـ}\, دس$

الحل $= \int س^{٢}\, لو_{هـ}س^{٣}\, دس$

$= \int ٣س^{٢}\, لو_{هـ}س\, دس$

أكمل مثل السؤال السابق

$= س^{٣}لو_{هـ}س - \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

---

⑬ $\int \frac{لو_{هـ}(س+٣)}{\sqrt{س+٣}}\, دس$ (كتاب)

الحل

$= \int لو_{هـ}(س+٣)\, (س+٣)^{\frac{-١}{٢}}\, دس$

$ص = لو_{هـ}(س+٣) \qquad دهـ = (س+٣)^{\frac{-١}{٢}}\, دس$

$دص = \frac{١}{س+٣}دس \xrightarrow{\int} هـ = ٢(س+٣)^{\frac{١}{٢}}$

$= ٢\sqrt{س+٣}\, لو_{هـ}(س+٣) - ٢\int (س+٣)^{\frac{-١}{٢}}\, دس$

$= ٢\sqrt{س+٣}\, لو(س+٣) - ٤(س+٣)^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$= ٢\sqrt{س+٣}\, لو_{هـ}(س+٣) - ٤\sqrt{س+٣} + جـ$

---

⑭ $\int_{١}^{هـ} لو_{هـ}س\, دس$

الحل $ص = لو_{هـ}س \qquad دهـ = دس$

$دص = \frac{١}{س}دس \xrightarrow{\int} هـ = س$

$= س\,لو_{هـ}س\Big|_{١}^{هـ} - \int_{١}^{هـ} دس$

$= س\,لو_{هـ}س\Big|_{١}^{هـ} - س\Big|_{١}^{هـ} = \boxed{١}$

---

⑮ $\int \frac{س}{٢ - ٢جا^{٢}س}\, دس$ (ص ٢٠١٢)

الحل $= \int \frac{س}{٢ جتا^{٢}س}\, دس$

$= \int \frac{١}{٢}س\, قا^{٢}س\, دس$

ص = $\frac{1}{2}$س   ءهـ = قا^{2}س ءس

ءص = $\frac{1}{2}$ءس $\xrightarrow{-2}$ هـ = ظاس

= $\frac{1}{2}$س ظاس − $\int$ $\frac{1}{2}$ظاس ءس

= $\frac{1}{2}$س ظاس + $\frac{1}{2}$لوهـ|جتاس| + جـ

---

⑯ $\int$ س ظا^{2}س ءس   (٢٠٠٦ ش)

الحل ص = س   ءهـ = ظا^{2}س ءس

ءص = ءس   هـ = $\int$ظا^{2}س ءس

* هـ = $\int$ظا^{2}س ءس = $\int$(قا^{2}س − ١) ءس

هـ = ظاس − س

* ص = س   ءهـ = ظا^{2}س

ءص = ءس $\xrightarrow{-2}$ هـ = ظاس − س

= س ظاس − س^{2} − $\int$(ظاس − س) ءس

= س ظاس − س^{2} + لوهـ|جتاس| + $\frac{س^{2}}{2}$ + جـ

---

⑰ $\int$ قا^{2}س لوهـ ظاس ءس   (الكتاب)

الحل ص = لوهـ ظاس   ءهـ = قا^{2}س ءس

ءص = $\frac{قا^{2}س}{ظاس}$ ءس $\xrightarrow{-2}$ هـ = ظاس

= ظاس لوهـ ظاس − $\int$ قا^{2}س ءس

= ظاس لوهـ ظاس − ظاس + جـ

---

⑱ $\int$ جتاس لوهـ جاس ءس (الكتاب)

الحل ص = لوهـ جاس   ءهـ = جتاس ءس

ءص = $\frac{جتاس}{جاس}$ ءس $\xrightarrow{-2}$ هـ = − جاس

= − جاس لوهـ جاس + $\int$ جتاس ءس

= − جاس لوهـ جاس + جاس + جـ

---

⑲ $\int$(٢س − ١) هـ^{س} ءس (الكتاب)

الحل ص = ٢س − ١   ءهـ = هـ^{س}

ءص = ٢ ءس $\xrightarrow{-2}$ هـ = هـ^{س}

= (٢س − ١) هـ^{س} − $\int$ ٢هـ^{س} ءس

= (٢س − ١) هـ^{س} − ٢هـ^{س} + جـ

---

⑳ $\int$ $\frac{س}{هـ^{2س}}$ ءس   (الكتاب)

الحل = $\int$ س هـ$^{-2س}$ ءس

ص = س   ءهـ = هـ$^{-2س}$

ءص = ءس $\xrightarrow{-2}$ هـ = $\frac{-1}{2}$هـ$^{-2س}$

= $\frac{-1}{2}$س هـ$^{-2س}$ + $\int$ $\frac{1}{2}$ هـ$^{-2س}$ ءس

= $\frac{-1}{2}$س هـ$^{-2س}$ − $\frac{1}{4}$ هـ$^{-2س}$ + جـ

㉑ $\int$ $\frac{س هـ^{س}}{(س+1)^{2}}$ ءس (الكتاب + ٢٠٠٦ ص)

الحل

= $\int$ س هـ^{س} (س+١)$^{-2}$ ءس

ص = س هـ^{س} ءهـ = (س+١)$^{-2}$ ءس

ءص = س هـ^{س} + هـ^{س} ءس $\xrightarrow{-2}$ هـ = $\frac{-1}{س+1}$

= $\frac{-س هـ^{س}}{س+1}$ + $\int$ هـ^{س} ءس

= $\frac{-س هـ^{س}}{س+1}$ + هـ^{س} + جـ

الجزء الثاني :
استخدام التكامل بالأجزاء مرتين

مثال (٣) جد كلاً من التكاملات الآتية

① ∫ س^{٢} جاس ءس (الكتاب)

الحل ص = س^{٢} ءه = جاس ءس

ءص = ٢س ءس $\xrightarrow{-\int}$ ه = −جتاس

= −س^{٢} جتاس + ∫ ٢س جتاس ءس

* ∫ ٢س جتاس ءس

ص = ٢س ءه = جتاس ءس

ءص = ٢ ءس $\xrightarrow{-\int}$ ه = جاس

= ٢س جاس − ∫ ٢ جاس ءس

= ٢س جاس + ٢ جتاس

* ∫ س^{٢} جاس ءس =

−س^{٢} جتاس + ٢س جاس + ٢ جتاس + ج

---

② ∫ ٣س^{٢} جتاس ءس

الحل ص = ٣س^{٢} ءه = جتاس

ءص = ٦س ءس $\xrightarrow{-\int}$ ه = جاس

= ٣س^{٢} جاس − ∫ ٦س جاس ءس

* ∫ ٦س جاس ءس =

ص = ٦س ءه = جاس ءس

ءص = ٦ ءس $\xrightarrow{-\int}$ ه = − جتاس

= −٦س جتاس + ∫ ٦ جتاس ءس

= −٦س جتاس + ٦ جاس

* ∫ ٣س^{٢} جتاس ءس =

٣س^{٢} جاس + ٦س جتاس − ٦ جاس + ج

---

③ ∫ $\frac{ءس}{س^{-٢} قا(٤س-١)}$

الحل = ∫ س^{٢} جتا(٤س − ١) ءس

ص = س^{٢} ءه = جتا(٤س − ١) ءس

ءص = ٢س ءس $\xrightarrow{-\int}$ ه = $\frac{١}{٤}$ جا(٤س − ١)

= $\frac{١}{٤}$ س^{٢} جا(٤س − ١) − ∫ $\frac{١}{٢}$ س جا(٤س − ١) ءس

* ∫ $\frac{١}{٢}$ س جا(٤س − ١) ءس

ص = $\frac{١}{٢}$ س ءه = جا(٤س − ١) ءس

ءص = $\frac{١}{٢}$ ءس $\xrightarrow{-\int}$ ه = $\frac{-١}{٤}$ جتا(٤س − ١)

= $\frac{-١}{٨}$ س جتا(٤س − ١) + ∫ $\frac{١}{٨}$ جتا(٤س − ١) ءس

= $\frac{-١}{٨}$ س جتا(٤س − ١) + $\frac{١}{٣٢}$ جا(٤س − ١) ءس

* ∫ س^{٢} جتا(٤س − ١) ءس =

$\frac{١}{٢}$ س^{٢} جا(٤س − ١) + $\frac{١}{٨}$ س جتا(٤س − ١) $\frac{-١}{٣٢}$ جا(٤س − ١) + ج

---

④ ∫ س (لوهـ س)^{٢} ءس (الكتاب + ٢٠٠٤ ص)

الحل ص = (لوهـ س)^{٢} ءه = س ءس

ءص = $\frac{٢}{س}$ لوهـ س ءس $\xrightarrow{-\int}$ ه = $\frac{س^{٢}}{٢}$

= $\frac{س^{٢}}{٢}$ (لوهـ س)^{٢} − ∫ س لوهـ س ءس

* ∫ س لوهـ س ءس

ص = لوهـ س ءه = س ءس

ءص = $\frac{١}{س}$ ءس $\xrightarrow{-\int}$ ه = $\frac{س^{٢}}{٢}$

= $\frac{س^{٢}}{٢}$ لوهـ س − ∫ $\frac{١}{٢}$ س ءس

= $\frac{س^{٢}}{٢}$ لوهـ س − $\frac{١}{٤}$ س^{٢}

* ∫ س (لوهـ س)^{٢} ءس =

$\frac{س^{٢}}{٢}$ (لوهـ س)^{٢} − $\frac{س^{٢}}{٢}$ لوهـ س + $\frac{١}{٤}$ س^{٢} + ج

---

⑤ ∫ (لوهـ س)^{٢} ءس

الحل ص = (لوهـ س)^{٢} ءه = ءس

ءص = $\frac{٢}{س}$ لوهـ س ءس $\xrightarrow{-\int}$ ه = س

= س (لوهـ س)^{٢} − ∫ ٢ لوهـ س ءس

* ∫ ٢ لوهـ س ءس

ص = لوهـ س ءه = ٢ ءس

ءص = $\frac{١}{س}$ ءس $\xrightarrow{-\int}$ ه = ٢س

$= ٢س\, لو_{هـ} س - \int ٢\, ءس$

$= ٢س\, لو_{هـ} س - ٢س$

$* \int (لو_{هـ} س)^{٢} =$

$س(لو_{هـ} س)^{٢} - ٢س\, لو_{هـ} س + ٢س + جـ$

⑥ $\int_{٠}^{٢} س^{٢} هـ^{س}\, ءس$ (الكتاب)

الحل $ص = س^{٢}$ $ءهـ = هـ^{س}\, ءس$

$ءص = ٢س\, ءس \xrightarrow{-2} هـ = هـ^{س}$

$= س^{٢} هـ^{س} \Big|_{٠}^{٢} - \int_{٠}^{٢} ٢س\, هـ^{س}\, ءس$

$* \int_{٠}^{٢} ٢س\, هـ^{س}\, ءس$

$ص = ٢س$ $ءهـ = هـ^{س}\, ءس$

$ءص = ٢\, ءس \xrightarrow{-2} هـ = هـ^{س}$

$= ٢س\, هـ^{س} \Big|_{٠}^{٢} - \int_{٠}^{٢} ٢هـ^{س}\, ءس$

$= ٢س\, هـ^{س} \Big|_{٠}^{٢} - ٢هـ^{س} \Big|_{٠}^{٢}$

$* \int_{٠}^{٢} س^{٢} هـ^{س}\, ءس =$

$(س^{٢} هـ^{س} - ٢س\, هـ^{س} + ٢هـ^{س}) \Big|_{٠}^{٢}$

$= (٤هـ^{٢} - ٤هـ^{٢} + ٢هـ^{٢}) - (٠ - ٠ + ٢)$

$= ٢هـ^{٢} - ٢ = ٢(هـ^{٢} - ١)$

الجزء الثالث:
طريقة السلم (الجدول)
لإجراء التكامل بالأجزاء

استخدامات طريقة الجدول:

تكامل حاصل ضرب اقترانين إحداهما كثير حدود والآخر على إحدى الصور الآتية

① $جا(أس + ب)$ $أ \neq ٠$

② $جتا(أس + ب)$ $أ \neq ٠$

③ $هـ^{أس + ب}$ $أ \neq ٠$

④ $(أس + ب)^{ن}$ ، $ن \neq -١$ ، $أ \neq ٠$

ويتم شرح طريقة الجدول من خلال المثال الآتي

مثال (٤) جد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int س^{٢} جاس\, ءس$ (الكتاب)

الحل

ص (نشتق)		ءهـ (نكامل)
$س^{٢}$	⊕	جاس
٢س	⊖	−جتاس
٢	⊕	−جاس
٠		جتاس

$\int س^{٢} جاس\, ءس =$

$-س^{٢} جتاس + ٢س\, جاس + ٢\, جتاس + جـ$

② $\int س^{٣} هـ^{س}\, ءس$ (الكتاب)

الحل

ص (نشتق)		ءهـ (نكامل)
$س^{٣}$	⊕	$هـ^{س}$
$٣س^{٢}$	⊖	$هـ^{س}$
٦س	⊕	$هـ^{س}$
٦	⊖	$هـ^{س}$
٠		$هـ^{س}$

$\int س^{٣} هـ^{س}\, ءس =$

$س^{٣} هـ^{س} - ٣س^{٢} هـ^{س} + ٦س\, هـ^{س} - ٦هـ^{س} + جـ$

③ $\int س^2 \,\text{جتا}\,4س \; ءس$ (كتاب)

الحل

م (مشتق)		دهـ (تكامل)
$س^2$	+	$\text{جتا}\,4س$
$2س$	−	$\frac{1}{4}\,\text{جا}\,4س$
2	+	$\frac{-1}{16}\,\text{جتا}\,4س$
0		$\frac{-1}{64}\,\text{جا}\,4س$

$\int س^2 \,\text{جتا}\,4س \; ءس =$

$\frac{1}{4}س^2\,\text{جا}\,4س + \frac{1}{8}س\,\text{جتا}\,4س - \frac{1}{32}\,\text{جا}\,4س + جـ$

④ $\int (س^2 - س)\,\text{جا}\,2س \; ءس$

الحل

م (مشتق)		دهـ (تكامل)
$س^2 - س$	+	$\text{جا}\,2س$
$2س - 1$	−	$\frac{-1}{2}\,\text{جتا}\,2س$
2	+	$\frac{-1}{4}\,\text{جا}\,2س$
0		$\frac{1}{8}\,\text{جتا}\,2س$

$= \frac{-1}{2}(س^2 - س)\,\text{جتا}\,2س + \frac{1}{2}(2س - 1)\,\text{جا}\,2س + \frac{1}{4}\,\text{جتا}\,2س + جـ$

⑤ $\int س^2 (2س+1)^5 \; ءس$ (كتاب)

الحل

م (مشتق)		دهـ (تكامل)
$س^2$	+	$(2س+1)^5$
$2س$	−	$\frac{(2س+1)^6}{12}$
2	+	$\frac{(2س+1)^7}{168}$
0		$\frac{(2س+1)^8}{2688}$

$= \frac{س^2(2س+1)^6}{12} - \frac{س(2س+1)^7}{84} + \frac{(2س+1)^8}{1344} + جـ$

⑥ $\int (س^3 + 2س)\,هـ^س \; ءس$

الحل

م (مشتق)		دهـ (تكامل)
$س^3 + 2س$	+	$هـ^س$
$3س^2 + 2$	−	$هـ^س$
$6س$	+	$هـ^س$
6	−	$هـ^س$
0		$هـ^س$

$= (س^3 + 2س)\,هـ^س - هـ^س(3س^2 + 2) + 6س\,هـ^س - 6\,هـ^س + جـ$

⑦ $\int_0^{\pi} (2س+1)\,\text{جتا}\,3س \; ءس$

الحل

م (مشتق)		دهـ (تكامل)
$2س + 1$	+	$\frac{1}{3}\,\text{جا}\,3س$
2	−	$\frac{-1}{9}\,\text{جتا}\,3س$
0		$\frac{-1}{27}\,\text{جا}\,3س$

$= \frac{-1}{9}\,\text{جتا}\,3س\,(2س+1) + \frac{2}{27}\,\text{جا}\,3س \Big|_0^{\pi}$

$= \frac{1}{9}(2\pi + 1) - \left(\frac{-1}{9}\right)$

$= \frac{2\pi}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{9}$

⑧ $\int (س^2 - 2س)\sqrt{س+3} \; ءس$ (كتاب)

الحل $= \int (س^2 - 2س)(س+3)^{\frac{1}{2}} \; ءس$

$=$

م مشتق		دهـ تكامل
$س^2 - 2س$	+	$(س+3)^{\frac{1}{2}}$
$2س - 2$	−	$\frac{2}{3}(س+3)^{\frac{3}{2}}$
2	+	$\frac{4}{15}(س+3)^{\frac{5}{2}}$
0		$\frac{8}{105}(س+3)^{\frac{7}{2}}$

$= \frac{2}{3}(س^2 - 2س)\sqrt{(س+3)^3} - \frac{4}{15}(2س - 2)\sqrt{(س+3)^5}$

$+ \frac{8}{105}\sqrt{(س+3)^7} + جـ$

الجزء الرابع:
استخدام طريقة التعويض والأجزاء لإجراء التكامل

مثال (٥): جد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int$ جتا $\sqrt{\text{٢س+١}}$ دس (كتاب)

الحل

ص = $\sqrt{\text{٢س+١}}$

ص^2 = ٢س + ١

$\text{٢ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢$

دس = ص دص

= $\int$ ص جتاص دص

م = ص ، دهـ = جتاص دص

دم = دص $\xrightarrow{\int}$ هـ = جاص

= ص جاص − $\int$ جاص دص

= ص جاص + جتاص + جـ

= $\sqrt{\text{٢س+١}}$ جا $\sqrt{\text{٢س+١}}$ + جتا $\sqrt{\text{٢س+١}}$ + جـ

---

② $\int$ س جتا $\sqrt{\text{١+س}^2}$ دس (٢٠١٤ ش)

الحل

ص^2 = ١ + س^2

$\text{٢ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س

دس = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

= $\int$ س جتاص $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ دص

= $\int$ ص جتاص دص

م = ص ، دهـ = جتاص دص

دم = دص $\xrightarrow{\int}$ هـ = جاص

= ص جاص − $\int$ جاص دص

= ص جاص + جتاص + جـ

= $\sqrt{\text{١+س}^2}$ جا $\sqrt{\text{١+س}^2}$ + جتا $\sqrt{\text{١+س}^2}$ + جـ

---

③ $\int$ س^5 جتا س^3 دس (٢٠٠١ + كتاب)

الحل $\int$ س^5 جتاص $\frac{\text{دص}}{\text{٣س}^2}$

ص = س^3

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س^2

دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٣س}^2}$

= $\int \frac{1}{3}$ س^3 جتاص دص

= $\int \frac{1}{3}$ ص جتاص دص

م = $\frac{1}{3}$ص ، دهـ = جتاص دص

دم = $\frac{1}{3}$دص $\xrightarrow{\int}$ هـ = جاص

= $\frac{1}{3}$ص جاص − $\int \frac{1}{3}$ جاص دص

= $\frac{1}{3}$ص جاص + $\frac{1}{3}$ جتاص + جـ

= $\frac{1}{3}$ س^3 جا س^3 + $\frac{1}{3}$ جتا س^3 + جـ

---

④ $\int$ جا $\sqrt{\text{س}}$ جتا $\sqrt{\text{س}}$ دس

الحل $\int \frac{1}{2}$ جا ٢$\sqrt{\text{س}}$ دس

= $\int \frac{1}{2}$ جا٢ص ٢ص دص

= $\int$ ص جا٢ص دص

ص = $\sqrt{\text{س}}$

ص^2 = س

$\text{٢ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١$

دس = ٢ص دص

م = ص ، دهـ = جا٢ص دص

دم = دص $\xrightarrow{\int}$ هـ = $\frac{-1}{2}$جتا٢ص

= $\frac{-1}{2}$ ص جتا٢ص + $\int \frac{1}{2}$ جتا٢ص دص

= $\frac{-1}{2}$ص جتا٢ص + $\frac{1}{٤}$ جا٢ص + جـ

= $\frac{-1}{2}\sqrt{\text{س}}$ جتا٢$\sqrt{\text{س}}$ + $\frac{1}{٤}$ جا٢$\sqrt{\text{س}}$ + جـ

---

⑤ $\int \frac{\text{دس}}{\text{قا}^2\sqrt{\text{س}}}$

الحل = $\int$ جتا$^2\sqrt{\text{س}}$ دس

= $\int$ ٢ص جتا^{2}ص دص

ص = $\sqrt{\text{س}}$

ص^2 = س

$\text{٢ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١$

دس = ٢ص دص

م = ٢ص ، دهـ = جتا^{2}ص دص

دم = ٢دص $\xrightarrow{\int}$ هـ = $\frac{1}{2}$(ص + $\frac{\text{جا٢ص}}{2}$)

= ص(ص + $\frac{\text{جا٢ص}}{2}$) + $\int$ ص + $\frac{\text{جا٢ص}}{2}$ دص

هـ = $\int \frac{1}{2}$(١ + جتا٢ص) دص

هـ = $\frac{1}{2}$(ص + $\frac{1}{2}$جا٢ص)

= ص(ص + $\frac{\text{جا٢ص}}{2}$) +

$\frac{\text{ص}^2}{2}$ − $\frac{1}{٤}$ جتا٢ص + جـ

= س + $\frac{\sqrt{\text{س}}}{2}$ جا٢$\sqrt{\text{س}}$ + $\frac{\text{س}}{2}$ − $\frac{1}{٤}$ جتا٢$\sqrt{\text{س}}$ + جـ

⑥ $\int \text{قا}^2\sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل

$= \int \text{قا}^2\text{ص ظاص} \times \text{٢ص ءص}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^2 = \text{س}$

$\text{٢ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$

$\text{ءس} = \text{٢ص ءص}$

$\text{م} = \text{٢ص} \qquad \text{ءهـ} = \text{قا}^2\text{ص ظاص ءص}$

$\text{ءم} = \text{٢ءص} \qquad \text{هـ} = \int \text{قا}^2\text{ص ظاص ءص}$

$* \int \text{قا}^2\text{ص ظاص ءص}$

$= \int \text{قا}^2\text{ص ع} \frac{\text{ءع}}{\text{قا}^2\text{ص}}$

$\text{ع} = \text{ظاص}$

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءص}} = \text{قا}^2\text{ص}$

$\text{ءص} = \frac{\text{ءع}}{\text{قا}^2\text{ص}}$

$= \int \text{ع ءع} = \frac{\text{ع}^2}{٢}$

$\text{هـ} = \frac{١}{٢}\text{ظا}^2\text{ص}$

$* \quad \text{م} = \text{٢ص} \qquad \text{ءهـ} = \text{قا}^2\text{ص ظاص ءص}$

$\text{ءم} = \text{٢ءص} \xrightarrow{\int} \text{هـ} = \frac{١}{٢}\text{ظا}^2\text{ص}$

$= \text{ص ظا}^2\text{ص} - \int \text{ظا}^2\text{ص ءص}$

$= \text{ص ظا}^2\text{ص} - \int(\text{قا}^2\text{ص} - ١)\ \text{ءص}$

$= \text{ص ظا}^2\text{ص} - \text{ظاص} + \text{ص} + \text{جـ}$

$= \sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}^2\sqrt{\text{س}} - \text{ظا}\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

⑦ $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^3\text{س}}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل $= \int \text{س ظاس قا}^2\text{س ءس}$

$\text{م} = \text{س} \qquad \text{ءهـ} = \text{ظاس قا}^2\text{س ءس}$

$\text{هـ} = \int \text{ظاس قا}^2\text{س ءس}$

$= \int \text{ص قا}^2\text{س} \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$= \int \text{ص ءص} = \frac{\text{ص}^2}{٢}$

$\text{ءم} = \text{ءس} \xrightarrow{\int} \text{هـ} = \frac{١}{٢}\text{ظا}^2\text{س}$

$= \frac{١}{٢}\text{س ظا}^2\text{س} - \int \frac{١}{٢}\text{ظا}^2\text{س ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{س ظا}^2\text{س} - \int \frac{١}{٢}(\text{قا}^2\text{س} - ١)\ \text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{س ظا}^2\text{س} - \frac{١}{٢}(\text{ظاس} - \text{س}) + \text{جـ}$

⑧ $\int \text{جا}^3\text{س لو}_{\text{هـ}}(١ + \text{جتاس})$ (٢٠١٧ ش)

الحل

$= \int \text{جا}^3\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$

$\text{ص} = ١ + \text{جتاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$

$= \int -\text{جا}^2\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{ص ءص}$

$= \int(\text{جتا}^2\text{س} - ١)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص ءص}$

$= \int((\text{ص} - ١)^2 - ١)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص ءص}$

$= \int(\text{ص}^2 - \text{٢ص})\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص ءص}$

$\text{م} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \qquad \text{ءهـ} = \text{ص}^2 - \text{٢ص ءص}$

$\text{ءم} = \frac{١}{\text{ص}}\text{ءص} \xrightarrow{\int} \text{هـ} = \frac{\text{ص}^3}{٣} - \text{ص}^2$

$= (\frac{\text{ص}^3}{٣} - \text{ص}^2)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int(\frac{\text{ص}^2}{٣} - \text{ص})\ \text{ءص}$

$= (\frac{\text{ص}^3}{٣} - \text{ص}^2)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - (\frac{\text{ص}^3}{٩} - \frac{\text{ص}^2}{٢})\ \text{ءص}$

$= \left(\frac{١}{٣}(١ + \text{جتاس})^3 - (١ + \text{جتاس})^2\right)\text{لو}_{\text{هـ}}(١ + \text{جتاس})$

$- \frac{١}{٩}(١ + \text{جتاس})^3 + \frac{١}{٢}(١ + \text{جتاس})^2 + \text{جـ}$

⑨ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ٣\ \text{قا}^4\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس ءس}$ (٢٠١٦ ش)

الحل

$= \int_{١}^{\sqrt{3}} ٣\ \text{قا}^4\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^2\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^2\text{ص}}$

$\text{س} = \frac{\pi}{4} \leftarrow \text{ص} = ١$

$\text{س} = \frac{\pi}{3} \leftarrow \text{ص} = \sqrt{3}$

$= \int_{١}^{\sqrt{3}} ٣\ \text{قا}^2\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{ص ءص}$

$= \int_{١}^{\sqrt{3}} ٣(\text{ظا}^2\text{س} + ١)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص ءص}$

$= \int_{١}^{\sqrt{3}} (\text{٣ص}^2 + ٣)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص ءص}$

$\text{م} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \qquad \text{ءهـ} = (\text{٣ص}^2 + ٣)\ \text{ءص}$

$\text{ءم} = \frac{١}{\text{ص}}\text{ءص} \qquad \text{هـ} = \text{ص}^3 + \text{٣ص}$

$= (ص^{٣} + ٣ص) لو_{هـ} ص \Big]_{١}^{\sqrt{٣}} - \int_{١}^{\sqrt{٣}} (ص^{٢} + ٣) ءص$

$= (ص^{٣} + ٣ص) لو_{هـ} ص - \frac{ص^{٣}}{٣} - ٣ص \Big]_{١}^{\sqrt{٣}}$

$= ٦\sqrt{٣} \, لو_{هـ} \sqrt{٣} - ٤\sqrt{٣} + \frac{١٠}{٣}$

---

⑩ $\int هـ^{\sqrt{س}} ءس$

الحل $= \int ٢ص \, هـ^{ص} ءص$

$ص = \sqrt{س}$

$ص^{٢} = س$

$٢ص \frac{ءص}{ءس} = ١$

$ءس = ٢ص ءص$

$ق = ٢ص \qquad ءهـ = هـ^{ص} ءص$

$ءق = ٢ءص \xrightarrow{\int} هـ = هـ^{ص}$

$= ٢ص \, هـ^{ص} - \int ٢هـ^{ص} ءص$

$= ٢ص \, هـ^{ص} - ٢هـ^{ص} + جـ$

$= ٢\sqrt{س} \, هـ^{\sqrt{س}} - ٢هـ^{\sqrt{س}} + جـ$

---

⑪ $\int س^{٥} هـ^{س^{٣}} ءس$ (ش ٢٠١٣)

الحل

$= \int س^{٥} هـ^{ص} \frac{ءص}{٣س^{٢}}$

$= \int \frac{١}{٣} س^{٣} هـ^{ص} ءص$

$= \int \frac{١}{٣} ص \, هـ^{ص} ءص$

$ص = س^{٣}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢}$

$ءس = \frac{ءص}{٣س^{٢}}$

$ق = \frac{١}{٣} ص \qquad ءهـ = هـ^{ص} ءص$

$ءق = \frac{١}{٣} ءص \xrightarrow{\int} هـ = هـ^{ص}$

$= \frac{١}{٣} ص \, هـ^{ص} - \int \frac{١}{٣} هـ^{ص} ءص$

$= \frac{١}{٣} ص \, هـ^{ص} - \frac{١}{٣} هـ^{ص} + جـ$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} هـ^{س^{٣}} - \frac{١}{٣} هـ^{س^{٣}} + جـ$

---

⑫ $\int جا٢س \, هـ^{جتاس} ءس$ (ص ٢٠٠٣)

الحل

$= \int ٢جاس \, جتاس \, هـ^{ص} \frac{ءص}{-جاس}$

$= \int -٢ص \, هـ^{ص} ءص$

$ص = جتاس$

$\frac{ءص}{ءس} = -جاس$

$ءس = \frac{ءص}{-جاس}$

$ق = -٢ص \qquad ءهـ = هـ^{ص} ءص$

$ءق = -٢ءص \xrightarrow{\int} هـ = هـ^{ص}$

$= -٢ص \, هـ^{ص} + \int ٢هـ^{ص} ءص$

$= -٢ص \, هـ^{ص} + ٢هـ^{ص} + جـ$

$= -٢جتاس \, هـ^{جتاس} + ٢هـ^{جتاس} + جـ$

---

⑬ $\int قا^{٢}س \, هـ^{\sqrt{ظاس}} ءس$ (كتاب)

الحل

$= \int قا^{٢}س \, هـ^{ص} \frac{٢ص ءص}{قا^{٢}س}$

$= \int ٢ص \, هـ^{ص} ءص$

$ص^{٢} = ظاس$

$٢ص \frac{ءص}{ءس} = قا^{٢}س$

$ءس = \frac{٢ص}{قا^{٢}س} ءص$

$ق = ٢ص \qquad ءهـ = هـ^{ص}$

$ءق = ٢ءص \longrightarrow هـ = هـ^{ص}$

$= ٢ص \, هـ^{ص} - \int ٢هـ^{ص} ءص$

$= ٢ص \, هـ^{ص} - ٢هـ^{ص} + جـ$

$= ٢\sqrt{ظاس} \, هـ^{\sqrt{ظاس}} - ٢هـ^{\sqrt{ظاس}} + جـ$

---

⑭ $\int \frac{-١}{س^{٢}} لو_{هـ} \frac{١}{س} ءس$

الحل

$= \int \frac{-١}{س^{٢}} لو_{هـ} ص \times -س^{٢} ءص$

$= \int لو_{هـ} ص \, ءص$

$ص = \frac{١}{س}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١}{س^{٢}}$

$ءس = -س^{٢} ءص$

$ق = لو_{هـ} ص \qquad ءهـ = ءص$

$ءق = \frac{١}{ص} ءص \xrightarrow{\int} هـ = ص$

$= ص \, لو_{هـ} ص - \int ءص$

$= ص \, لو_{هـ} ص - ص + جـ$

$= \frac{١}{س} لو_{هـ} \frac{١}{س} - \frac{١}{س} + جـ$

⑮ $\int$ قا^{٣}س ءس

الحل = $\int$ قا س قا^{٢}س ءس

ص = قا س   ءهـ = قا^{٢}س ءس

ءص = قا س ظا س ءس $\xleftarrow{\int}$ هـ = ظا س

= قا س ظا س − $\int$ قا س ظا^{٢}س ءس

= قا س ظا س − $\int$ قا س (قا^{٢}س − ١) ءس

= قا س ظا س − $\int$ (قا^{٣}س − قا س) ءس

$\int$ قا^{٣}س ءس = قا س ظا س − $\int$ قا^{٣}س ءس + $\int$ قا س ءس

٢$\int$ قا^{٣}س ءس = قا س ظا س + $\int$ قا س ءس

$\int$ قا^{٣}س ءس = $\frac{١}{٢}$ قا س ظا س + $\frac{١}{٢}$ لوهـ|قا س + ظا س| + جـ

الجزء الخامس :
تكاملات دوريه

تسمى التكاملات التي ينتج منها أثناء الحل نفس التكامل تكاملات دوريه يجب أن يكون نفس التكامل المطلوب وعكس في الإشاره

مثال (٦) جد كلاً من التكاملات الآتيه

① $\int$ هـ^{س} جتا٣س ءس   (الكتاب)

الحل ص = جتا٣س   ءهـ = هـ^{س} ءس

ءص = −٣جا٣س ءس $\xleftarrow{\int}$ هـ = هـ^{س}

= هـ^{س} جتا٣س + $\int$ ٣هـ^{س} جا٣س ءس

* $\int$ ٣هـ^{س} جا٣س ءس

ص = جا٣س   ءهـ = ٣هـ^{س} ءس

ءص = ٣جتا٣س ءس $\xleftarrow{\int}$ هـ = ٣هـ^{س}

$\int$ هـ^{س} جتا٣س ءس = هـ^{س} جتا٣س + ٣هـ^{س} جا٣س − ٩$\int$ هـ^{س} جتا٣س ءس

١٠$\int$ هـ^{س} جتا٣س ءس = هـ^{س}(جتا٣س + ٣جا٣س)

$\int$ هـ^{س} جتا٣س ءس = $\frac{هـ^{س}}{١٠}$ (جتا٣س + ٣جا٣س) + جـ

② $\int$ هـ^{٢س} جا س ءس   (الكتاب)

الحل ص = جا س   ءهـ = هـ^{٢س}

ءص = جتا س ءس $\xleftarrow{\int}$ هـ = $\frac{١}{٢}$ هـ^{٢س}

= $\frac{١}{٢}$ هـ^{٢س} جا س − $\int$ $\frac{١}{٢}$ هـ^{٢س} جتا س ءس

* $\int$ $\frac{١}{٢}$ هـ^{٢س} جتا س ءس

ص = جتا س   ءهـ = $\frac{١}{٢}$ هـ^{٢س} ءس

ءص = −جا س ءس $\xleftarrow{\int}$ هـ = $\frac{١}{٤}$ هـ^{٢س}

$\int$ هـ^{٢س} جا س ءس = $\frac{١}{٢}$ هـ^{٢س} جا س − $\frac{١}{٤}$ هـ^{٢س} جتا س − $\int$ $\frac{١}{٤}$ هـ^{٢س} جا س ءس

$\frac{٥}{٤}$ $\int$ هـ^{٢س} جا س ءس = $\frac{١}{٢}$ هـ^{٢س} (جا س − $\frac{١}{٢}$ جتا س)

$\int$ هـ^{٢س} جا س ءس = $\frac{٢}{٥}$ هـ^{٢س} (جا س − $\frac{١}{٢}$ جتا س) + جـ

③ $\int$ ٢هـ^{س} جا س جتا س ءس   كتاب

الحل = $\int$ هـ^{س} جا٢س ءس

ص = جا٢س   ءهـ = هـ^{س} ءس

ءص = ٢جتا٢س ءس $\xleftarrow{\int}$ هـ = هـ^{س}

= هـ^{س} جا٢س − $\int$ ٢هـ^{س} جتا٢س ءس

* $\int$ ٢هـ^{س} جتا٢س ءس =

ص = جتا٢س   ءهـ = ٢هـ^{س}

ءص = −٢جا٢س $\xleftarrow{\int}$ هـ = ٢هـ^{س}

$\int$ هـ^{س} جا٢س ءس = هـ^{س} جا٢س − ٢هـ^{س} جتا٢س − $\int$ ٤هـ^{س} جا٢س ءس

٥$\int$ هـ^{س} جا٢س ءس = هـ^{س} (جا٢س − ٢جتا٢س)

$\int$ هـ^{س} جا٢س ءس = $\frac{هـ^{س}}{٥}$ (جا٢س − ٢جتا٢س) + جـ

④ $\int \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{ء س}$

الحل $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \qquad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$

$\text{ءس} = \text{س ءص} \quad ، \quad \text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{جا ص}\ \text{ء ص}$

أكمل الحل مثل السابق (دوري)

$\int \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{ءس} = \frac{1}{2}\text{س}\left(\text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right) + \text{جـ}$

الجزء السادس :
أفكار محيلة

مثال (٧) جد التكاملات الآتية

① $\int \frac{\text{س جتا س} - \text{جا س}}{\text{س}^2}\ \text{ء س}$

الحل $= \int \frac{\text{جتا س}}{\text{س}}\ \text{ءس} - \int \frac{\text{جا س}}{\text{س}^2}\ \text{ءس}$

$* \int \frac{\text{جا س}}{\text{س}^2}\ \text{ءس} = \int \text{س}^{-2}\ \text{جا س ءس}$

$\text{م} = \text{جا س} \qquad \text{ءهـ} = \text{س}^{-2}\ \text{ءس}$

$\text{ءم} = \text{جتا س ءس} \xrightarrow{\int} \text{هـ} = \frac{-1}{\text{س}}$

$\int \frac{\text{جا س}}{\text{س}^2}\ \text{ءس} = \frac{-\text{جا س}}{\text{س}} + \int \frac{\text{جتا س}}{\text{س}}\ \text{ءس}$

$* \int \frac{\text{س جتا س} - \text{جا س}}{\text{س}^2}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{جتا س}}{\text{س}}\ \text{ءس} + \frac{\text{جا س}}{\text{س}} - \int \frac{\text{جتا س}}{\text{س}}\ \text{ءس}$

$\int \frac{\text{س جتا س} - \text{جا س}}{\text{س}^2}\ \text{ءس} = \frac{\text{جا س}}{\text{س}} + \text{جـ}$

② $\int (\text{س}^9\ \text{قا}^2\text{س} + 9\text{س}^8\ \text{ظا س})\ \text{ءس}$

الحل $= \int \text{س}^9\ \text{قا}^2\text{س ءس} + \int 9\text{س}^8\ \text{ظا س ءس}$

$* \int \text{س}^9\ \text{قا}^2\text{س ءس} =$

$\text{م} = \text{س}^9 \qquad \text{ءهـ} = \text{قا}^2\text{س ءس}$

$\text{ءم} = 9\text{س}^8\ \text{ءس} \xrightarrow{\int} \text{هـ} = \text{ظا س}$

$= \text{س}^9\ \text{ظا س} - \int 9\text{س}^8\ \text{ظا س ءس}$

$\int (\text{س}^9\ \text{قا}^2\text{س} + 9\text{س}^8\ \text{ظا س})\ \text{ءس} =$

$\text{س}^9\ \text{ظا س} - \int 9\text{س}^8\ \text{ظا س ءس} + \int 9\text{س}^8\ \text{ظا س ءس}$

$= \text{س}^9\ \text{ظا س} + \text{جـ}$

مثال (٨) (٢٠١٦ ص)

إذا علمت أن $\int_1^{\text{هـ}} \text{س}^4\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{ءس} = \frac{4\text{هـ}^5 + 1}{25}$ ،

جد $\int_1^{\text{هـ}} \text{س}^4 (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2\ \text{ءس}$

الحل

$\text{م} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 \qquad \text{ءهـ} = \text{س}^4\ \text{ءس}$

$\text{ءم} = \frac{2}{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{ءس} \xrightarrow{\int} \text{هـ} = \frac{\text{س}^5}{5}$

$= \frac{\text{س}^5}{5}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 \Big|_1^{\text{هـ}} - \int_1^{\text{هـ}} \frac{2}{5}\text{س}^4\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س ءس}$

$= \frac{\text{س}^5}{5}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 \Big|_1^{\text{هـ}} - \frac{2}{5}\int_1^{\text{هـ}} \text{س}^4\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س ءس}$

$= \frac{\text{هـ}^5}{5}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ})^2 - \frac{1}{5}(\text{لو}_{\text{هـ}}1)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{4\text{هـ}^5 + 1}{25}\right)$

$= \frac{\text{هـ}^5}{5} - \frac{8\text{هـ}^5 + 2}{125} = \frac{17\text{هـ}^5 - 2}{125}$

مثال (٩) (٢٠١٧ ص)

إذا كان $\int_0^{\pi} \frac{\text{جتا س}}{(\text{س}+2)^2}\ \text{ءس} = \text{أ}$ ، أ ثابت

جد بدلالة أ قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا 2س}}{\text{س}+1}\ \text{ءس}$

الحل $\text{م} = \frac{1}{\text{س}+1} \qquad \text{ءهـ} = \text{جا 2س}$

$\text{ءم} = \frac{-1}{(\text{س}+1)^2}\ \text{ءس} \xrightarrow{\int} \text{هـ} = \frac{-1}{2}\text{جتا 2س}$

$= \frac{-\text{جتا 2س}}{2(\text{س}+1)}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا 2س}}{2(\text{س}+1)^2}$

$\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا 2س}}{2(\text{س}+1)^2}\ \text{ءس}$

$* \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا 2س}}{(\text{س}+1)^2}\ \text{ءس} =$

←

ص = ٢ س

$\frac{ءص}{ءس} = ٢ \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{٢}$

س = ٠ ، ص = ٠
س = $\frac{\pi}{٢}$ ← ص = π

$= \int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جتا ص}}{٢(س+١)^{٢}} \frac{ءص}{٢}$

$= \int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جتا ص}}{٤(\frac{ص}{٢}+١)^{٢}} ءص$

$= \int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جتا ص}}{\frac{\cancel{٤}(ص+٢)^{٢}}{\cancel{٤}}} ءص$

$= \int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جتا ص}}{(ص+٢)^{٢}} ءص = أ$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا ٢س}}{س+١} ءس = \frac{١}{\pi+٢} + \frac{١}{٢} - أ$

مثال (١٠)

إذا كان ق(٢) = ٧ ، هـ(٢) = ٥
ق(٤) = ٦ ، هـ(٤) = ١٠ ، $\int_{٢}^{٤} هـ ءق = ١٣$
أوجد $\int_{٢}^{٤} ق . ءهـ$

الحل $\int_{٢}^{٤} ق . ءهـ$

ق ءهـ

$ءق \xrightarrow{-2} هـ$

$= ق . هـ \Big|_{٢}^{٤} - \int_{٢}^{٤} هـ ءق$

= ق(٤) × هـ(٤) − ق(٢) × هـ(٢) − ١٣

= ٦ × ١٠ − ٧ × ٥ − ١٣ = ١٢

مثال (١١)

إذا كان ق(٣) = ٧ ، قَ(٣) = ٢
ق(−١) = ٥ ، قَ(−١) = ٤ ، أوجد
$\int_{-١}^{٣} س قً(س) ءس$

الحل $\int_{-١}^{٣} س قً(س) ءس$

ل = س ءهـ = قً(س) ءس

$ءل = ءس \xrightarrow{-2} هـ = قَ(س)$

$= س قَ(س) \Big|_{-١}^{٣} - \int_{-١}^{٣} قَ(س) ءس$

$= س قَ(س) - ق(س) \Big|_{-١}^{٣}$

= (٣قَ(٣) − ق(٣)) − (−١قَ(−١) − ق(−١))

= ١٠ − ٢ = ٨

مثال (١٢)

إذا كان $\int_{-١}^{٥} ق(ص) ءس = ٤$
ق(٥) = ٣ ، ق(−١) = ٤ ، أوجد
$\int_{٢}^{-١} س قَ(٣-٢س) ءس$

الحل

ص = ٣ − ٢س
$\frac{ءص}{ءس} = -٢$
$ءس = \frac{ءص}{-٢}$
س = −١ ← ص = ٥
س = ٢ ← ص = −١

$= \int_{-١}^{٥} س قَ(ص) \frac{ءص}{-٢}$

$= \int_{-١}^{٥} \frac{-١}{٢} س قَ(ص) ءص$

$= \int_{-١}^{٥} \frac{ص-٣}{2} قَ(ص) ءص$

$ل = \frac{ص-٣}{٤}$ ءهـ = قَ(ص) ءص

$ءل = \frac{١}{٤} ءص \xrightarrow{-2} هـ = ق(ص)$

$= \frac{ص-٣}{٤} ق(ص) \Big|_{-١}^{٥} - \frac{١}{٤}\int_{-١}^{٥} ق(ص)$

$= \frac{١}{٢} ق(٥) + ق(-١) - \frac{١}{٤} \times ٤$

$= \frac{١}{٢} \times ٣ + ٤ - ١ = \frac{٩}{٢}$

مثال(١٣) (كتاب + ٢٠٩ ص)

إذا كان ق(س) اقتران قابل للاشتقام ∈ ح وكان $\int_{١}^{٢} \text{ق(س)}\ \text{دس} = ١٠$ ، ق(٢)=٣
ق(١) = −١ ، جد $\int^{١} \text{س}^{٥}\ \text{قَ}(\text{س}^{٣}+١)\ \text{دس}$

الحل $\int^{١} \text{س}^{٥}\ \text{قَ}(\text{س}^{٣}+١)\ \text{دس}$

ص = س^{٣} + ١
$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢}$
دس = $\frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}}$

س = ٠ ← ص = ١
س = ١ ← ص = ٢

$= \int_{١}^{٢} \text{س}^{٥}\ \text{قَ}(\text{ص})\ \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}}$

$= \int_{١}^{٢} \frac{١}{٣} \text{س}^{٣}\ \text{قَ}(\text{ص})\ \text{دص}$

$= \int_{١}^{٢} \frac{١}{٣} (\text{ص}-١)\ \text{قَ}(\text{ص})\ \text{دص}$

ل = $\frac{١}{٣}$(ص−١) دهـ = قَ(ص)دص

دل = $\frac{١}{٣}$ دص $\xrightarrow{-\int}$ هـ = ق(ص)

$= \frac{١}{٣}(\text{ص}-١)\ \text{ق(ص)} \Big|_{١}^{٢} - \frac{١}{٣}\int_{١}^{٢} \text{ق(ص)}\ \text{دص}$

$= \frac{١}{٣}\text{ق}(٢) - ٠ - \frac{١}{٣} \times ١٠$

$= ١ - \frac{١٠}{٣} = \frac{-٧}{٣}$

ورقة عمل (٧)

السؤال الأول :

أوجد التكاملات الآتية

① $\int \frac{\text{س}}{\text{قا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$ ٢٠٠٨ ص

الجواب $\frac{1}{2}\text{س}^2 + \frac{1}{4}\text{س جا٢س} + \frac{1}{8}\text{جتا٢س} + \text{جـ}$

---

② $\int \text{س}^2\,\text{جتاس ءس}$

الجواب $\text{س}^2\text{جاس} + \text{٢س جتاس} - \text{٢جاس} + \text{جـ}$

---

③ $\int \text{س}^3\,\text{جتاس}^2\,\text{ءس}$

الجواب $\frac{1}{2}\text{س}^2\text{جاس}^2 + \frac{1}{2}\text{جتاس}^2 + \text{جـ}$

---

④ $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\,\text{ءس}$

الجواب $-2\sqrt{\text{س}}\,\text{جتا}\sqrt{\text{س}} + 2\,\text{جا}\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

---

⑤ $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^3\text{س}}\,\text{ءس}$ (١٩٩٧)

الجواب $\frac{1}{2}\text{س قا}^2\text{س} - \frac{1}{2}\text{ظاس} + \text{جـ}$

---

⑥ $\int (\text{س جتا}^2\text{س} - \text{س جا}^2\text{س})\,\text{ءس}$

الجواب $\frac{1}{2}\text{س جا٢س} + \frac{1}{4}\text{جتا٢س} + \text{جـ}$

---

⑦ $\int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س ءس}$

الجواب $\frac{\text{س}^2}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{4}\text{س}^2 + \text{جـ}$

---

⑧ $\int \frac{\text{٢س}}{\text{س}^2+9}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+9)\,\text{ءس}$

الجواب $\frac{1}{4}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+9)\right)^2 + \text{جـ}$

---

⑨ $\int \text{قا}^2\sqrt{\text{س}}\,\text{ءس}$ ٢٠١١ ص

الجواب $2\sqrt{\text{س}}\,\text{ظا}\sqrt{\text{س}} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا}\sqrt{\text{س}}| + \text{جـ}$

---

⑩ $\int \text{هـ}^{(\text{س} + 3\text{لو س})}\,\text{ءس}$

الجواب

$\text{س}^3\text{هـ}^{\text{س}} - 3\text{س}^2\text{هـ}^{\text{س}} + 6\text{س هـ}^{\text{س}} - 6\,\text{هـ}^{\text{س}}$

---

⑪ $\int \text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{٣س}}\,\text{ءس}$

الجواب: $\frac{1}{3}\text{س}^2\text{هـ}^{\text{٣س}} - \left(\frac{2}{9}\text{س هـ}^{\text{٣س}} - \frac{2}{27}\text{هـ}^{\text{٣س}}\right) + \text{جـ}$

---

⑫ $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{٢س}+1}}\,\text{ءس}$

الجواب $\text{س}\sqrt{\text{٢س}+1} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{\text{٢س}+1}\right)^3 + \text{جـ}$

---

⑬ $\int (\text{٢س}-1)\,\text{جا٢س ءس}$ ٢٠١١ ش

الجواب: $-\frac{1}{2}(\text{٢س}-1)\,\text{جتا٢س} + \frac{1}{2}\text{جا٢س} + \text{جـ}$

---

⑭ $\int \text{س}^2\,\text{جتا٢س ءس}$

الجواب: $\frac{\text{س}^2}{2}\text{جا٢س} + \frac{\text{س}}{2}\text{جتا٢س} - \frac{\text{جا٢س}}{4} + \text{جـ}$

---

⑮ $\int \frac{\text{س جتاس}}{\text{جا}^3\text{س}}\,\text{ءس}$ ٢٠١٢ ص

الجواب: $-\frac{\text{س}}{2}\text{ظتا}^2\text{س} - \frac{1}{2}\text{ظتاس} - \frac{\text{س}}{2} + \text{جـ}$

---

⑯ $\int \sqrt{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س ءس}$

الجواب $\frac{2}{3}(\sqrt{\text{س}})^3\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{4}{9}(\sqrt{\text{س}})^3 + \text{جـ}$

---

⑰ $\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س ءس}$

الجواب: $\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{(\text{ن}+1)^2}\text{س}^{\text{ن}+1} + \text{جـ}$

⑱ $\int \frac{هـ^{س}}{\text{قتا} س} \, ءس$ (٢٠٠٩) ش

الجواب: $\frac{١}{٢} هـ^{س} (\text{جاس} - \text{جتاس}) + ج$

---

⑲ $\int هـ^{س} \, \text{جتاس} \, ءس$

الجواب: $\frac{١}{٢} هـ^{س} (\text{جتاس} + \text{جاس}) + ج$

السؤال الثاني:

إذا كان $\int_{١}^{هـ} س \, ق(س) = ٤$ ، فأوجد

$\int_{١}^{٢} هـ^{س} \, ق'(\text{لوهـ}) \, ءس$ $\boxed{٨}$

السؤال الثالث:

إذا علمت أن $ق(١) = ٣$ ، $ق(٠) = -١$

وكان $\int_{٠}^{١} ق(س) \, ءس = ٥$ ، فأوجد $\int_{٠}^{١} (س+١) \, ق'(س) \, ءس$

$\boxed{٢}$

السؤال الرابع

إذا كان $\int_{٢}^{١} ق(س) \, ءس = ٢$

وكان $ق(٢) = ٤$ ، $ق'(٢) = ١$ ، $ق(١) = ٥$

$ق'(١) = ٥$ ، فأوجد $\int_{١}^{٢} س^{٢} \, ق''(س) \, ءس$ $\boxed{-١١}$

السؤال الخامس (١٩٩٨)

إذا كان م(س) معكوس مشتقة الاقتران ق(س)

حيث $م(١) = ٣$ ، $م(٣) = ٥$ ، $ق(١) = ١$ ،

$ق'(٣) = ٢$ ، فأوجد $\int_{١}^{٣} ٢س \, ق'(س) \, ءس$ $\boxed{٦}$

الدرس الثامن
التكامل بالكسور الجزئية

يسمى الاقتران $\text{ل(س)} = \frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ اقتران نسبي حيث يمكن كتابته على صورة $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ ، ق(س)، هـ(س) كثيري حدود

تذكر

بعض طرق اجراء تكامل الاقتران النسبي

① التحليل

مثال $\int \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}}{\text{س} + \text{٣}}\,\text{دس} = \int (\text{س} - \text{٣})\,\text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{جـ}$

② اذا وجد علاقة بين مشتقة المقام والبسط يمكن أن يحسب التكامل باستخدام التعويض أو اللوغاريتم

مثال① $\int \frac{\text{س} - \text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{س} - \text{٢}}{(\text{س} - \text{٢})(\text{س} - \text{٣})}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{١}}{\text{س} - \text{٣}}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - \text{٣}| + \text{جـ}$

② $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}}\,\text{دس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}|$

وحله أيضاً تعويض

③ اذا كان الاقتران نسبي وفشلت الطرق السابقة في حساب التكامل في هذه الحالة نستخدم الكسور الجزئية

طريقة تجزئة الكسر

مثال $\text{ق(س)} = \frac{\text{٢س} + \text{٧}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٢}}$

الحل $\frac{\text{٢س} + \text{٧}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٢}} = \frac{\text{٢س} + \text{٧}}{(\text{س} + \text{٢})(\text{س} - \text{١})}$

$\frac{\text{٢س} + \text{٧}}{(\text{س} + \text{٢})(\text{س} - \text{١})} = \frac{\text{أ}}{\text{س} + \text{٢}} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - \text{١}}$

$\frac{\text{٢س} + \text{٧}}{(\text{س} + \text{٢})(\text{س} - \text{١})} = \frac{\text{أ}(\text{س} - \text{١})}{(\text{س} + \text{٢})(\text{س} - \text{١})} + \frac{\text{ب}(\text{س} + \text{٢})}{(\text{س} + \text{٢})(\text{س} - \text{١})}$

$\text{٢س} + \text{٧} = \text{أ}(\text{س} - \text{١}) + \text{ب}(\text{س} + \text{٢})$

$\text{س} = \text{١} \leftarrow \text{٩} = \text{٠} + \text{٣ب} \leftarrow \boxed{\text{ب} = \text{٣}}$

$\text{س} = -\text{٢} \leftarrow \text{٣} = -\text{٣أ} + \text{٠} \leftarrow \boxed{\text{أ} = -\text{١}}$

$\frac{\text{٢س} + \text{٧}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٢}} = \frac{-\text{١}}{\text{س} + \text{٢}} + \frac{\text{٣}}{\text{س} - \text{١}}$

الجزء الأول
درجة البسط أقل من درجة المقام

يتم تجزئة الكسر ثم تكامل

مثال أوجد التكاملات الآتية

① $\int \frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}}\,\text{دس}$

الحل $\frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}} = \frac{\text{٢}}{(\text{س} - \text{١})(\text{س} + \text{١})} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - \text{١}} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + \text{١}}$

$\text{٢} = \text{أ}(\text{س} + \text{١}) + \text{ب}(\text{س} - \text{١})$

$\text{س} = \text{١} \leftarrow \text{٢} = \text{٢أ} \leftarrow \boxed{\text{أ} = \text{١}}$

$\text{س} = -\text{١} \leftarrow \text{٢} = -\text{٢ب} \leftarrow \boxed{\text{ب} = -\text{١}}$

$\int \frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}}\,\text{دس} = \int \left(\frac{\text{١}}{\text{س} - \text{١}} - \frac{\text{١}}{\text{س} + \text{١}}\right)\text{دس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - \text{١}| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} + \text{١}| + \text{جـ}$

٢٠١٤ ش

② $\int \frac{\text{دس}}{\text{س}^٢-٥\text{س}+٦}$

الحل $\frac{١}{\text{س}^٢-٥\text{س}+٦} = \frac{١}{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)}$

$\frac{١}{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-٢} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-٣}$

$١ = \text{أ}(\text{س}-٣) + \text{ب}(\text{س}-٢)$

$\text{س}=٢ \rightarrow ١ = -\text{أ} \rightarrow \boxed{\text{أ}=-١}$

$\text{س}=٣ \rightarrow ١ = \text{ب} \rightarrow \boxed{\text{ب}=١}$

$\int \frac{\text{دس}}{\text{س}^٢-٥\text{س}+٦} = \int \left(\frac{١}{\text{س}-٣} - \frac{١}{\text{س}-٢}\right)\text{دس}$

$= \text{لو}_\text{هـ}|\text{س}-٣| - \text{لو}_\text{هـ}|\text{س}-٢| + \text{جـ}$

٢٠١٤ ص

③ $\int \frac{\text{س}-١٣}{٢\text{س}^٢-٧\text{س}+٣}$ (كتاب)

الحل $\frac{\text{س}-١٣}{٢\text{س}^٢-٧\text{س}+٣} = \frac{\text{س}-١٣}{(٢\text{س}-١)(\text{س}-٣)}$

$\frac{\text{س}-١٣}{(٢\text{س}-١)(\text{س}-٣)} = \frac{\text{أ}}{(٢\text{س}-١)} + \frac{\text{ب}}{(\text{س}-٣)}$

$\text{س}-١٣ = \text{أ}(\text{س}-٣) + \text{ب}(٢\text{س}-١)$

$\text{س}=\frac{١}{٢} \rightarrow \frac{١}{٢}-١٣ = \text{أ}(\frac{١}{٢}-٣) \rightarrow \boxed{\text{أ}=٥}$

$\text{س}=٣ \rightarrow -١٠ = ٥\text{ب} \rightarrow \boxed{\text{ب}=-٢}$

$\int \frac{\text{س}-١٣}{٢\text{س}^٢-٧\text{س}+٣} = \int \left(\frac{٥}{٢\text{س}-١} - \frac{٢}{\text{س}-٣}\right)\text{دس}$

$= \frac{٥}{٢}\text{لو}_\text{هـ}|٢\text{س}-١| - ٢\,\text{لو}_\text{هـ}|\text{س}-٣| + \text{جـ}$

④ $\int_{٠}^{١} \frac{٦\text{س}+٧}{\text{س}^٢-\text{س}-٦}\,\text{دس}$

الحل $\frac{٦\text{س}+٧}{\text{س}^٢-\text{س}-٦} = \frac{٦\text{س}+٧}{(\text{س}-٣)(\text{س}+٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-٣} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+٢}$

$\int_{٠}^{١} \frac{٦\text{س}+٧}{\text{س}^٢-\text{س}-٦}\,\text{دس} = \int_{٠}^{١} \left(\frac{\text{أ}}{\text{س}-٣} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+٢}\right)\text{دس}$

$٦\text{س}+٧ = \text{أ}(\text{س}+٢) + \text{ب}(\text{س}-٣)$

$\text{س}=٣ \rightarrow ٢٥ = ٥\text{أ} \rightarrow \boxed{\text{أ}=٥}$

$\text{س}=-٢ \rightarrow -٥ = -٥\text{ب} \rightarrow \boxed{\text{ب}=١}$

$= \int_{٠}^{١} \left(\frac{٥}{\text{س}-٣} + \frac{١}{\text{س}+٢}\right)\text{دس}$

$= ٥\,\text{لو}_\text{هـ}|\text{س}-٣| + \text{لو}_\text{هـ}|\text{س}+٢| \Big|_{٠}^{١}$

$= (٥\,\text{لو}_\text{هـ}٢ + \text{لو}_\text{هـ}٣) - (٥\,\text{لو}_\text{هـ}٣ + \text{لو}_\text{هـ}٢) = \text{لو}_\text{هـ}\frac{١٦}{٨١}$

⑤ $\int_{١}^{٣} \frac{٤\text{س}+١}{\text{س}^٢-\text{س}-٢}\,\text{دس}$

الحل $\frac{٤\text{س}+١}{\text{س}^٢-\text{س}-٢} = \frac{٤\text{س}+١}{(\text{س}-٢)(\text{س}+١)}$

$\frac{٤\text{س}+١}{(\text{س}-٢)(\text{س}+١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-٢} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+١}$

$٤\text{س}+١ = \text{أ}(\text{س}+١) + \text{ب}(\text{س}-٢)$

$\text{س}=٢ \rightarrow ٩ = ٣\text{أ} \rightarrow \boxed{\text{أ}=٣}$

$\text{س}=-١ \rightarrow -٣ = -٣\text{ب} \rightarrow \boxed{\text{ب}=١}$

$\int_{١}^{٣} \frac{٤\text{س}+١}{\text{س}^٢-\text{س}-٢}\,\text{دس} = \int_{١}^{٣} \left(\frac{٣}{\text{س}-٢} + \frac{١}{\text{س}+١}\right)\text{دس}$

$= ٣\,\text{لو}_\text{هـ}|\text{س}-٢| + \text{لو}_\text{هـ}|\text{س}+١| \Big|_{١}^{٣}$

$= ٣\,\text{لو}_\text{هـ}١ + \text{لو}_\text{هـ}٤ - (٣\,\text{لو}_\text{هـ}١ + \text{لو}_\text{هـ}٢)$

$= \text{لو}_\text{هـ}٤ - \text{لو}_\text{هـ}٢ = \text{لو}_\text{هـ}٢$

٢٠١٤ ش

⑥ $\int_{١}^{٤} \frac{|\text{س}-١|}{\text{س}^٢-٥\text{س}+٦}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل $|\text{س}-١| \rightarrow \text{س}=١$

$\text{س}-١$: $- - -\ ١\ + + +\ ٤$ $\quad \boxed{\text{س}-١}$

$= \int_{١}^{٤} \frac{\text{س}-١}{\text{س}^٢-٥\text{س}+٦}\,\text{دس}$

$\frac{\text{س}-١}{\text{س}^٢-٥\text{س}+٦} = \frac{\text{س}-١}{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-٢} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-٣}$

$\text{س}-١ = \text{أ}(\text{س}-٣) + \text{ب}(\text{س}-٢)$

$\text{س}=٢ \rightarrow ١ = -\text{أ} \rightarrow \boxed{\text{أ}=-١}$

$\text{س}=٣ \rightarrow ٢ = \text{ب} \quad \boxed{\text{ب}=٢}$

$\int_{١}^{٤} \frac{\text{س}-١}{\text{س}^٢-٥\text{س}+٦}\,\text{دس} = \int_{١}^{٤} \left(\frac{٢}{\text{س}-٣} - \frac{١}{\text{س}-٢}\right)\text{دس}$

$= ٢\,\text{لو}_\text{هـ}|\text{س}-٣| - \text{لو}_\text{هـ}|\text{س}-٢| \Big|_{١}^{٤}$

$= ٢\,\text{لو}_\text{هـ}١ - \text{لو}_\text{هـ}٢ - (٢\,\text{لو}_\text{هـ}٢ - \text{لو}_\text{هـ}١)$

$= -\text{لو}_\text{هـ}٢ - ٢\,\text{لو}_\text{هـ}٢ = -٣\,\text{لو}_\text{هـ}٢$

⑦ $\int \frac{\text{دس}}{\text{س}(\text{س}-٢)(\text{س}+٣)}$

الحل $\frac{١}{\text{س}(\text{س}-٢)(\text{س}+٣)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-٢} + \frac{\text{جـ}}{\text{س}+٣}$

$١ = \text{أ}(\text{س}-٢)(\text{س}+٣) + \text{ب}\,\text{س}(\text{س}+٣) + \text{جـ}\,\text{س}(\text{س}-٢)$

$\text{س}=٠ \rightarrow ١ = -٦\text{أ} \rightarrow \text{أ} = \frac{-١}{٦}$

$\text{س}=٢ \rightarrow ١ = ١٠\text{ب} \rightarrow \text{ب} = \frac{١}{١٠}$

$\text{س} = -٣ \rightarrow ١ = ١٥\,\text{جـ} \rightarrow \text{جـ} = \frac{١}{١٥}$

$\int \frac{\text{دس}}{\text{س}(\text{س}-٢)(\text{س}+٣)} = \int \left(\frac{-\frac{١}{٦}}{\text{س}} + \frac{\frac{١}{١٠}}{\text{س}-٢} + \frac{\frac{١}{١٥}}{\text{س}+٣}\right)\text{دس}$

$= -\frac{١}{٦}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \frac{١}{١٠}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٢| + \frac{١}{١٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٣| + \text{جـ}$

الجزء الثاني
درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام

خطوات الحل

① نقسم قسمة طويلة

② نكتب الاقتران بصورة

$\text{ق}(\text{س}) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

③ $\int \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}\,\text{دس}$

$\int \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$ له حالتين

أ المقسوم عليه خطي لوغاريتم مباشره

ب المقسوم عليه درجة ثانيه

يحل بتجزئة الكسور (الجزء الأول)

مثال أوجد التكاملات الآتية

① $\int \frac{٢\text{س}^٢+٣}{\text{س}^٢-\text{س}}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل

$$\begin{array}{r|l} & ٢ \\ \hline \text{س}^٢-\text{س} & ٢\text{س}^٢+٣ \\ & \underline{\mp ٢\text{س}^٢ \pm ٢\text{س}} \\ & ٢\text{س}+٣ \end{array}$$

$\frac{٢\text{س}^٢+٣}{\text{س}^٢-\text{س}} = ٢ + \frac{٢\text{س}+٣}{\text{س}^٢-\text{س}}$

$\frac{٢\text{س}+٣}{\text{س}^٢-\text{س}} = \frac{٢\text{س}+٣}{\text{س}(\text{س}-١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-١}$

$٢\text{س}+٣ = \text{أ}(\text{س}-١) + \text{ب}\,\text{س}$

$\text{س} = ٠ \rightarrow ٣ = -\text{أ} \rightarrow \boxed{\text{أ} = -٣}$

$\text{س} = ١ \rightarrow \boxed{٥ = \text{ب}}$

$\int \frac{٢\text{س}^٢+٣}{\text{س}^٢-\text{س}}\,\text{دس} = \int \left(٢ - \frac{٣}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}-١}\right)\text{دس}$

$= ٢\text{س} - ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١| + \text{جـ}$

② $\int \frac{\text{س}^٢+٣\text{س}-١١}{\text{س}^٢+٢\text{س}-١٥}\,\text{دس}$

الحل

$$\begin{array}{r|l} & ١ \\ \hline \text{س}^٢+٢\text{س}-١٥ & \text{س}^٢+٣\text{س}-١١ \\ & \underline{\mp \text{س}^٢ \mp ٢\text{س} \pm ١٥} \\ & \text{س}+٤ \end{array}$$

$\frac{\text{س}^٢+٣\text{س}-١١}{\text{س}^٢+٢\text{س}-١٥} = ١ + \frac{\text{س}+٤}{\text{س}^٢+٢\text{س}-١٥}$

$\frac{\text{س}+٤}{\text{س}^٢+٢\text{س}-١٥} = \frac{\text{س}+٤}{(\text{س}+٥)(\text{س}-٣)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}+٥} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-٣}$

$\text{س}+٤ = \text{أ}(\text{س}-٣) + \text{ب}(\text{س}+٥)$

$\text{س} = -٥ \rightarrow -١ = -٨\text{أ} \rightarrow \text{أ} = \frac{١}{٨}$

$\text{س} = ٣ \rightarrow ٧ = ٨\text{ب} \rightarrow \text{ب} = \frac{٧}{٨}$

$\int \frac{\text{س}^٢+٣\text{س}-١١}{\text{س}^٢+٢\text{س}-١٥}\,\text{دس} = \int \left(١ + \frac{\frac{١}{٨}}{\text{س}+٥} + \frac{\frac{٧}{٨}}{\text{س}-٣}\right)\text{دس}$

$= \text{س} + \frac{١}{٨}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٥| + \frac{٧}{٨}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٣| + \text{جـ}$

③ $\int \frac{\text{س}^٥+٢}{\text{س}^٢-١}\,\text{دس}$ ٢٠١٣ ص

الحل

$$\begin{array}{r|l} & \text{س}^٣+\text{س} \\ \hline \text{س}^٢-١ & \text{س}^٥+٢ \\ & \underline{\mp \text{س}^٥ \pm \text{س}^٣} \\ & \text{س}^٣+٢ \\ & \underline{\mp \text{س}^٣ \pm \text{س}} \\ & \text{س}+٢ \end{array}$$

$\frac{\text{س}^٥+٢}{\text{س}^٢-١} = \text{س}^٣+\text{س} + \frac{\text{س}+٢}{\text{س}^٢-١}$

$\frac{\text{س}+٢}{\text{س}^٢-١} = \frac{\text{س}+٢}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-١} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+١}$

$\text{س}+٢ = \text{أ}(\text{س}+١) + \text{ب}(\text{س}-١)$

$\text{س} = ١ \rightarrow ٣ = ٢\text{أ} \quad \boxed{\text{أ} = \frac{٣}{٢}}$

$\text{س} = -١ \rightarrow ١ = -٢\text{ب} \rightarrow \boxed{\text{ب} = \frac{١}{٢}}$

$\int \frac{\text{س}^٥+٢}{\text{س}^٢-١}\,\text{دس} = \int \left(\text{س}^٣+\text{س} - \frac{\frac{١}{٢}}{\text{س}+١} + \frac{\frac{٣}{٢}}{\text{س}-١}\right)\text{دس}$

$= \frac{\text{س}^٤}{٤} + \frac{\text{س}^٢}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \frac{٣}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١| + \text{جـ}$

④ $\int \frac{\text{س}^3+\text{س}}{\text{س}-1}\,\text{دس}$

الحل

$$\begin{array}{r|l} \text{س}^2+\text{س}+2 & \\ \hline \text{س}^3+\text{س} & \text{س}-1 \\ \mp\text{س}^3\pm\text{س}^2 & \\ \hline \text{س}^2+\text{س} & \\ \mp\text{س}^2\pm\text{س} & \\ \hline 2\text{س} & \\ \mp2\text{س}\pm2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\frac{\text{س}^3+\text{س}}{\text{س}-1} = \text{س}^2+\text{س}+2+\frac{2}{\text{س}-1}$$

$$\int \frac{\text{س}^3+\text{س}}{\text{س}-1}\,\text{دس} = \int\left(\text{س}^2+\text{س}+2+\frac{2}{\text{س}-1}\right)\text{دس}$$

$$= \frac{\text{س}^3}{3}+\frac{\text{س}^2}{2}+2\text{س}+2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1|+\text{جـ}$$

ملاحظة

① إذا كان المقام من الدرجة الثانية وله جذر واحد فقط يحل أجزاء

② المطالب في منهاج الوزارة أن يكون المقسوم عليه من الدرجة الثانية وإذا ورد أكبر من الدرجة الثانية يحل أجزاء بشرط له جذر واحد مرفقا

---

⑤ $\int \frac{5\text{س}^2-7\text{س}-8}{\text{س}^2-2\text{س}+1}\,\text{دس}$

الحل

$$\begin{array}{r|l} 5 & \\ \hline 5\text{س}^2-7\text{س}-8 & \text{س}^2-2\text{س}+1 \\ 5\text{س}^2\mp10\text{س}\pm5 & \\ \hline 3\text{س}-13 & \end{array}$$

$$\frac{5\text{س}^2-7\text{س}-8}{\text{س}^2-2\text{س}+1} = 5+\frac{3\text{س}-13}{\text{س}^2-2\text{س}+1}$$

$$\frac{3\text{س}-13}{\text{س}^2-2\text{س}+1} = \frac{3\text{س}-13}{(\text{س}-1)^2}$$

$$\int \frac{5\text{س}^2-7\text{س}-8}{\text{س}^2-2\text{س}+1}\,\text{دس} = \int 5\,\text{دس}+\int\frac{3\text{س}-13}{(\text{س}-1)^2}\,\text{دس}$$

$$\int (3\text{س}-13)(\text{س}-1)^{-2}\,\text{دس}$$

$\text{م} = 3\text{س}-13$ $\qquad$ $\text{دهـ} = (\text{س}-1)^{-2}\,\text{دس}$

$\text{دم} = 3\,\text{دس}$ $\swarrow$ $\text{هـ} = \frac{-1}{\text{س}-1}$

$$= \frac{13-3\text{س}}{\text{س}-1}+\int\frac{3}{\text{س}-1}\,\text{دس}$$

$$= \frac{13-3\text{س}}{\text{س}-1}+3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1|$$

$$\int \frac{5\text{س}^2-7\text{س}-8}{\text{س}^2-2\text{س}+1}\,\text{دس} = 5\text{س}+\frac{13-3\text{س}}{\text{س}-1}+3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1|+\text{جـ}$$

---

⑥ $\int \frac{2\text{س}+1}{(\text{س}-2)^3}\,\text{دس}$

الحل $= \int (2\text{س}+1)(\text{س}-2)^{-3}\,\text{دس}$

$\text{م} = 2\text{س}+1$ $\qquad$ $\text{دهـ} = (\text{س}-2)^{-3}\,\text{دس}$

$\text{دم} = 2\,\text{دس}$ $\swarrow$ $\text{هـ} = \frac{(\text{س}-2)^{-2}}{-2}$

$$\frac{-2\text{س}-1}{2(\text{س}-2)^2}+\int(\text{س}-2)^{-2}\,\text{دس}$$

$$= \frac{-2\text{س}-1}{2(\text{س}-2)^2}-\frac{1}{\text{س}-2}+\text{جـ}$$

الجزء الثالث

استخدام التكامل بالتعويض والأجزاء ثم كسور جزئية

مثال أوجد التكاملات الآتية

① $\int_{9}^{16} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}-4}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ $\qquad$ $\text{س} = 9 \leftarrow \text{ص} = 3$

$\text{س} = 16 \leftarrow \text{ص} = 4$

$\text{ص}^2 = \text{س} \leftarrow 2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 \leftarrow \text{دس} = 2\text{ص}\,\text{دص}$

$$= \int_{3}^{4}\frac{\text{ص}}{\text{ص}^2-4}\times 2\text{ص}\,\text{دص} = \int_{3}^{4}\frac{2\text{ص}^2}{\text{ص}^2-4}\,\text{دص}$$

أكمل قسمة طويلة ← تجزئة كسور (حلها)

$$2+2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{5}{3}$$

---

② 2004 $\int \frac{\sqrt{\text{س}+1}+1}{\sqrt{\text{س}+1}-1}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل $\text{ص} = \sqrt{\text{س}+1} \leftarrow \text{ص}^2 = \text{س}+1$

$2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 \leftarrow \text{دس} = 2\text{ص}\,\text{دص}$

$$\int\frac{\text{ص}+1}{\text{ص}-1}\,2\text{ص}\,\text{دص} = \int\frac{2\text{ص}^2+2\text{ص}}{\text{ص}-1}\,\text{دص}$$

أكمل قسمة طويلة ← لوغاريتم

$$\left(\sqrt{\text{س}+1}\right)^2+4\sqrt{\text{س}+1}+4\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt{\text{س}+1}-1\right|+\text{جـ}$$

③ $\int \frac{١}{س - ٢\sqrt{س} - ٣} \, دس$

الحل $ص = \sqrt{س} \rightarrow ص^٢ = س$

$٢ص \frac{دص}{دس} = ١ \rightarrow دس = ٢ص \, دص$

$\int \frac{٢ص}{ص^٢ - ٢ص - ٣} \, دص$

أكمل بتجزئة الكسور حالة (١)

$\frac{٣}{٢} لو_{هـ} |\sqrt{س} - ٣| + \frac{١}{٢} لو_{هـ} |\sqrt{س} + ١| + جـ$

---

④ ٢٠٠٥ $\int \frac{١}{٢س - ١ + \sqrt{٢س + ١}} \, دس$

الحل $ص = \sqrt{٢س + ١} \rightarrow ص^٢ = ٢س + ١$

$٢ص \frac{دص}{دس} = ٢ \rightarrow دس = ص \, دص$

$= \int \frac{ص}{ص^٢ + ص - ٢} \, دص$

أكمل بتجزئة الكسور حالة (١)

$\frac{٢}{٣} لو_{هـ} |\sqrt{٢س+١} + ٢| + \frac{١}{٣} لو_{هـ} |\sqrt{٢س+١} - ١| + جـ$

---

⑤ $\int \frac{\sqrt[3]{س} - ١}{\sqrt[3]{س^٢} - ٤} \, دس$ (كتاب)

الحل $ص = \sqrt[3]{س} \rightarrow ص^٣ = س$

$٣ص^٢ \frac{دص}{دس} = ١ \rightarrow دس = ٣ص^٢ \, دص$

$= \int \frac{ص - ١}{ص^٢ - ٤} \times ٣ص^٢ \, دص$

$= \int \frac{٣ص^٣ - ٣ص^٢}{ص^٢ - ٤} \, دص$

أكمل قسمة طويلة ← تجزئة كسور (حالة ١)

$\frac{٣}{٢}(\sqrt[3]{س})^٢ - ٣\sqrt[3]{س} + ٣ لو_{هـ} |\sqrt[3]{س} - ٢| + ٩ لو_{هـ} |\sqrt[3]{س} + ٢| + جـ$

---

⑥ ٢٠١٠ ش $\int_{١}^{٨} \frac{٢ \, دس}{\sqrt[3]{س^٤} + ٤س + ٣\sqrt[3]{س^٢}}$

$س = ١ \rightarrow ص = ١$
$س = ٨ \rightarrow ص = ٢$

$ص = \sqrt[3]{س} \rightarrow ص^٣ = س$

$٣ص^٢ \frac{دص}{دس} = ١ \rightarrow دس = ٣ص^٢ \, دص$

$= \int_{١}^{٢} \frac{٦ص^٢}{ص^٤ + ٤ص^٣ + ٣ص^٢} \, دص$

$= \int_{١}^{٢} \frac{٦\cancel{ص^٢}}{\cancel{ص^٢}(ص^٢ + ٤ص + ٣)} \, دص$

$= \int_{١}^{٢} \frac{٦}{ص^٢ + ٤ص + ٣} \, دص$

أكمل بتجزئة الكسور (حالة ١)

$٣ لو_{هـ} \frac{٦}{٥}$

---

⑦ ٢٠٠٦ ص $\int \frac{١}{س + ٢س\sqrt[3]{س}} \, دس$

الحل $ص = \sqrt[3]{س} \rightarrow ص^٣ = س$

$٣ص^٢ \frac{دص}{دس} = ١ \rightarrow دس = ٣ص^٢ \, دص$

$= \int \frac{٣ص^٢}{ص^٣ + ٢ص^٤} \, دص = \int \frac{٣ص^٢ \, دص}{ص^٢(ص + ٢ص^٢)}$

$= \int \frac{٣}{٢ص^٢ + ص} \, دص$

أكمل بتجزئة الكسور حالة (١)

$٣ لو_{هـ} \left| \frac{\sqrt[3]{س}}{٢\sqrt[3]{س} + ١} \right| + جـ$

---

⑧ $\int \frac{١}{\sqrt{س} + \sqrt[3]{س}} \, دس$

الحل $ص = \sqrt[6]{س} \rightarrow ص^٦ = س$

$٦ص^٥ \frac{دص}{دس} = ١ \rightarrow دس = ٦ص^٥ \, دص$

$= \int \frac{٦ص^٥}{\sqrt{ص^٦} + \sqrt[3]{ص^٦}} \, دص = \int \frac{٦ص^٥}{ص^٣ + ص^٢} \, دص$

$= \int \frac{٦ص^٥}{ص^٢(ص + ١)} \, دص = \int \frac{٦ص^٣}{ص + ١} \, دص$

أكمل قسمة طويلة لوغاريتم

$٢(\sqrt[6]{س})^٣ - ٣(\sqrt[6]{س})^٢ + ٦\sqrt[6]{س} - ٦ لو_{هـ} |\sqrt[6]{س} + ١| + جـ$

---

⑨ ٢٠٠١ $\int \frac{١}{١ + هـ^{س}} \, دس$ (كتاب)

الحل $ص = هـ^{س} \rightarrow \frac{دص}{دس} = هـ^{س} \rightarrow دس = \frac{دص}{هـ^{س}}$

$= \int \frac{١}{١ + ص} \, \frac{دص}{ص} = \int \frac{١}{ص(ص + ١)} \, دص$

أكمل بتجزئة حالة (١)

$= لو_{هـ} \left| \frac{هـ^{س}}{١ + هـ^{س}} \right| + جـ$

---

⑩ $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} - هـ^{س} - ٢} \, دس$

الحل $ص = هـ^{س} \rightarrow \frac{دص}{دس} = هـ^{س} \rightarrow دس = \frac{دص}{هـ^{س}}$

$= \int \frac{ص}{ص^٢ - ص - ٢} \, \frac{دص}{ص} = \int \frac{١}{ص^٢ - ص - ٢} \, دص$

أكمل بتجزئة كسور حالة (١)

$= \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}-٢| - \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}+١| + \text{جـ}$

---

(١١) $\int \sqrt{١+\text{هـ}^{\text{س}}}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل $\text{ص} = \sqrt{١+\text{هـ}^{\text{س}}} \leftarrow \text{ص}^٢ = ١+\text{هـ}^{\text{س}}$

$٢\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \frac{٢\text{ص}\ \text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص}^٢ - ١$

$= \int \text{ص} \times \frac{٢\text{ص}}{\text{ص}^٢-١}\ \text{دص}$

$= \int \frac{٢\text{ص}^٢}{\text{ص}^٢-١}\ \text{دص}$

أكمل قسمة طويلة ← بتجزئة كسور (حالة ٢)

$٢\sqrt{١+\text{هـ}^{\text{س}}} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{١+\text{هـ}^{\text{س}}}-١| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{١+\text{هـ}^{\text{س}}}+١| + \text{جـ}$

---

(١٢) $\int \sqrt{١ - \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}}}\ \text{دس}$

الحل $= \int \sqrt{١ - \text{هـ}^{-\text{س}}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{١ - \text{هـ}^{-\text{س}}} \leftarrow \text{ص}^٢ = ١ - \text{هـ}^{-\text{س}}$

$٢\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{-\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \frac{٢\text{ص}\ \text{دص}}{\text{هـ}^{-\text{س}}}$

$\text{هـ}^{-\text{س}} = ١ - \text{ص}^٢$

$= \int \text{ص}\ \frac{٢\text{ص}}{١-\text{ص}^٢}\ \text{دص}$

$= \int \frac{٢\text{ص}^٢}{١-\text{ص}^٢}\ \text{دص}$

أكمل قسمة طويلة ← بتجزئة كسور (حالة ٢)

---

(١٣) ٢٠٠٨ ص هـ

$\int_{١}^{\text{هـ}} \frac{٢}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-٢)(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-٣)}\ \text{دس}$

الحل $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \text{س}\ \text{دص}$

$= \int^{١} \frac{٢}{\text{س}(\text{ص}-٢)(\text{ص}-٣)}\ \text{س}\ \text{دص} = \int^{١} \frac{٢}{(\text{ص}-٢)(\text{ص}-٣)}\ \text{دص}$

أكمل بتجزئة كسور حالة (١)

$\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{١٦}{٩}$

---

(١٤) ٢٠٠٨ ش

$\int \frac{٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س}-٢)^٢}\ \text{دس}$

الحل $\int ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ (\text{س}-٢)^{-٢}\ \text{دس}$

$\text{م} = ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \qquad \text{دهـ} = (\text{س}-٢)^{-٢}\ \text{دس}$

$\text{م} = \frac{٣}{\text{س}}\ \text{دس} \quad \overset{\ominus}{\swarrow} \quad \text{هـ} = \frac{-١}{\text{س}-٢}$

$= \frac{-٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-٢} + \int \frac{٣}{\text{س}(\text{س}-٣)}\ \text{دس}$

$* \int \frac{٣}{\text{س}(\text{س}-٢)}\ \text{دس}$ بتجزئة كسور حالة (١)

$\int \frac{٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س}-٢)^٢}\ \text{دس}$

$= \frac{-٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-٢} + \text{لو}|\text{س}-٢| - \text{لو}|\text{س}| + \text{جـ}$

---

(١٥) ٢٠١٠ ص

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^٢-١)\ \text{دس}$

$\text{م} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^٢-١) \qquad \text{دهـ} = \text{دس}$

$\text{دم} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢-١}\ \text{دس} \quad \overset{\oplus}{\swarrow} \quad \text{هـ} = \text{س}$

$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^٢-١) - \int \frac{٢\text{س}^٢}{\text{س}^٢-١}\ \text{دس}$

$* \int \frac{٢\text{س}^٢}{\text{س}^٢-١}\ \text{دس}$ قسمة طويلة ← تجزئة كسور (حالة ٢)

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^٢-١)\ \text{دس}$

$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^٢-١) - ٢\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١| + \text{جـ}$

---

(١٦) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+٢}}{\text{س}+٢}\ \text{دس}$

الحل $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+٢} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}+٢}}}{\sqrt{\text{س}+٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢(\text{س}+٢)} \leftarrow \text{دس} = ٢(\text{س}+٢)\ \text{دص}$

$= \int \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}+٢}} \times ٢\cancel{(\text{س}+٢)}\ \text{دص}$

$= \int ٢\text{ص}\ \text{دص} = \text{ص}^٢ + \text{جـ}$

$= \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+٢}\right)^٢ + \text{جـ}$

---

(١٧) $\int \frac{\text{قا}^٤\text{س}}{\text{ظا}^٢\text{س} - \text{ظا}\text{س} - ٢}\ \text{دس}$

الحل $\text{ص} = \text{ظا}\text{س} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^٢\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^٢\text{س}}$

$= \int \frac{\text{قا}^٤\text{س}}{\text{ص}^٢-\text{ص}-٢}\ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^٢\text{س}} = \int \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{\text{ص}^٢-\text{ص}-٢}\ \text{دص}$

$= \int \frac{١+\text{ظا}^٢\text{س}}{\text{ص}^٢-\text{ص}-٢}\ \text{دص} = \int \frac{١+\text{ص}^٢}{\text{ص}^٢-\text{ص}-٢}\ \text{دص}$

أكمل قسمة طويلة ← بتجزئة كسور (حالة ٢)

$\text{ظا}\text{س} + \frac{٥}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظا}\text{س}-٢| - \frac{٢}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظا}\text{س}+١| + \text{جـ}$

⑱ $\int \frac{\text{قاس ظاس}}{\text{قا}^2\text{س} - 2\,\text{قاس} - 3}\,\text{دس}$

الحل $\text{ص} = \text{قاس} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قاس ظاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قاس ظاس}}$

$= \int \frac{\cancel{\text{قاس ظاس}}}{\text{ص}^2 - 2\text{ص} - 3}\,\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قاس ظاس}}}$

$= \int \frac{1}{\text{ص}^2 - 2\text{ص} - 3}\,\text{دص}$

تجزئة ص (١١)

$\frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس} - 3| - \frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس} + 1| + \text{جـ}$

---

⑲ ٢٠٠٦ ص $\int \frac{6\,\text{جتاس}}{(2\,\text{جاس} - 1)(\text{جاس} + 1)}\,\text{دس}$

الحل $\text{ص} = \text{جاس} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$= \int \frac{6\,\cancel{\text{جتاس}}}{(2\text{ص} - 1)(\text{ص} + 1)}\,\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}} = \int \frac{6}{(2\text{ص} - 1)(\text{ص} + 1)}\,\text{دص}$

أكمل تجزئة صا (١١)

$2\left(\text{لو}_{\text{هـ}}|2\,\text{جاس} - 1| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس} + 1|\right) + \text{جـ}$

---

⑳ ٢٠٠٨ ص $\int \frac{\text{جتاس}}{1 + 3\,\text{جاس} - \text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$ كتاب

الحل

$= \int \frac{\text{جتاس}}{1 + 3\,\text{جاس} - 1 + 2\,\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتاس}}{3\,\text{جاس} + 2\,\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$= \int \frac{\cancel{\text{جتاس}}}{3\text{ص} + 2\text{ص}^2}\;\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int \frac{1}{3\text{ص} + 2\text{ص}^2}\,\text{دص}$

أكمل تجزئة كسور صا (١١)

$\frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| - \frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|3 + 2\,\text{جاس}| + \text{جـ}$

㉑ $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^4 + \text{س}^2}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{\text{س}}{\text{س}(\text{س}^3 + \text{س})}\,\text{دس}$

$= \int \frac{1}{\text{س}^3 + \text{س}}\,\text{دس}$

يمكن الحل بالكسور الجزئية لكن نريد حل السؤال بما يسمى أكبر قوة

$= \int \frac{1}{\text{س}^3(1 + \text{س}^{-2})}\,\text{دس}$

$\text{ص} = 1 + \text{س}^{-2} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -2\,\text{س}^{-3} = \frac{-2}{\text{س}^3}$

$\text{دس} = \frac{-\text{س}^3}{2}\,\text{دص}$

$= \int \frac{1}{\cancel{\text{س}^3}(\text{ص})} \times \frac{-\cancel{\text{س}^3}}{2}\,\text{دص}$

$= \int \frac{-1}{2\text{ص}}\,\text{دص} = \frac{-1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$

$= \frac{-1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|1 + \text{س}^{-2}| + \text{جـ}$

㉒ $\int \frac{\text{جتاس}}{1 + 3\,\text{جاس} - \text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$ (كتاب)

㉓ $\int \frac{\sqrt{\text{س} - 2} + 1}{\sqrt{4\text{س} - 8} - 2}\,\text{دس}$ (كتاب)

㉔ $\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{5 - \text{قا}^2\text{س}}\,\text{دس}$ (كتاب)

㉕ $\int \frac{\text{دس}}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - 4\text{س}}$ (كتاب)

㉖ $\int_{9}^{16} \frac{\text{دس}}{\text{س} - 3\sqrt{\text{س}} + 2}$ (كتاب)

㉗ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{8 + \text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$ كتاب

㉘ $\int \frac{2 - \sqrt[3]{\text{س}}}{9 - \sqrt[3]{\text{س}}}\,\text{دس}$ (ش ٢٠١٥)

㉙ $\int \frac{\text{دس}}{\text{س} - \sqrt{\text{س} + 2}}$ (ش ٢٠١٧)

㉚ $\int \frac{\text{قاس ظاس}}{8 - \text{ظا}^2\text{س}}\,\text{دس}$ (ص ٢٠١٧)

ورقة عمل الدرس الثامن

سؤال: أوجد التكاملات الآتية

① $\int \frac{\text{٣س} + ١}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦} \, \text{دس}$

$\boxed{\frac{٨}{٥} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ٣| + \frac{٧}{٥} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٢| + \text{جـ}}$

② $\int_{٤}^{٥} \frac{٢}{\text{س}^{٢} - \text{٤س} + ٣} \, \text{دس}$

$\boxed{\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٣}{٢}}$

③ $\int \frac{\text{٢س}^{٢} + ٣}{\text{س}^{٢} - \text{س}} \, \text{دس}$

$\boxed{\text{٢س} - ٣ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + ٥ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ١| + \text{جـ}}$

④ $\int \frac{\text{س}^{٣} + \text{٤س} - ٨}{\text{س}^{٢} - ٩} \, \text{دس}$ (الكتاب)

$\boxed{\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{٣١}{٦} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٣| + \frac{٤٧}{٦} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ٣| + \text{جـ}}$

⑤ $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - \sqrt{\text{س}}} \, \text{دس}$

⑥ $\int \frac{\sqrt{\text{٩س} + ٩} - ١}{\sqrt{\text{س} + ١} + ١} \, \text{دس}$

$\boxed{٣(\text{س} + ١) - ٨\sqrt{\text{س} + ١} + ٨ \text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س} + ١} + ١| + \text{جـ}}$

⑦ $\int \frac{\sqrt{\text{س} - ٢} + ١}{\sqrt{\text{س} - ٢} - ١}$

$\boxed{(\text{س} - ٢) + ٤\sqrt{\text{س} - ٢} + ٤ \text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س} - ٢} - ١| + \text{جـ}}$

⑧ $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{٢س}} - ٩} \, \text{دس}$

$\boxed{\frac{١}{٦} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{س}} - ٣| - \frac{١}{٦} \text{لو} |\text{هـ}^{\text{س}} + ٣| + \text{جـ}}$

⑨ $\int \frac{\text{هـ}^{\text{٣س}}}{\text{هـ}^{\text{٢س}} - \text{٣هـ}^{\text{س}} - ٤} \, \text{دس}$ (الكتاب)

$\boxed{\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{١٦}{٥} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{س}} - ٤| - \frac{١}{٥} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{س}} + ١| + \text{جـ}}$

⑩ $\int \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{٢} + \text{٢س}) \, \text{دس}$

$\boxed{\text{س} \, \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{٢} + \text{٢س}) - \text{٢س} + ٢ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ٢| + \text{جـ}}$

⑪ ٢٠١٤ ص

$\int_{٠}^{١} \frac{\text{س}}{(\text{س} + ١) - \sqrt{\text{س} + ١}} \, \text{دس}$

$\boxed{١ - ٢\sqrt{٢}}$

⑫ $\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{٥ظا}^{٢}\text{س} - \text{٣ظاس} - ٢} \, \text{دس}$ (الكتاب)

$\boxed{\frac{١}{٧} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ظاس} - ١| - \frac{١}{٧} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٥ظاس} + ٢| + \text{جـ}}$

⑬ $\int \frac{\text{س}^{٣} + \text{٤س} - ٨}{\text{س}^{٢} - ٩} \, \text{دس}$ (الكتاب)

⑭ $\int \frac{٢}{\text{س} - ٣\sqrt{\text{س}} - ٤} \, \text{دس}$

الجواب $\frac{١٦}{٥} \text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}} - ٤| + \frac{٤}{٥} \text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}} + ١| + \text{جـ}$

تكاملات متنوعة

جد التكاملات الآتية

① $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2)}{\sqrt{\text{س}+2}}\,\text{د س}$ (س > ٠،٥)

الجواب: $4\sqrt{\text{س}+2} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}^{\sqrt{\text{س}+2}} - 4\sqrt{\text{س}+2} + \text{ج}$

② $\int \text{س}^2\,\text{هـ}^{3\text{س}}\,\text{د س}$

③ $\int \frac{5}{\text{س}^2 - 4\text{س} + 3}\,\text{د س}$

④ $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 - 9)\,\text{د س}$

⑤ $\int \frac{2\text{س}}{\text{س}^2 - 4\text{س} - 12}$

⑥ $\int_{2}^{3} \sqrt{4\text{س} + 1}\,\text{د س}$

⑦ $\int \frac{\sqrt{\text{س}^2 - \text{س}^4}}{\text{س}^5}\,\text{د س}$

⑧ $\int (\text{س}^8 - 4\text{س})^6\,\text{د س}$

⑨ $\int \sqrt[3]{2\text{س}^5 - \text{س}^2}\,\text{د س}$

⑩ $\int \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{د س}$

⑪ $\int \frac{\sqrt{4\text{س} + 12} - 3}{\sqrt{\text{س} + 3} + 3}\,\text{د س}$

⑫ $\int \frac{\text{س قا}^2\text{س} - \text{س ظا}^2\text{س}}{\sqrt[3]{\text{س}}}\,\text{د س}$

⑬ $\int \text{ظتاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}\,\text{د س}$

⑭ $\int \text{قا}^4\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\,\text{د س}$

⑮ $\int_{0}^{1} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}} + 2\text{هـ}^{\text{س}} + 1}\,\text{د س}$

⑯ $\int \frac{\text{س}^3}{2\text{س}^2 + \text{س}}\,\text{د س}$

⑰ $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 2\text{س})\,\text{د س}$

⑱ $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{جتا}^3\sqrt{\text{س}}\,\text{د س}$

⑲ $\int \text{س}\sqrt[3]{\text{س}^2 + 1}\,\text{د س}$

⑳ $\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظا}^2\text{س} - 3\text{ظاس} + 2}\,\text{د س}$

㉑ $\int \frac{\text{ظتاس قتاس}}{9 - 4\text{قتا}^2\text{س}}\,\text{د س}$

㉒ $\int_{1}^{2} \text{س}^4\,\text{هـ}^{(\text{س}^3 + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}\,\text{د س}$

㉓ $\int \text{جا}3\text{س جتاس}\,\text{د س}$

㉔ $\int \frac{2\text{جا}3\text{س جتاس}}{\text{جتا}2\text{س}}\,\text{د س}$

㉕ $\int \frac{\text{س} + \text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}}\,\text{د س}$

㉖ $\int \frac{4\,\text{لو}\,\text{س}}{\text{س} - 1}\,\text{د س}$

㉗ $\int (\text{ظاس} + \text{قاس})^7\,\text{قاس}\,\text{د س}$

الدرس التاسع
المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية هي معادلة تحتوي على مشتقات وتفاضلات (مثل صَ ، صً ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ، دص ، دس ، ....)

والمقصود من حل المعادلة التفاضلية إيجاد علاقة تربط بين المتغيرين س، ص بحيث تحقق المعادلة

خطوات الحل

① وضع الصادات مع (دص) في طرف ووضع السينات مع دس في الطرف الآخر

② إجراء التكامل للطرفين

الجزء الأول
أسئلة مباشرة

مثال: حل المعادلات التفاضلية الآتية

① $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{3\text{س}^2}{\text{ص}}$

الحل $\text{ص دص} = 3\text{س}^2 \text{دس}$

$\int \text{ص دص} = \int 3\text{س}^2 \text{دس}$

$\frac{\text{ص}^2}{2} = \text{س}^3 + \text{جـ} \rightarrow \text{ص} = \mp\sqrt{2\text{س}^3 + 2\text{جـ}}$

$\text{ص}^2 = 2\text{س}^3 + \text{جـ}^*$

② $\frac{2\,\text{دص}}{1-\text{س}} = (2\text{س}+1)\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل $2\,\text{دص} = (1-\text{س})(2\text{س}+1)\,\text{دس}$

$\int 2\,\text{دص} = \int (-2\text{س}^2 + \text{س} + 1)\,\text{دس}$

$2\text{ص} = \frac{-2}{3}\text{س}^3 + \frac{\text{س}^2}{2} + \text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \frac{-\text{س}^3}{3} + \frac{\text{س}^2}{4} + \frac{\text{س}}{2} + \text{جـ}$

---

③ $\text{س}^3\,\text{دص} = \text{ص}^2\,\text{دس}$ عند (1،1)

الحل $\frac{\text{س}^3\,\text{دص}}{\text{س}^3\,\text{ص}^2} = \frac{\text{ص}^2\,\text{دس}}{\text{س}^3\,\text{ص}^2}$

$\frac{\text{دص}}{\text{ص}^2} = \frac{\text{دس}}{\text{س}^3}$

$\int \text{ص}^{-2}\,\text{دص} = \int \text{س}^{-3}\,\text{دس}$

$\frac{\text{ص}^{-1}}{-1} = \frac{\text{س}^{-2}}{-2} + \text{جـ}$

$\frac{-1}{\text{ص}} = \frac{-1}{2\text{س}^2} + \text{جـ}$

النقطة (1،1) لإيجاد (جـ)

$-1 = \frac{-1}{2} + \text{جـ}$ $\boxed{\text{جـ} = \frac{-1}{2}}$

$\frac{-1}{\text{ص}} = \frac{-1}{2\text{س}^2} - \frac{1}{2}$

---

④ $\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2 - 4\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -4$

الحل $\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2 - 4\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + 4 = 0$

تحلل عبارة تربيعية

$(\text{صَ})^2 - 4\text{صَ} + 4 = 0$

$(\text{صَ} - 2)(\text{صَ} - 2) = 0 \longrightarrow (\text{صَ} - 2)^2 = 0$

$\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 2\right)^2 = 0 \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2$

$\text{دص} = 2\,\text{دس}$

$\int \text{دص} = \int 2\,\text{دس} \longrightarrow \text{ص} = 2\text{س} + \text{جـ}$

---

⑤ $2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + 12\text{س} - 4 = 0$

الحل $2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4 - 12\text{س}$

$2\text{ص دص} = (4 - 12\text{س})\,\text{دس}$

$\int 2\text{ص دص} = \int (4 - 12\text{س})\,\text{دس}$

$\text{ص}^2 = 4\text{س} - 6\text{س}^2 + \text{جـ}$

⑥ $(\frac{دص}{دس})^{٣} - ٨س = ٠$

الحل $(\frac{دص}{دس})^{٣} = ٨س$

$\frac{دص}{دس} = ٢\sqrt[٣]{س} \longrightarrow دص = ٢\sqrt[٣]{س}\,دس$

$\int دص = \int ٢س^{\frac{١}{٣}}\,دس$

$ص = ٢ \times \frac{٣}{٤}س^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$ص = \frac{٣}{٢}(\sqrt[٣]{س})^{٤} + جـ$

---

⑦ $\frac{دص}{دس} = \sqrt{\frac{س}{ص}}$ ، س > ٠ ، ص > ٠

الحل $\frac{دص}{دس} = \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}}$

$\sqrt{ص}\,دص = \sqrt{س}\,دس$

$\int ص^{\frac{١}{٢}}\,دص = \int س^{\frac{١}{٢}}\,دس$

$\frac{٢}{٣}ص^{\frac{٣}{٢}} = \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$ $جـ^{*} = \frac{٣}{٢} \times جـ$

$\sqrt{ص^{٣}} = \sqrt{س^{٣}} + جـ^{*}$

---

⑧ $\frac{دص}{دس} = س\sqrt{٤س^{٢}ص - ٥س^{٢} - ١٢ص + ١٥}$

الحل $\frac{دص}{دس} = س\sqrt{٤س^{٢}ص - ١٢ص - ٥س^{٢} + ١٥}$

$\frac{دص}{دس} = س\sqrt{٤ص(س^{٢}-٣) - ٥(س^{٢}-٣)}$

$\frac{دص}{دس} = س\sqrt{(س^{٢}-٣)(٤ص-٥)}$

$\frac{دص}{دس} = س\sqrt{س^{٢}-٣}\,\sqrt{٤ص-٥}$

$\frac{دص}{\sqrt{٤ص-٥}} = س\sqrt{س^{٢}-٣}\,دس$

$\int (٤ص-٥)^{-\frac{١}{٢}}\,دص = \int س\sqrt{س^{٢}-٣}\,دس$

$\frac{١}{٢}(٤ص-٥)^{\frac{١}{٢}}$

* $\int س\sqrt{س^{٢}-٣}\,دس$ تعويض

$ع = \sqrt{س^{٢}-٣} \leftarrow ع^{٢} = س^{٢}-٣$

$\frac{دع}{دس} \times ٢ع = ٢س \leftarrow دس = \frac{ع\,دع}{س}$

$= \int س\;ع\;\frac{ع\,دع}{س} = \int ع^{٢}\,دع$

$= \frac{ع^{٣}}{٣} + جـ = \frac{١}{٣}(\sqrt{س^{٢}-٣})^{٣} + جـ$

$\sqrt{٤ص-٥} = \frac{٢}{٣}(\sqrt{س^{٢}-٣})^{٣} + جـ$

---

⑨ $(\frac{دص}{دس})^{٢} - ١٠\frac{دص}{دس} + ٢٥ = ٠$

الحل $(\frac{دص}{دس} - ٥)(\frac{دص}{دس} - ٥) = ٠$

$(\frac{دص}{دس} - ٥)^{٢} = ٠$

$\frac{دص}{دس} = ٥ \longrightarrow دص = ٥\,دس$

$\int دص = \int ٥\,دس$

$ص = ٥س + جـ$

---

⑩ $\frac{دص}{دس} = ٢س ص + ٣ص$

الحل $دص = (٢س ص + ٣ص)\,دس$

$دص = ص(٢س + ٣)\,دس$

$\frac{دص}{ص} = (٢س + ٣)\,دس$

$\int \frac{دص}{ص} = \int (٢س + ٣)\,دس$

$لو_{هـ}|ص| = س^{٢} + ٣س + جـ$

$ص = هـ^{س^{٢}+٣س+جـ}$

$ص = هـ^{س^{٢}+٣س} \times هـ^{جـ}$

$ص = هـ^{س^{٢}+٣س} \times جـ^{*}$ $جـ^{*} = هـ^{جـ}$

ص ٨٠٠٢

⑪ $\frac{س}{س^{٢}-١}\,\frac{دص}{دس} = هـ^{-ص}(س+٢)$

الحل $\frac{س}{س^{٢}-١}\,\frac{دص}{دس} = \frac{س+٢}{هـ^{ص}}$

$هـ^{ص}\,\frac{دص}{دس} = \frac{(س+٢)(س^{٢}-١)}{س}$

$هـ^{ص}\,دص = \frac{(س^{٢}-١)(س+٢)}{س}\,دس$

$\int هـ^{ص}\,دص = \int \frac{(س^{٢}-١)(س+٢)}{س}\,دس$

$هـ^{ص} = \int \frac{س^{٣}+٢س^{٢}-س-٢}{س}\,دس$

$هـ^{ص} = \int (س^{٢}+٢س-١-\frac{٢}{س})\,دس$

$هـ^{ص} = \frac{س^{٣}}{٣} + س^{٢} - س - ٢لو_{هـ}|س| + جـ$

$ص = لو_{هـ}(\frac{س^{٣}}{٣} + س^{٢} - س - ٢لو_{هـ}|س| + جـ)$

⑫ $٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{دص} + \text{ص}^{٢}\,\text{دس} = ٢\,\text{دص}$

الحل $\text{ص}^{٢}\text{دس} = ٢\text{دص} - ٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{دص}$

$\text{ص}^{٢}\text{دس} = ٢\,(١ - \text{جا}^{٢}\text{س})\,\text{دص}$

$\text{ص}^{٢}\,\text{دس} = ٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{دص}$

$\frac{\text{دص}}{\text{ص}^{٢}} = \frac{\text{دس}}{٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

$\int \text{ص}^{-٢}\text{دص} = \int \frac{١}{٢}\,\text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$

$\frac{\text{ص}^{-١}}{-١} = \frac{١}{٢}\,\text{ظاس} + \text{جـ}$

$\frac{-١}{\text{ص}} = \frac{١}{٢}\,\text{ظاس} + \text{جـ}$

$\frac{١}{\text{ص}} = \frac{-١}{٢}\,\text{ظاس} - \text{جـ}$

$\text{ص} = \frac{-١}{\frac{١}{٢}\,\text{ظاس} + \text{جـ}}$

---

⑬ $\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\,\text{دص} - \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\,\text{دس} = ٠$ (كتاب)

الحل $\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\,\text{دص} = \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\,\text{دس}$

$\text{دص} = \frac{\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}}{\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}}\,\text{دس}$

$\text{دص} = \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\,\text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\,\text{دس}$

$\int \text{دص} = \int \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\,\text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \int \left(\frac{١}{٢}\,\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٢}\text{دس} = \int \frac{١}{٤}\,\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \int \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢}\,(١ - \text{جتاس})\,\text{دس}$

$\text{ص} = \int \left(\frac{١}{٨} - \frac{١}{٨}\,\text{جتاس}\right)\text{دس}$

$\text{ص} = \frac{١}{٨}\,\text{س} - \frac{١}{٨}\,\text{جاس} + \text{جـ}$

---

⑭ $\text{دس} + ٣\text{دص} = \text{جتاس}\,\text{دس}$

الحل $٣\,\text{دص} = \text{جتاس}\,\text{دس} - \text{دس}$

$٣\,\text{دص} = (\text{جتاس} - ١)\,\text{دس}$

$\int ٣\,\text{دص} = \int (\text{جتاس} - ١)\,\text{دس}$

$٣\text{ص} = \text{جاس} - \text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \frac{١}{٣}\,\text{جاس} - \frac{\text{س}}{٣} + \frac{\text{جـ}}{٣}$

$\text{ص} = \frac{١}{٣}\,\text{جاس} - \frac{\text{س}}{٣} + \text{جـ}^{*}$

الجزء الثاني
تطبيقات هندسية وفيزيائية

أمثلة

① إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{\text{جاس} - \text{قا}^{٢}\text{س}}{٣\text{ص}^{٢}}$ أوجد قاعدة العلاقة علماً أن النقطة $(\frac{\pi}{٤}، ٤)$ تقع على منحناها

الحل ميل المماس $= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جاس} - \text{قا}^{٢}\text{س}}{٣\text{ص}^{٢}}$

$٣\text{ص}^{٢}\,\text{دص} = (\text{جاس} - \text{قا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$

$\int ٣\text{ص}^{٢}\,\text{دص} = \int (\text{جاس} - \text{قا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$

$\text{ص}^{٣} = -\text{جتاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

$(\frac{\pi}{8}، ٤)$ تقع على منحنى العلاقة

$٦٤ = -\text{جتا}\frac{\pi}{٤} - \text{ظا}\frac{\pi}{٤} + \text{جـ}$

$٦٤ = -\frac{١}{\sqrt{٢}} - ١ + \text{جـ}$ $\boxed{\text{جـ} = ٦٥ + \frac{١}{\sqrt{٢}}}$

$\text{ص}^{٣} = -\text{جتاس} - \text{ظاس} + ٦٥ + \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\text{ص} = \sqrt[٣]{-\text{جتاس} - \text{ظاس} + ٦٥ + \frac{١}{\sqrt{٢}}}$

---

② [illegible] إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{\text{هـ}^{-\text{ص}}(\text{س}+٤)(\text{س}-٣)}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}$ أوجد قاعدة هذه العلاقة علماً أن منحناها يمر بالنقطة (١، ٠)

الحل ميل المماس $= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{-\text{ص}}(\text{س}+٤)(\text{س}-٣)}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}+٤)\cancel{(\text{س}-٣)}}{\text{س}\,\cancel{(\text{س}-٣)}\,\text{هـ}^{\text{ص}}}$

$\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = \frac{\text{س}+٤}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = \int \frac{\text{س}+٤}{\text{س}}\,\text{دس} \leftarrow \int \text{هـ}^{\text{ص}}\text{دص} = \int (١ + \frac{٤}{\text{س}})\,\text{دس}$

$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{س} + ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

$(\text{١ ، ٠})\quad \text{س} = \text{١} \text{ ، } \text{ص} = \text{٠}$

$\text{هـ}^{\text{٠}} = \text{١} + \text{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{١} + \text{جـ} \qquad \boxed{\text{جـ} = \text{٠}}$

$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{س} + \text{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} + \text{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|)$

---

③ ٢٠١٠ ش
إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{-\text{ص}(\text{س}^{\text{٢}}-\text{١})}{\text{س}^{\text{٢}}}$ جد قاعدة هذه العلاقة علماً أن منحناها يمر بالنقطة (١ ، -١)

الحل ميل المماس $= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{ص}(\text{س}^{\text{٢}}-\text{١})}{\text{س}^{\text{٢}}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}(\text{١}-\text{س}^{\text{٢}})}{\text{س}^{\text{٢}}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \frac{\text{١}-\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}}}\,\text{دس}$

$\int \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int \left(\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}} - \text{١}\right)\text{دس}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \int(\text{س}^{-\text{٢}} - \text{١})\,\text{دس} = \frac{\text{س}^{-\text{١}}}{-\text{١}} - \text{س} + \text{جـ}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \frac{-\text{١}}{\text{س}} - \text{س} + \text{جـ}$

$\text{س} = \text{١} \text{ ، } \text{ص} = -\text{١}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{١} = -\text{١} - \text{١} + \text{جـ} \qquad \boxed{\text{جـ} = \text{٢}}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \frac{-\text{١}}{\text{س}} - \text{س} + \text{٢}$

$|\text{ص}| = \text{هـ}^{\left(\frac{-\text{١}}{\text{س}} - \text{س} + \text{٢}\right)}$

---

④ ٢٠١٣ ش
إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة (ص) يساوي $\frac{\text{١}}{\text{س}\sqrt{\text{٣}+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}$ ، س > ٠ ، جد قاعدة العلاقة علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (هـ ، ٤)

الحل ميل المماس $= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{١}}{\text{س}\sqrt{\text{٣}+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}$

$\text{دص} = \frac{\text{١}}{\text{س}\sqrt{\text{٣}+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\,\text{دس}$

$\int \text{دص} = \int \frac{\text{١}}{\text{س}\sqrt{\text{٣}+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\,\text{دس}$

$\text{ع} = \sqrt{\text{٣}+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \rightarrow \text{ع}^{\text{٢}} = \text{٣} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{٢ع دع} = \frac{\text{١}}{\text{س}}\,\text{دس} \rightarrow \text{دس} = \text{س} \times \text{٢ع دع}$

$\int \text{دص} = \int \frac{\text{س}\times\text{٢ع}}{\text{س}\times\text{ع}}\,\text{دع} \quad \text{ص} = \int \text{٢ دع}$

$\text{ص} = \text{٢ع} + \text{جـ} \rightarrow \text{ص} = \text{٢}\sqrt{\text{٣}+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} + \text{جـ}$

$\text{س} = \text{هـ} \text{ ، } \text{ص} = \text{٤}$

$\text{٤} = \text{٢}\times\text{٢} + \text{جـ} \qquad \boxed{\text{جـ} = \text{٠}}$

$\text{ص} = \text{٢}\sqrt{\text{٣}+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

---

⑤ ٢٠١٢ ص
إذا كان ميل المماس عند النقطة (س، ص) لمنحنى علاقة يساوي ٢س ص ، أوجد قيمة (قيم) ص عندما س = ٣ ، علماً أن منحنى العلاقة يمر بالنقطة (٢ ، ١)

الحل ميل المماس $= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢ س ص}$

$\frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \text{٢س دس} \rightarrow \int \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int \text{٢س دس}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \text{س}^{\text{٢}} + \text{جـ}$

يمر بالنقطة (٢ ، ١)

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{١} = \text{٤} + \text{جـ} \qquad \boxed{\text{جـ} = -\text{٤}}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}$

عندما $\text{س} = \text{٣} \rightarrow \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \text{٥}$

$|\text{ص}| = \text{هـ}^{\text{٥}} \rightarrow \text{ص} = \pm\text{هـ}^{\text{٥}}$

---

⑥ يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $\text{ت} = \frac{\text{١}}{\text{ع}}$ ، ع > ٠ ، حيث ت (تسارع الجسيم) ع (سرعة الجسيم)
إذا تحرك الجسيم من السكون فقطع مسافة مقدارها $\text{١٠}\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ م بعد (٤) ثوان من حركته جد المسافة التي قطعها بعد ثانية واحدة من حركته

الحل تحركه من السكون $ع(٠) = ٠$

$ف(٤) = ١٠\sqrt{٢}$ م   المطلوب $ف(١)$

$ت = \frac{دع}{دن} = \frac{١}{ع} \leftarrow ع\,دع = دن$

$\int ع\,دع = \int دن \leftarrow \frac{ع^٢}{٢} = ن + جـ$

$ع(٠) = ٠ \leftarrow ع = ٠ ،\ ن = ٠$

$٠ = ٠ + جـ$ $\boxed{جـ = ٠}$

$\frac{ع^٢}{٢} = ن \leftarrow ع = \pm\sqrt{٢ن}$

$ع > ٠ \leftarrow ع = \sqrt{٢ن}$

السرعة معطاه بدلالة (ن)

نجد المسافة $ف = \int ع(ن)\,دن$

$ف(ن) = \int \sqrt{٢ن}\,دن = \int (٢ن)^{\frac{١}{٢}}\,دن$

$ف(ن) = (٢ن)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢} + جـ$

$ف(ن) = \frac{١}{٣}(\sqrt{٢ن})^٣ + جـ$

$ف(٤) = ١٠\sqrt{٢}$

$١٠\sqrt{٢} = \frac{١}{٣} \times ٨ + جـ$ $\boxed{جـ = \frac{١٤\sqrt{٢}}{٣}}$

$ف(ن) = \frac{١}{٣}(\sqrt{٢ن})^٣ + \frac{١٤\sqrt{٢}}{٣}$

$ف(١) = \frac{١}{٣}(\sqrt{٢})^٣ + \frac{١٤\sqrt{٢}}{٣}$

---

⑦ ٢٠٠٩ ص (كتاب)

يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $ت = ٢\sqrt{ع}$ حيث $ع > ٠$، حيث ت (تسارع الجسيم) ، ع (سرعة الجسيم) فإذا كانت سرعة الجسيم عند بدء حركته ٩ م/ث ، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (٣) ثوان من بدء حركته علماً أنه تقطع مسافة قدرها $(\frac{٦٤}{٣})$ م في أول ثانية من حركته

الحل $ت = \frac{دع}{دن} = ٢\sqrt{ع}$ ، $ع(٠) = ٩$ ، $ف(١) = \frac{٦٤}{٣}$

$\frac{دع}{دن} = ٢\sqrt{ع} \leftarrow \frac{دع}{\sqrt{ع}} = ٢\,دن$

$\int \frac{دع}{\sqrt{ع}} = \int ٢\,دن \leftarrow \int ع^{-\frac{١}{٢}}\,دع = \int ٢\,دن$

$٢ع^{\frac{١}{٢}} = ٢ن + جـ \leftarrow ٢\sqrt{ع} = ٢ن + جـ$

$ع(٠) = ٩ \leftarrow ٦ = جـ$ $\boxed{جـ = ٦}$

$٢\sqrt{ع} = ٢ن + ٦ \leftarrow ع = (ن + ٣)^٢$

$ف(ن) = \int ع(ن)\,دن = \int (ن + ٣)^٢\,دن$

$ف(ن) = \frac{١}{٣}(ن + ٣)^٣ + جـ$

$ف(١) = \frac{٦٤}{٣} \leftarrow \frac{٦٤}{٣} = \frac{٦٤}{٣} + جـ$

$\boxed{جـ = ٠}$ $ف(ن) = \frac{١}{٣}(ن + ٣)^٣$

$ف(٣) = \frac{(٦)^٣}{٣} = ٧٢$ م

---

⑧ ٢٠١٢ ص (كتاب)

يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $ت = م \times ع^{\frac{١}{٣}}$ ، $ع > ٠$ ، حيث ت (تسارع الجسيم) ، ع (سرعة الجسيم) إذا تحرك الجسيم من السكون أوجد قيمة الثابت (م) التي تجعل سرعته ٨ م/ث بعد (٣) ثوان من بدء الحركة

الحل $ت = م\,ع^{\frac{١}{٣}}$ ، $ع(٠) = ٠$ ، $ع(٣) = ٨$

$ت = \frac{دع}{دن} = م\,ع^{\frac{١}{٣}} \leftarrow ع^{-\frac{١}{٣}}\,دع = م\,دن$

$\int ع^{-\frac{١}{٣}}\,دع = \int م\,دن$

$\frac{٣}{٢}ع^{\frac{٢}{٣}} = م\,ن + جـ \leftarrow \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{ع^٢} = م\,ن + جـ$

$ع(٠) = ٠ \leftarrow ٠ = جـ$ $\boxed{جـ = ٠}$

$\frac{٣}{٢}(\sqrt[٣]{ع})^٢ = م\,ن$

$ع(٣) = ٨ \leftarrow ن = ٣ ،\ ع = ٨$

$٦ = ٣م$ $\boxed{م = ٢}$

الجزء الثالث
أسئلة غير مباشرة

أمثلة

① تتكاثر بكتيريا حسب المعادلة $\frac{دت}{دن} = ٥ن^{٤} + ٣٠ن$ ، حيث ت (عدد البكتيريا) ، ن (الزمن بالثواني) إذا كان عددها بعد ثانية واحدة يساوي (٣٠) أوجد عددها بعد (٣) ثوان

الحل ت(١) = ٣٠ ، المطلوب ت(٣)

$\frac{دت}{دن} = ٥ن^{٤} + ٣٠ن$

$دت = (٥ن^{٤} + ٣٠ن)\,دن$

$\int دت = \int (٥ن^{٤} + ٢٠ن)\,دن$

$ت = ن^{٥} + ١٠ن^{٢} + جـ$

ت(١) = ٣٠ ← ت = ٣٠ ، ن = ١

$٣٠ = ١ + ١٠ + جـ$ $\boxed{جـ = ١٩}$

$ت(ن) = ن^{٥} + ١٠ن^{٢} + ١٩$

$ت(٣) = (٣)^{٥} + ٩٠ + ١٩ = \boxed{٣٥٢}$

---

② إذا كان معدل نقصان حجم بالون يتسرب منه غاز هو ٠٫١ من حجم البالون لكل دقيقة ، فما حجم البالون بعد (١٠) دقائق إذا كان حجم البالون عند بداية التسرب هو ٥٠ سم^{٣}

الحل $\frac{دح}{دن} = -٠٫١ح$ ، ح(٠) = ٥٠سم^{٣}

$\frac{دح}{ح} = -٠٫١\,دن$

$\int \frac{دح}{ح} = \int -٠٫١\,دن$

$لو_{هـ}|ح| = -٠٫١ن + جـ$

ح(٠) = ٥٠ ← ح = ٥٠ ، ن = ٠

$لو_{هـ}٥٠ = ٠ + جـ \leftarrow \boxed{جـ = لو_{هـ}٥٠}$

$لو_{هـ}|ح| = -٠٫١ن + لو_{هـ}٥٠$

ح(١٠) ← مطلوب

$لو_{هـ}|ح| = -١ + لو_{هـ}٥٠$ ، |ح| = ح
الحجم موجب

$لو_{هـ}ح - لو_{هـ}٥٠ = -١ \leftarrow لو_{هـ}\frac{ح}{٥٠} = -١$

$\frac{ح}{٥٠} = هـ^{-١} \leftarrow ح(١٠) = \frac{٥٠}{هـ}$ سم^{٣}

---

③ ١٩٩٩ (كتاب)

آلة صناعية قيمتها عند الشراء ٢٥٠٠ دينار وكانت قيمتها تتناقص بمرور الزمن حسب العلاقة $\frac{دص}{دن} = -٥٠٠(ن+١)^{-٢}$ حيث ص(قيمة الآلة بعد ن سنة من شرائها) جد قيمة هذه الآلة بعد مرور (٣) سنوات من شرائها

الحل ص(٠) = ٢٥٠٠ ، المطلوب ص(٣)

$\frac{دص}{دن} = -٥٠٠(ن+١)^{-٢} \leftarrow دص = -٥٠٠(ن+١)^{-٢}\,دن$

$\int دص = \int -٥٠٠(ن+١)^{-٢}\,دن$

$ص(ن) = -٥٠٠ \times \frac{(ن+١)^{-١}}{-١} + جـ$

$ص(ن) = \frac{٥٠٠}{ن+١} + جـ$

ص(٠) = ٢٥٠٠ ، ن = ٠ ، ص = ٢٥٠٠

$٢٥٠٠ = ٥٠٠ + جـ$ $\boxed{جـ = ٢٠٠٠}$

$ص(ن) = \frac{٥٠٠}{ن+١} + ٢٠٠٠$

$ص(٣) = \frac{٥٠٠}{٤} + ٢٠٠٠ = ٢١٢٥$ دينار

ورقة عمل الدرس التاسع

السؤال الأول :

حل المعادلات التفاضلية الآتية

① $س^{٢}\frac{دص}{دس} = ص^{٢}$

$$\boxed{\frac{-١}{٢ص^{٢}} = \frac{-١}{س} + جـ}$$

② $\frac{دص}{دس} = \frac{قا^{٤}س\ ظا^{٢}س}{ص}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{ص^{٢}}{٢} = \frac{ظا^{٥}س}{٥} + \frac{ظا^{٣}س}{٣} + جـ \\ ص^{٢} = \frac{٢}{٥}ظا^{٥}س + \frac{٢}{٣}ظا^{٣}س + جـ^{*} \end{array}}$$

٢٠١٠ ص

③ $جا^{٢}س\ دص = دص - ص\ دس$
(كتاب)

$$\boxed{|ص| = جـ \times هـ^{ظاس}}$$

السؤال الثاني

٢٠١١ ص (كتاب)

① إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة (ص) يساوي $\frac{\sqrt{هـ^{ص}}}{١ - جتاس}$ ، أوجد قاعدة العلاقة (ص) علماً أن منحناها يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$

$$\boxed{ص = -٢\ لو_{هـ}(\frac{١}{٢}ظتاس + \frac{١}{٢})}$$

٢٠١٤ ص (كتاب)

② يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $ت = \sqrt{ع}$ ، ع > ٠

ت (تسارع الجسيم) ع (سرعة الجسيم)

فإذا علمت أن السرعة الابتدائية للجسيم ٩ م/ث وقطع مسافة (٨٠) م حتى (٤) ثوانٍ أوجد المسافة التي قطعها بعد ثانيتين من بدء حركته

$$\boxed{\frac{١١٨}{٣}\text{ م}}$$

السؤال الثالث

شبَّ حريق في غابة معينة فإذا دلَّ الرمز (م) على مساحة المنطقة التي يصيبها الحريق مقدراً بالدونمات ، وكان معدل زيادة المساحة هو ٢٪ م دونم/ساعة فإذا علمت أن المساحة التي يصيبها الحريق عند اكتشافه تساوي (٣) دونمات ، أوجد مساحة المحروقة عند وصول الإطفاء بعد ساعتين من اكتشاف الحريق

$$\boxed{م = ٣ \times هـ^{٠.٤ن}\text{ دونم}}$$

السؤال الرابع : (كتاب + ٢٠١٥ ص)

يزداد عدد سكان مدينة حسب العلاقة $\frac{دع}{دن} = ٠.٠٢٥و٠.٤ع$ حيث ع: عدد السكان ن: الزمن بالسنوات ، إذا علمت أن عدد سكان المدينة بلغ (٢٠٠٠٠) نسمة عام (٢٠١٥) جد عدد سكانها بعد ٤٠ عام

$$\boxed{٥٤٤٠٠٠\text{ نسمة}}$$

السؤال الخامس (كتاب

إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{هـ^{س-ص}}{هـ^{س}+١}$ حيث (هـ) العدد النيبيري جد قاعدة العلاقة (ص) علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (١، ٠)

السؤال السادس : (كتاب + ٢٠١٦ص)

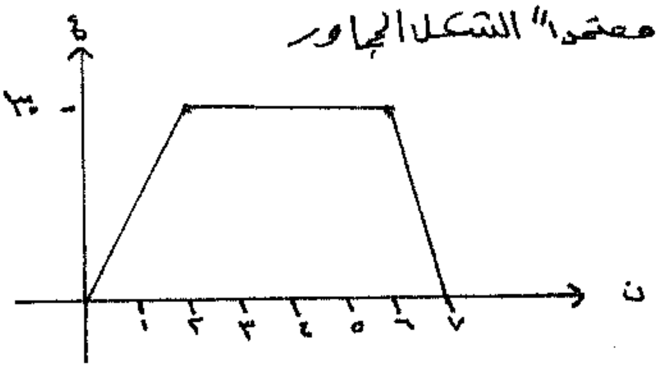
ابتدأ جسيم الحركة من نقطة الأصل على محور السينات وفقاً للعلاقة

$ت = -٤ ع^{\frac{٣}{٢}}$ ، ع > ٠ ، ت: تسارع الجسيم

ع: سرعة الجسيم ، فإذا كانت سرعته عند بدء الحركة ٤ سم/ث ، أثبت أن $ف = ٢ن \sqrt{ع}$.

السؤال السابع (كتاب)

معتمداً الشكل المجاور



الذي يمثل العلاقة بين السرعة والزمن لجسم يتحرك في خط مستقيم، جد المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية [٠، ٧]

السؤال الثامن (كتاب)

حل كل من المعادلات التفاضلية الآتية

① $هـ^{ص} جاس - \frac{دص}{دس} جتا^{٢}س = ٠$

② $(ص^{٢} + ٣ص) \frac{دص}{دس} = هـ^{-٢ص}(س+١)(س^{٢} - ٩)$

③ $\frac{دص}{دس} = \sqrt[٣]{\frac{ص}{س}}$ ١٥ ، ٠ ح صَ

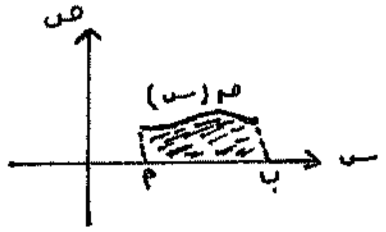
④ $\frac{دص}{دس} = \frac{٣س ص - ص - ٢١س + ٤}{ص^{٢} - ١٦}$ ١٧١ ، ٠ ح صَ)

⑤ $(س^{٢} - ٣س) دص = هـ^{-ص} (س^{٢} + س - ١٢) دس$

الدرس العاشر
حساب المساحة باستخدام التكامل

في هذا الدرس يتم حساب
① المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات
② المساحة المحصورة بين منحنيي اقترانين
③ المساحة المحصورة بين أكثر من منحنيين

الجزء الأول
حساب المساحة المحصورة بين منحنى اقتران و محور السينات والمستقيمان س = أ ، س = ب



لإيجاد المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) و محور السينات والمستقيمان س = أ ، س = ب أو في الفترة [أ، ب]

$$\boxed{م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)|\, دس}$$

خطوات الحل

① نجد أصفار الاقتران
ق(س) = ٠

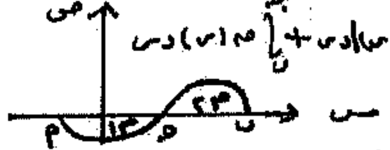
② إذا كانت أصفار الاقتران ∉ (أ، ب)

$م = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس$ ، $\overset{\oplus}{ق(س)} > ٠$

$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)|\, دس$ ، $\overset{\ominus}{ق(س)} < ٠$

③ إذا كانت أصفار الاقتران ∈ (أ، ب)
جـ ∈ (أ، ب) يوجد منطقتين

$م = \int_{أ}^{جـ} |ق(س)|\, دس + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\, دس$



④ إذا لم يعطِ في السؤال حدود التكامل تعتبر الأصفار هي الحدود

ملاحظات

① المنطقة المحصورة فوق محور السينات
إشارة ق(س) ⊕ ق(س) > ٠
② المنطقة المحصورة تحت محور السينات
إشارة ق(س) ⊖ ق(س) < ٠
③ لمعرفة إشارة ق(س) ندرس إشارته
④ في هذا الجزء لا داعي لتمثيل المنطقة المحصورة بيانيًا"

أمثلة

① جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٣ ومحور السينات في الفترة [-١ ، ٢]

الحل حدود التكامل س = -١ ، س = ٢
ق(س) = ٣ ثابت لا يساوي بالصفر

+ + + +
-١ ٢

$م = \int_{-١}^{٢} ٣\,\text{دس} = ٣(٢ - -١) = ٩$ وحدة مربعة

③ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى هـ(س) = س − ١ و محور السينات في الفترة [١ ، ٣]

الحل هـ(س) = ٠ ← س − ١ = ٠ ، س = ١

١ ∉ (١ ، ٣)

١ + + + + ٣

$م = \int_{١}^{٣} |س - ١|\,\text{دس}$

$= \frac{س^٢}{٢} - س \Big|_{١}^{٣} = (\frac{٩}{٢} - ٣) - (\frac{١}{٢} - ١)$

$= \frac{٩}{٢} - ٣ - \frac{١}{٢} + ١ = \boxed{٢}$ وحدة مساحة

③ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى هـ(س) = $\frac{س}{٢}$ + ٣ ومحور السينات والمستقيمان س = −٢ ، س = ٤

الحل [−٢ ، ٤]

هـ(س) = ٠ ← ½س + ٣ = ٠ ← س = −٦

−٦ ∉ (−٢ ، ٤)

−٢ + + + + + ٤

$م = \int_{-٢}^{٤} |\frac{١}{٢}س + ٣|\,\text{دس}$

$م = \int_{-٢}^{٤} (\frac{١}{٢}س + ٣)\,\text{دس} = \frac{س^٢}{٤} + ٣س \Big|_{-٢}^{٤}$

$= ١٦ + ٥ = \boxed{٢١}$ وحدة مربعة

④ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى هـ(س) = ٢س − ٦ ومحور السينات والمستقيمان س = ١ ، س = ٤

الحل [١ ، ٤]

هـ(س) = ٠ ← ٢س − ٦ = ٠ ← س = ٣ ∈ (١ ، ٤)

$م = \int_{١}^{٤} |٢س - ٦|\,\text{دس}$

١ − − − − ٣ + + + + ٤ (م١ ، م٢)

$م = \int_{١}^{٣} (٦ - ٢س)\,\text{دس} + \int_{٣}^{٤} (٢س - ٦)\,\text{دس}$

$= ٦س - س^٢ \Big|_{١}^{٣} + س^٢ - ٦س \Big|_{٣}^{٤}$

$= ٩ - ٥ + -٨ + ٩ = \boxed{٥}$ وحدة مربعة

⑤ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى هـ(س) = س³ − ١ و محور السينات في الفترة [−٢ ، ٢]

الحل هـ(س) = ٠ ← س³ − ١ = ٠ ← س = ١ ∈ (−٢ ، ٢)

$م = \int_{-٢}^{٢} |س^٣ - ١|\,\text{دس}$

−٢ − − − ١ + + + ٢ (م١ ، م٢)

$م = \int_{-٢}^{١} (١ - س^٣)\,\text{دس} + \int_{١}^{٢} (س^٣ - ١)\,\text{دس}$

$م = س - \frac{س^٤}{٤} \Big|_{-٢}^{١} + \frac{س^٤}{٤} - س \Big|_{١}^{٢}$

$م = (١ - \frac{١}{٤}) - (-٢ - ٤) + (٤ - ٢) - (\frac{١}{٤} - ١)$

$م = \frac{١٩}{٢}$ وحدة مساحة

⑥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى هـ(س) = س³ − س و محور السينات

الحل أصفار الاقتران هي حدود التكامل

هـ(س) = ٠ ← س³ − س = ٠ ← س(س² − ١) = ٠

س = ٠ ، س = ١ ، س = −١

−١ + + + ٠ − − − ١ (م٢ ، م١)

$م = \int_{-١}^{١} |س^٣ - س|\,\text{دس}$

$م = \int_{-١}^{٠} (س^٣ - س)\,\text{دس} + \int_{٠}^{١} (س - س^٣)\,\text{دس}$

$= \frac{س^٤}{٤} - \frac{س^٢}{٢} \Big|_{-١}^{٠} + \frac{س^٢}{٢} - \frac{س^٤}{٤} \Big|_{٠}^{١}$

$= ٠ - (\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢}) + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} - ٠$

$= \frac{١}{٢}$ وحدة مربعة

⑦ (كتاب) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى هـ(س) = ٢ − √س ومحوري السينات والصادات

الحل محور الصادات مستقيم س = ٠

هـ(س) = ٠ ← ٢ − √س = ٠ ، س = ٤

$م = \int_{٠}^{٤} |٢ - \sqrt{س}|\,\text{دس}$

٠ + + + + ٤ − − −

$م = \int_{٠}^{٤} (٢ - \sqrt{س})\,\text{دس} = \int_{٠}^{٤} ٢ - س^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس}$

$= ٢س - \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{٠}^{٤} = ٢س - \frac{٢}{٣}(\sqrt{س})^٣ \Big|_{٠}^{٤}$

$= \frac{٨}{٣}$ وحدة مربعة

⑧ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $م(س) = \sqrt{١ - س}$ ومحور السينات ومحور الصادات

الحل $س = ١$

$م(س) = ٠ \leftarrow \sqrt{١ - س} = ٠ ، \ س = ١$

$م = \int_{٠}^{١} |\sqrt{١ - س}|\, دس$

$\overset{م}{٠ \ + + + \ ١}$

$م = \int_{٠}^{١} \sqrt{١ - س}\, دس = \int_{٠}^{١} (١ - س)^{\frac{١}{٢}}\, دس$

$= \frac{-٢}{٣} (١ - س)^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{٠}^{١}$

$م = \frac{-٢}{٣} (\sqrt{١ - س})^{٣} \Big|_{٠}^{١} = \frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة

⑨ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $م(س) = س^{٢} - ٥س + ٦$ ومحور السينات

الحل الأصفار هي الحدود

$م(س) = ٠ \leftarrow س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$

$(س - ٢)(س - ٣) = ٠ ، \ س = ٢ ، \ س = ٣$

$م = \int_{٢}^{٣} |س^{٢} - ٥س + ٦|\, دس$

$\overset{م}{٢ \ - - - \ ٣ \ + +}$

$م = -\int_{٢}^{٣} (س^{٢} - ٥س + ٦)\, دس$

$= \frac{-س^{٣}}{٣} + \frac{٥س^{٢}}{٢} - ٦س \Big|_{٢}^{٣}$

$= \frac{-٢٧}{٣} + \frac{٤٥}{٢} - ١٨ - (\frac{-٨}{٣} + ١٠ - ١٢)$

$= -٩ + \frac{٤٥}{٢} - ١٨ + \frac{٨}{٣} - ١٠ + ١٢$

$م = -٢٥ + \frac{٤٥}{٢} + \frac{٨}{٣} = \frac{-١٥٠}{٦} + \frac{١٣٥}{٦} + \frac{١٦}{٦}$

$م = \frac{١}{٦}$ وحدة مساحة

⑩ $م(س) = س^{٢} + ١$ ، أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى م(س) ومحور السينات في الفترة $[-٣ ، ٣]$

الحل $م(س) = ٠ \leftarrow س^{٢} + ١ = ٠$ لا يحلل

$م = \int_{-٣}^{٣} |س^{٢} + ١|\, دس$

$\overset{م}{-٣ \ + + + \ ٣ \ +}$

$م = \int_{-٣}^{٣} (س^{٢} + ١)\, دس$

$م = \frac{س^{٣}}{٣} + س \Big|_{-٣}^{٣} = ٢٤$ وحدة مساحة

⑪ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $م(س) = هـ^{٢س}$ ومحور السينات ومحور الصادات والمستقيم $س = ٢$

الحل $س = ٠ ، \ س = ٢ \quad [٠ ، ٢]$

$م(س) = ٠ \leftarrow هـ^{٢س} \neq ٠$

$م = \int_{٠}^{٢} |هـ^{٢س}|\, دس = \int_{٠}^{٢} هـ^{٢س}\, دس$

$م = \frac{١}{٢} هـ^{٢س} \Big|_{٠}^{٢} = \frac{١}{٢}(هـ^{٤} - ١)$ وحدة مساحة

⑫ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $م(س) = جاس - \frac{١}{٢}$ ومحور السينات في الفترة $[\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$

الحل $م(س) = ٠ \leftarrow جاس - \frac{١}{٢} = ٠ ، \ جاس = \frac{١}{٢}$

$س = \frac{\pi}{٦} ، \ \frac{٥\pi}{٦}$ × تهمل خارج الفترة

$\overset{م_{١}}{\frac{-\pi}{٢} \ - - - \ \frac{\pi}{٦}} \ \overset{م_{٢}}{+ + + \ \frac{\pi}{٢}}$

$م = \int_{\frac{-\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} |جاس - \frac{١}{٢}|\, دس$

$م = \int_{\frac{-\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٦}} (\frac{١}{٢} - جاس)\, دس + \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} (جاس - \frac{١}{٢})\, دس$

$م = \frac{١}{٢}س + جتاس \Big|_{\frac{-\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٦}} + -جتاس - \frac{١}{٢}س \Big|_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}}$

$م = \frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣}$ وحدة مربعة

١٢ ص ٢٠ + (كتاب)

⑬ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $م(س) = جتا(\pi س)$ ومحور السينات في الفترة $[٠ ، ٢]$

الحل $م(س) = ٠ \quad \pi س = \frac{\pi}{٢} \leftarrow س = \frac{١}{٢}$

$\pi س = \frac{٣\pi}{٢} \leftarrow س = \frac{٣}{٢}$

$- - \ \overset{م_{١}}{٠ \ + + + \ \frac{١}{٢}} \ \overset{م_{٢}}{- - - - \ \frac{٣}{٢}} \ \overset{م_{٣}}{+ + + \ ٢} \ +$

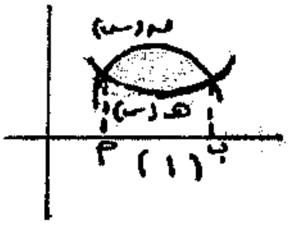
م = $\int_{٠}^{٢} \left| \text{جتا}(\pi \text{س}) \right| \text{دس}$

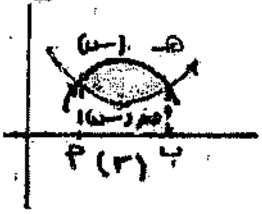
م = $\int_{٠}^{\frac{١}{٢}} \text{جتا } \pi \text{س دس} + \int_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} -\text{جتا } \pi \text{س دس} + \int_{\frac{٣}{٢}}^{٢} \text{جتا } \pi \text{س دس}$

م = $\frac{١}{\pi} \text{جا } \pi \text{س} \Big|_{٠}^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{\pi} \text{جا } \pi \text{س} \Big|_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{\pi} \text{جا } \pi \text{س} \Big|_{\frac{٣}{٢}}^{٢}$

م = $\frac{٤}{\pi}$ وحدة مساحية

الجزء الثاني
حساب المساحة
المحصورة بين منحنيين
في الفترة [أ ، ب]





حدود التكامل : نقاط تقاطع المنحنيين

الشكل (١) ق(س) $\geq$ هـ(س) في الفترة [أ ، ب]

م = $\int_{أ}^{ب} (\overset{\text{منوم}}{\text{ق(س)}} - \overset{\text{تحت}}{\text{هـ(س)}})\ \text{دس}$

الشكل (٢) هـ(س) $\geq$ ق(س) في الفترة [أ ، ب]

م = $\int_{أ}^{ب} (\overset{\text{منوم}}{\text{هـ(س)}} - \overset{\text{تحت}}{\text{ق(س)}})\ \text{دس}$

خطوات الحل

① إيجاد نقاط التقاطع (حدود التكامل)

إيجاد قيم س من ق(س) = هـ(س)

② تحديد ق(س) $\geq$ هـ(س)

أو هـ(س) $\geq$ ق(س)

③ إيجاد المساحة

* نقطتين تقاطع (حدين)

م = $\int_{أ}^{ب} (\text{ق(س)} - \text{هـ(س)})\ \text{دس}$ ، ق(س) $\geq$ هـ(س)

* أكثر من نقطتين تقاطع (أكثر من حدين)

م = مجموع المساحات الناتجة

م = $\int_{أ}^{جـ} (\text{ق(س)} - \text{هـ(س)})\,\text{دس} + \int_{جـ}^{ب} (\text{هـ(س)} - \text{ق(س)})\,\text{دس} + \cdots$

حيث ق(س) $\geq$ هـ(س)

__ملاحظة__ في هذا الجزء لا يوجد داعي للرسم

أمثلة

① جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٩ - س^{٢} والمستقيم ص = ٥

__الحل__ نجد نقاط التقاطع ق(س) = ص

٩ - س^{٢} = ٥ ← س^{٢} = ٤ ← س = ± ٢

ق $\geq$ ص
−٢ ٢

م = $\int_{-٢}^{٢} (\text{ق(س)} - \text{ص})\ \text{دس}$

م = $\int_{-٢}^{٢} (٩ - \text{س}^{٢} - ٥)\ \text{دس} = \int_{-٢}^{٢} (٤ - \text{س}^{٢})\ \text{دس}$

= ٤س - $\frac{\text{س}^{٣}}{٣} \Big|_{-٢}^{٢}$ = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مساحية

② جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = ٤س

__الحل__ نجد نقاط التقاطع ق(س) = هـ(س)

س^{٢} = ٤س ← س^{٢} - ٤س = ٠ ← س(س - ٤) = ٠

س = ٠ ، س = ٤

هـ $\geq$ ق
٠ ٤

م = $\int_{٠}^{٤} (\text{هـ(س)} - \text{ق(س)})\ \text{دس}$

م = $\int_{٠}^{٤} (٤\text{س} - \text{س}^{٢})\ \text{دس}$ = ٢س^{٢} - $\frac{\text{س}^{٣}}{٣} \Big|_{٠}^{٤}$

م = ٣٦ وحدة مساحية

٢٠٠٣ ش

③ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $ق(س) = ٦ - س^٢$ ، $هـ(س) = س$

الحل نقاط التقاطع $ق(س) = هـ(س)$

$٦ - س^٢ = س \Leftarrow س^٢ + س - ٦ = ٠$

$(س + ٣)(س - ٢) = ٠ \Leftarrow س = ٢ ، س = -٣$

$ق \geq هـ$

$-٣ \quad ٢$

$م = \int_{-٣}^{٢} (ق(س) - هـ(س))\,دس$

$م = \int_{-٣}^{٢} (٦ - س - س^٢)\,دس$

$م = \int_{-٣}^{٢} -س^٢ - س + ٦\,دس$

$م = -\frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢} + ٦س \Big|_{-٣}^{٢}$ $م = \frac{١٢٥}{٦}$ وحدة مربعة

٢٠٠٤ ص

④ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = س$ و منحنى العلاقة $س^٢ = ٤ص$

الحل $ق(س) = س$ ، $\overset{هـ(س)}{ص} = \frac{س^٢}{٤}$

$\frac{س^٢}{٤} = س \Leftarrow \frac{س^٢}{٤} - س = ٠ \Leftarrow س(\frac{س}{٤} - ١) = ٠$

$س = ٠ ، س = ٤$

$ق \geq هـ$

$٠ \quad ٤$

$م = \int_{٠}^{٤} (ق(س) - هـ(س))\,دس = \int_{٠}^{٤} (س - \frac{س^٢}{٤})\,دس$

$: \frac{س^٢}{٢} - \frac{س^٣}{١٢} \Big|_{٠}^{٤} = \frac{١٦}{٢} - \frac{٦٤}{١٢}$

$= \frac{١٦}{٢} - \frac{١٦}{٣} = \frac{٤٨}{٦} - \frac{٣٢}{٦}$

$م = \frac{١٦}{٣}$ وحدة مساحة

---

⑤ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $ق(س) = س^٣ + س^٢$ ، $هـ(س) = س^٣ + ١$

الحل نجد نقاط التقاطع

$ق(س) = هـ(س) \Leftarrow س^٣ + س^٢ = س^٣ + ١$

$س^٢ = ١ \Leftarrow س = \pm ١$

$هـ \geq ق$

$-١ \quad ١$

$م = \int_{-١}^{١} (هـ(س) - ق(س))\,دس$

$م = \int_{-١}^{١} (س^٣ + ١ - س^٣ - س^٢)\,دس$

$م = \int_{-١}^{١} (١ - س^٢)\,دس = س - \frac{س^٣}{٣} \Big|_{-١}^{١}$

$م = \frac{٤}{٣}$ وحدة مساحة

٢٠٠٧ ش (الكتاب)

⑥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $ق(س) = ٤س^٣ - ٣س$ ، $هـ(س) = ٥س$

الحل نجد نقاط التقاطع $ق(س) = هـ(س)$

$٤س^٣ - ٣س = ٥س \Leftarrow ٤س^٣ - ٨س = ٠$

$٤س(س^٢ - ٢) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، س = \pm\sqrt{٢}$

$ق \geq هـ \qquad هـ \geq ق$

$-\sqrt{٢} \quad ٠ \quad \sqrt{٢}$

$م = \int_{-\sqrt{٢}}^{٠} (ق(س) - هـ(س))\,دس + \int_{٠}^{\sqrt{٢}} (هـ(س) - ق(س))\,دس$

$م = \int_{-\sqrt{٢}}^{٠} (٤س^٣ - ٨س)\,دس + \int_{٠}^{\sqrt{٢}} (٨س - ٤س^٣)\,دس$

$م = س^٤ - ٤س^٢ \Big|_{-\sqrt{٢}}^{٠} + ٤س^٢ - س^٤ \Big|_{٠}^{\sqrt{٢}} = ٨$ وحدة مربعة

---

⑦ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $ق(س) = \sqrt{س}$ ، $هـ(س) = س$ في الفترة $[٠ ، ٤]$

الحل نجد نقاط التقاطع $ق(س) = هـ(س)$

$\sqrt{س} = س \Leftarrow س = س^٢ \Leftarrow س^٢ - س = ٠$

$س(س - ١) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، س = ١ \notin (١ ، ٤)$

$هـ \geq ق$

$١ \quad ٤$

$م = \int_{١}^{٤} (ق(س) - هـ(س))\,دس$

$م = \int_{١}^{٤} (\sqrt{س} + س)\,دس = \int_{١}^{٤} (س^{\frac{١}{٢}} + س)\,دس$

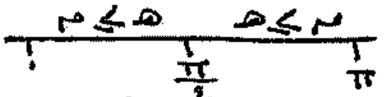
$م = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{س^٢}{٢} \Big|_{١}^{٤}$

$م = \frac{٢}{٣} (\sqrt{س})^٣ + \frac{س^٢}{٢} \Big|_{١}^{٤} = \frac{٧٣}{٦}$ وحدة مساحة

⑧ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = جاس ، هـ(س) = جتاس في الفترة $[0 ، \pi]$

الحل ق(س) = هـ(س) ← جاس = جتاس

جاس − جتاس = 0 ← س = $\frac{\pi}{4} \in [0 ، \pi]$



$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (هـ(س) - ق(س))\, دس + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (ق(س) - هـ(س))\, دس$

$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (جتاس - جاس)\, دس + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (جاس - جتاس)\, دس$

$م = جاس + جتاس \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} + -جتاس - جاس \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$

$م = 2\sqrt{2}$ وحدة مساحة

(كتاب ٢) ٢٠٠٢

---

⑨ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتاس والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0 ، 1)$ ، $(\frac{\pi}{2} ، 0)$

الحل نجد معادلة القطعة المستقيمة

$م = \frac{0 - 1}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{-2}{\pi}$

$ص - ص_1 = م(س - س_1)$ ← $ص - 1 = \frac{-2}{\pi} س$

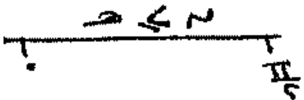
$ص = 1 - \frac{2}{\pi} س$

نجد نقاط التقاطع

لاحظ أن جتا(0) = 1 ، جتا $\frac{\pi}{2}$ = 0

نقاط التقاطع $(0 ، 1)$ ، $(\frac{\pi}{2} ، 0)$

س = 0 ، س = $\frac{\pi}{2}$



$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (ق(س) - ص)\, دس$

$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (جتاس + \frac{2}{\pi} س - 1)\, دس$

$م = جاس + \frac{1}{\pi} س^2 - س \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$م = \left(1 + \frac{\pi^2}{4\pi} - \frac{\pi}{2}\right) - (0 + 0 - 0)$

$م = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4}$

$م = \frac{4 - \pi}{4}$ وحدة مساحة

---

⑩ جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س³ + 3 ومماس المنحنى عند النقطة (1 ، 4) ومحور الصادات والواقعة في الربع الأول

الحل نجد معادلة المماس

م = ق′(1) ← ق′(س) = 3س² ← م = 3

المعادلة $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

ص − 4 = 3(س − 1) ← ص = 3س + 1

نقاط التقاطع ق(س) = ص

$س^3 + 3 = 3س + 1$ ← $س^3 - 3س + 2 = 0$

$س^3 - 3س + 2 = 0$ عوامل (2) ±1 ، ±2

(س − 1) س = 1

س³	س²	س	ثابت
1	0	−3	2
	+	+	+
	1	1	−2
1	1	−2	0

$\boxed{1}$

$(س - 1)(س^2 + س - 2) = 0$

$(س - 1)(س + 2)(س - 1) = 0$

س = 1   س = −2 × تهمل ربع أول

الحدود $\boxed{س = 1}$ نقطة تماس ، س = 0 محور الصادات

$م = \int_{0}^{1} (ق(س) - ص)\, دس$

$م = \int_{0}^{1} (س^3 + 3 - 3س - 1)\, دس$

$م = \int_{0}^{1} (س^3 - 3س + 2)\, دس$

$م = \frac{س^4}{4} - \frac{3س^2}{2} + 2س \Big|_{0}^{1}$ $م = \frac{3}{4}$ وحدة مساحة

الجزء الثالث
حساب المساحة المحصورة بين أكثر من منحنيين

* اقترانين احداهما مطلق
* ثلاث اقترانات
* اقترانين و محور السينات
* اقترانين احداهما

طريقة الحل

① رسم منحنى كل اقتران وتظليل المنطقة المطلوبة

② تحديد بداية المنطقة (أقل احداثي سيني لها) وتحديد نهاية المنطقة (أكبر احداثي سيني لها)

③ تحديد نقط التقاطع الواقعة بين أي اقترانين واقعة بين نهاية المنطقة و بدايتها و إقامة أعمدة منها لتجزئة المنطقة إلى مناطق جزئية

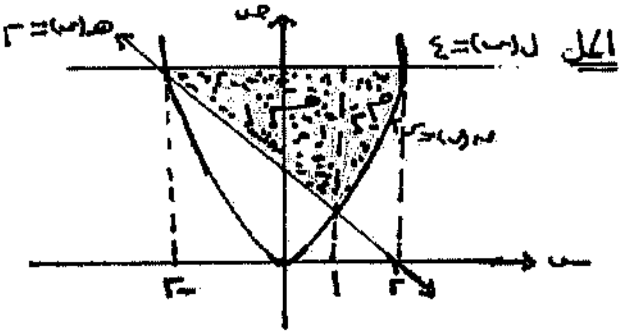
④ ايجاد تلك النقط من خطوة ③

⑤ حساب مساحة كل منطقة جزئية بالرجوع إلى الجزء الأول و الثاني ثم نجد المساحة المطلوبة بجمع المساحات الجزئية

أمثلة

① جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = $س^{٢}$ ، هـ(س) = ٢ − س ، ل(س) = ٤

الحل ل(س) = ٤



بداية المنطقة ق(س) = ل(س) ، ل(س) = هـ(س)

ق(س) = هـ(س)

هـ(س) = ل(س) ← ٢ − س = ٤ ← س = −٢

نهاية المنطقة ق(س) = ل(س)

$س^{٢} = ٤$ ← س = ±٢   س = ٢

نقطة تقاطع ق(س) ، هـ(س)

ق(س) = هـ(س) ← $س^{٢} = ٢ - س$ ← $س^{٢} + س - ٢ = ٠$

(س + ٢)(س − ١) = ٠   س = −٢ ، $\boxed{س = ١}$

$$م = \int_{-٢}^{١} \overset{م_{١}}{(ل(س) - هـ(س))} + \int_{١}^{٢} \overset{م_{٢}}{(ل(س) - ق(س))}\, د س$$

$$م = \int_{-٢}^{١} (س + ٢)\, د س + \int_{١}^{٢} (٤ - س^{٢})\, د س$$

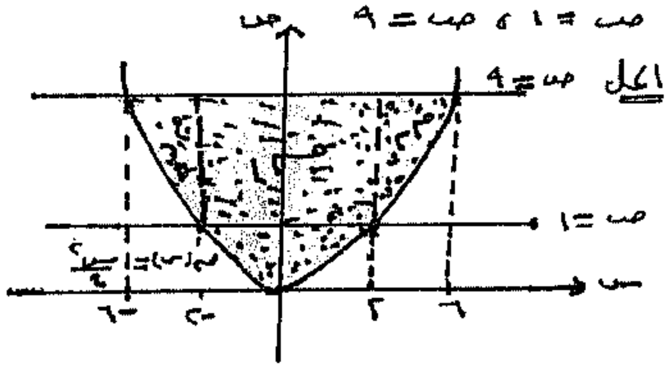
$$م = \left. \frac{س^{٢}}{٢} + ٢س \right|_{-٢}^{١} + \left. ٤س - \frac{س^{٣}}{٣} \right|_{١}^{٢}$$

$م = \frac{٣٧}{٦}$ وحدة مساحية

---

② جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^{٢}}{٤}$ والمستقيمان ص = ١ ، ص = ٩

الحل ص = ٩



بداية المنطقة ونهايتها ق(س) = ٩

$\frac{س^{٢}}{٤} = ٩$ ← $س^{٢} = ٣٦$ ← س = −٦ بداية

س = ٦ نهاية

* تقاطع م(س) ، ص = ١

$\frac{س^٢}{٤} = ١ \rightarrow \boxed{س = ٢}$ ، س = −٢

م = $\int_{-٦}^{-٢} (٩ - \frac{س^٢}{٤})$ دس + $\int_{٢}^{٦} (٩ - \frac{س^٢}{٤})$ دس + $\int_{-٢}^{٢}$ ٨ دس

م = ٨ (٨) + ٩س − $\frac{س^٣}{١٢} \Big|_{٢}^{٦}$

م = $\frac{٢٠٤}{٣}$ وحدة مساحة

ط٢ لوجود التماثل

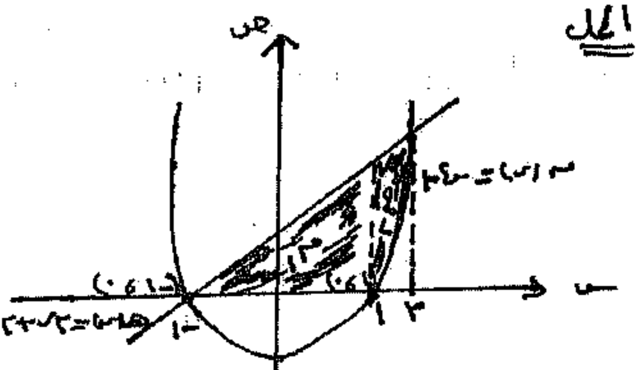
م = ٢$\left(\int_{٠}^{٢} (٩ - ١)\right.$ دس + $\left.\int_{٢}^{٦} (٩ - \frac{س^٢}{٤})\right.$ دس)

$\frac{٢٠٤}{٣}$ وحدة مساحة

---

③ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين م(س) = س^٢ − ١ ، هـ(س) = ٢س + ٢ ، ومحور السينات

الحل



بداية المنطقة هـ(س) مع محور السينات

٢س + ٢ = ٠ ← س = −١

نهاية المنطقة م(س) مع هـ(س)

س^٢ − ١ = ٢س + ٢ ← س^٢ − ٢س − ٣ = ٠

(س − ٣) (س + ١) = ٠ ، $\boxed{س = ٣}$ ، س = −١ ×

تقاطع م(س) مع محور السينات

س^٢ − ١ = ٠ ← س = ١ ، س = −١

م = $\int_{-١}^{١}$ هـ(س) دس + $\int_{١}^{٣}$ (هـ(س) − م(س)) دس

م = $\int_{-١}^{١}$ (٢س + ٢) دس + $\int_{١}^{٣}$ (٢س − س^٢ + ٣) دس

م = س^٢ + ٢س $\Big|_{-١}^{١}$ + س^٢ − $\frac{س^٣}{٣}$ + ٣س $\Big|_{١}^{٣}$

م = $\frac{٢٨}{٣}$ وحدة مربعة

٢٠٠١

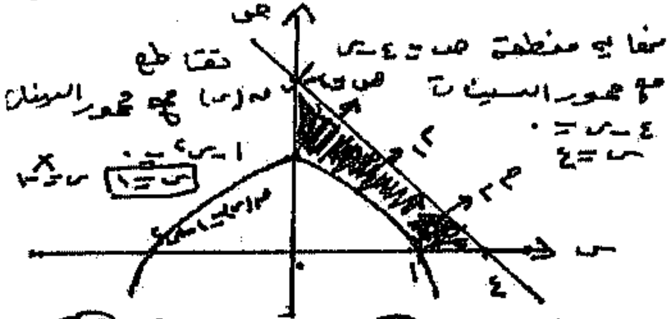
④ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران م(س) = ١ − س^٢ ، والمستقيم س + ص = ٤ ، ومحوري السينات والصادات

الحل م(س) = ١ − س^٢ ، ص = ٤ − س ، ص = ٠ ، س = ٠ بداية المنطقة (محور الصادات)

نهاية منطقة ص = ٤ − س مع محور السينات

٤ − س = ٠

س = ٤



م = $\int_{٠}^{١} ((٤ - س) - (١ - س^٢))$ دس + $\int_{١}^{٤} (٤ - س)$ دس

م = $\int_{٠}^{١} (س^٢ - س + ٣)$ دس + $\int_{١}^{٤} (٤ - س)$ دس

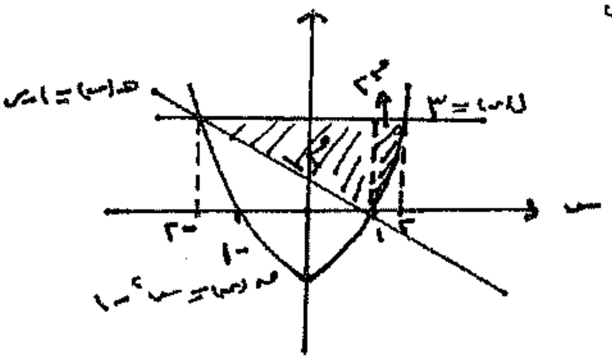
= $\frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢} + ٣س \Big|_{٠}^{١}$ + ٤س − $\frac{س^٢}{٢} \Big|_{١}^{٤}$

م = $\frac{٢٢}{٣}$ وحدة مساحة

٢٠١٣ ش (الكتاب) ، (ص ١٧٠)

⑤ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات م(س) = س^٢ − ١ ، هـ(س) = ١ − س ، ل(س) = ٣

الحل



بداية المنطقة م(س) مع هـ(س) ، م(س) مع ل(س)

ل(س) مع هـ(س)

ل(س) = هـ(س) ← ١ − س = ٣ ← س = −٢

نهاية المنطقة ل(س) مع م(س)

$\text{س}^2 - 1 = 3 \rightarrow \boxed{\text{س} = 2}$ ، $\text{س} = -2$

$\text{م} = \overset{\text{م}_1}{\int_{-2}^{1} (\text{ل}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}))\,\text{دس}} + \overset{\text{م}_2}{\int_{1}^{2} (\text{ل}(\text{س}) - \text{م}(\text{س}))\,\text{دس}}$

$\text{م} = \int_{-2}^{1} (\text{س} + 2)\,\text{دس} + \int_{1}^{2} (4 - \text{س}^2)\,\text{دس}$

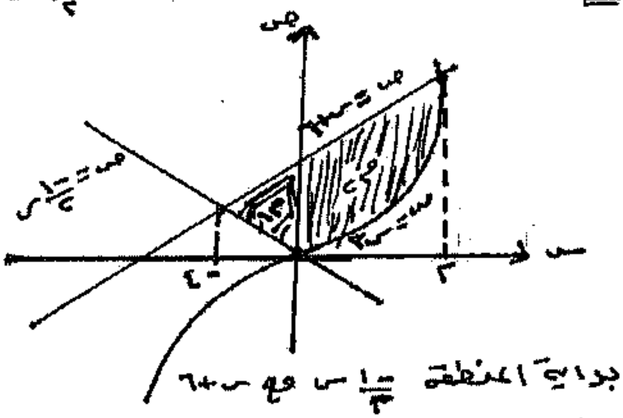
$\text{م} = \left(\frac{\text{س}^2}{2} + 2\text{س}\right)\Big|_{-2}^{1} + \left(4\text{س} - \frac{\text{س}^3}{3}\right)\Big|_{1}^{2}$

$\text{م} = \frac{37}{6}$ وحدة مربعة

---

⑥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات $\text{ص} - \text{س} = 6$ ، $\text{ص} = \text{س}^3$ ، $2\text{ص} + \text{س} = 0$

الحل $\text{ص} = \text{س}^3$ ، $\text{ص} = \text{س} + 6$ ، $\text{ص} = \frac{-1}{2}\text{س}$



بداية المنطقة $\frac{-1}{2}\text{س}$ مع $\text{س} + 6$

$\frac{-1}{2}\text{س} = \text{س} + 6 \qquad \text{س} = -4$

نهاية المنطقة $\text{س} + 6$ مع س^3

$\text{س}^3 = \text{س} + 6 \rightarrow \text{س}^3 - \text{س} - 6 = 0$

بعد التحليل $\text{س} = 2$

تقاطع س^3 مع $\frac{-1}{2}\text{س} \rightarrow \text{س}^3 = \frac{-1}{2}\text{س}$

$\text{س}^3 + \frac{1}{2}\text{س} = 0 \rightarrow \text{س} = 0$

$\text{م} = \overset{\text{م}_1}{\int_{-4}^{0} \left(\text{س} + 6 + \frac{1}{2}\text{س}\right)\text{دس}} + \overset{\text{م}_2}{\int_{0}^{2} (\text{س} + 6 - \text{س}^3)\,\text{دس}}$

$\text{م} = \left(\frac{3}{4}\text{س}^2 + 6\text{س}\right)\Big|_{-4}^{0} + \left(\frac{\text{س}^2}{2} + 6\text{س} - \frac{\text{س}^4}{4}\right)\Big|_{0}^{2}$

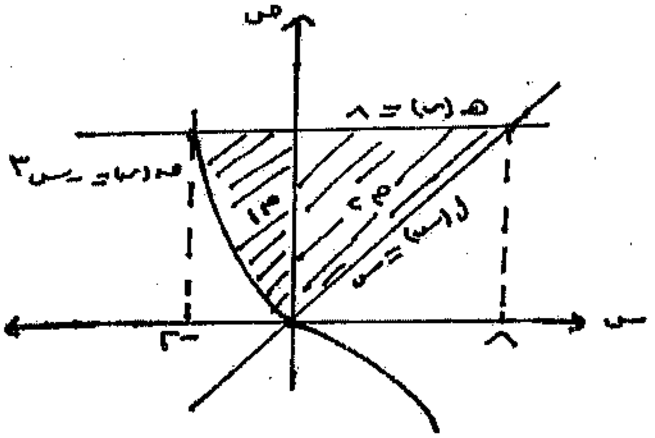
$\text{م} = 22$ وحدة مساحة

٢٠٠٢ شتوي (كتاب)

⑦ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات $\text{م}(\text{س}) = -\text{س}^3$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = 8$ ، $\text{ل}(\text{س}) = \text{س}$

الحل بداية المنطقة هـ(س) مع م(س)

$8 = -\text{س}^3 \rightarrow \text{س} = -2$



نهاية المنطقة هـ(س) مع ل(س) $8 = \text{س}$

تقاطع ل(س) مع م(س) $\text{س} = -\text{س}^3 \quad \boxed{\text{س} = 0}$

$\text{م} = \overset{\text{م}_1}{\int_{-2}^{0} (\text{هـ}(\text{س}) - \text{م}(\text{س}))\,\text{دس}} + \overset{\text{م}_2}{\int_{0}^{8} (\text{هـ}(\text{س}) - \text{ل}(\text{س}))\,\text{دس}}$

$\text{م} = \int_{-2}^{0} (8 + \text{س}^3)\,\text{دس} + \int_{0}^{8} (8 - \text{س})\,\text{دس}$

$= \left(8\text{س} + \frac{\text{س}^4}{4}\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(8\text{س} - \frac{\text{س}^2}{2}\right)\Big|_{0}^{8}$

$\text{م} = 44$ وحدة مربعة

١٩٩٧

⑧ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانين $\text{م}(\text{س}) = |\text{س}|$ ، $\text{ص} = 2 - \text{س}^2$

الحل $|\text{س}| \rightarrow \text{س} = 0$

$\begin{array}{c|c} -\text{س} & \text{س} \\ \hline - \quad 0 & + \end{array}$

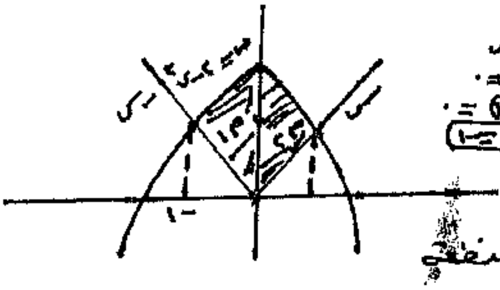
بداية المنطقة $2 - \text{س}^2$ مع $-\text{س}$

$2 - \text{س}^2 = -\text{س}$

$\text{س}^2 - \text{س} - 2 = 0$

$(\text{س} - 2)(\text{س} + 1) = 0$

$\boxed{\text{س} = -1}$ ، $\text{س} = 2$ ✗



نهاية المنطقة

$2 - \text{س}^2$ مع $\text{س} \rightarrow 2 - \text{س}^2 = \text{س}$

$\text{س}^2 + \text{س} - 2 = 0 \rightarrow (\text{س} + 2)(\text{س} - 1) = 0$

$\text{س} \overset{\times}{=} -2$ ، $\boxed{\text{س} = 1}$

تقاطع س مع -س $= \boxed{0}$

$\text{م} = \int_{-1}^{0} (2 - \text{س}^2 + \text{س})\,\text{دس} + \int_{0}^{1} (2 - \text{س}^2 - \text{س})\,\text{دس}$

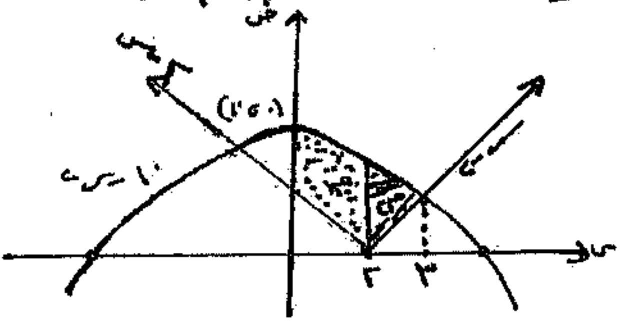
$\text{م} = \boxed{\frac{7}{3}}$ وحدة مساحة

٢٠٠٣ ص

⑨ جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين منحنى $ص = |س - ٢|$ ومنحنى الاقتران $ص = ١٠ - س^{٢}$

الحل $|س - ٢|$

$\frac{٢ - س \qquad س - ٢}{- \qquad ٢ \qquad +}$



بداية المنطقة س = ٠

نهاية المنطقة $١٠ - س^{٢}$ مع $س - ٢$

$١٠ - س^{٢} = س - ٢ \longrightarrow س^{٢} + س - ١٢ = ٠$

$(س + ٤)(س - ٣) = ٠ \longrightarrow س = \cancel{-٤}$ ، $\boxed{س = ٣}$ ربع أول

نقطة تقاطع $س - ٢$ ، $٢ - س$ $\boxed{س = ٢}$

$$م = \overset{م_{١}}{\int_{٠}^{٢} (١٠ - س^{٢} - ٢ + س)\, دس} + \overset{م_{٢}}{\int_{٢}^{٣} (١٠ - س^{٢} - س + ٢)\, دس}$$

$$م = \int_{٠}^{٢} (٨ + س - س^{٢})\, دس + \int_{٢}^{٣} (١٢ - س - س^{٢})\, دس$$

$$م = ٨س + \frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣} \Big|_{٠}^{٢} + ١٢س - \frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣} \Big|_{٢}^{٣}$$

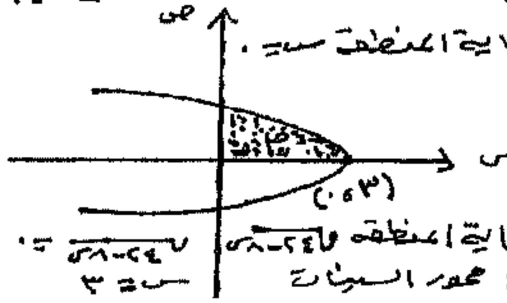
$م = \frac{٣٧}{٢}$ وحدة مساحة

٢٠٠٦ ص

⑩ جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $ص^{٢} = ٢٤ - ٨س$ ومحور السينات الواقعة في الربع الأول

الحل $ص^{٢} = ٢٤ - ٨س \longrightarrow ص = \pm \sqrt{٢٤ - ٨س}$

بداية المنطقة س = ٠



نهاية المنطقة $\sqrt{٢٤ - ٨س}$ مع محور السينات

$\sqrt{٢٤ - ٨س} = ٠$

$س = ٣$

$$م = \int_{٠}^{٣} \sqrt{٢٤ - ٨س}\, دس = \int_{٠}^{٣} (٢٤ - ٨س)^{\frac{١}{٢}}\, دس$$

$$م = (٢٤ - ٨س)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{-١}{٨} \Big|_{٠}^{٣}$$

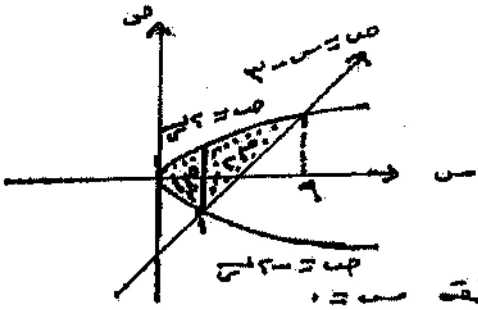
$$م = \frac{-١}{١٢} \left(\sqrt{٢٤ - ٨س}\right)^{٣} \Big|_{٠}^{٣}$$

$م = ٤\sqrt{٦}$ وحدة مساحة

٢٠٠٥ ص

⑪ جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $ص^{٢} = ٤س$ والمستقيم $س - ص = ٣$

الحل $ص = \pm ٢\sqrt{س}$ ، $س - ص = ٣ \longrightarrow ص = س - ٣$



بداية المنطقة س = ٠

نهاية المنطقة تقاطع $س - ٣$ مع $٢\sqrt{س}$

$س - ٣ = ٢\sqrt{س} \longrightarrow س = ٩$

تقاطع $س - ٣$ مع $-٢\sqrt{س} \longrightarrow س = ١$

$$م = \overset{م_{١}}{\int_{٠}^{١} (٢\sqrt{س} + ٢\sqrt{س})\, دس} + \int_{١}^{٩} (٢\sqrt{س} - س + ٣)\, دس$$

$م = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مساحة

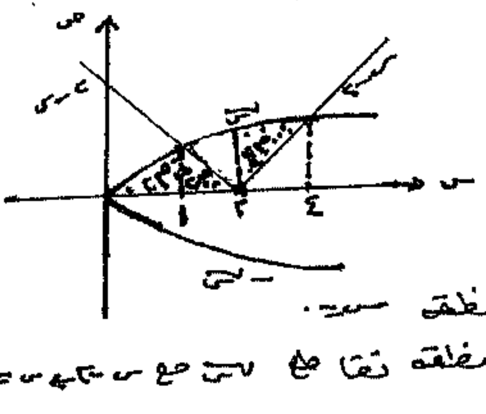
٢٠١٠ ش

⑫ جد مساحة المنطقة المظللة (الكتاب)

حيث $ع(س) = |س - ٢|$

$هـ(س) = \sqrt{س}$

الحل



بداية المنطقة س = ٠

نهاية المنطقة تقاطع $\sqrt{س}$ مع $س - ٢ \longrightarrow س = ٤$

تقاطع $س - ٢$ مع $٢ - س \longrightarrow س = ٢$

تقاطع $٢ - س$ مع $\sqrt{س} \longrightarrow س = ١$

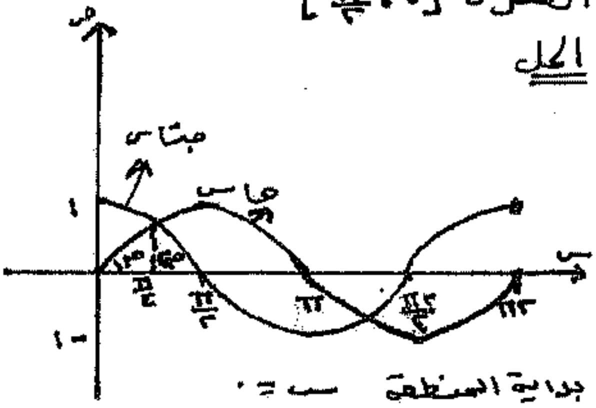
$$م = \int_{0}^{1} \sqrt{س}\ دس + \int_{1}^{2} (٢ - س)\ دس + \int_{2}^{4} (\sqrt{س} - س + ٢)\ دس$$

$م = \boxed{}$

---

⑬ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جاس ، ومنحنى هـ(س) = جتاس ومحور السينات في الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{2}]$

الحل



بداية المنطقة س = ٠

نهاية المنطقة س = $\frac{\pi}{2}$

نقطة تقاطع جاس مع جتاس

جاس = جتاس ← س = $\frac{\pi}{4}$

$$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} جاس\ دس + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جتاس\ دس$$

$$م = -جتاس \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} + جاس \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

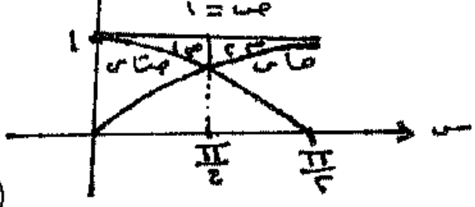
$$م = \frac{-1}{\sqrt{2}} + 1 + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

م = $٢ - \frac{٢}{\sqrt{٢}}$ وحده مساحه

---

⑭ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = جاس ، و هـ(س) = جتاس والمستقيم ص = ١ ، في الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{2}]$

الحل



بداية المنطقة س = ٠

نهاية المنطقة س = $\frac{\pi}{2}$

نقطة تقاطع جاس مع جتاس

جاس = جتاس ← س = $\frac{\pi}{4}$

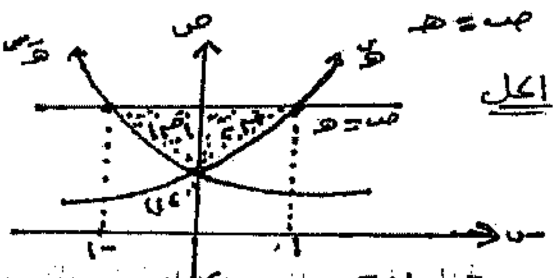
$$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (١ - جتاس)\ دس + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (١ - جاس)\ دس$$

$م = \boxed{}$

٢٠٠٦ ش

⑮ جد المساحة المحصورة بين منحنيي ق(س) = $هـ^{س}$ ، ل(س) = $هـ^{-س}$ والمستقيم ص = هـ

الحل



بداية المنطقة تقاطع $هـ^{-س}$ مع ص = هـ

$هـ^{-س}$ = هـ ← س = ١-

نهاية المنطقة $هـ^{س}$ مع ص = هـ

$هـ^{س}$ = هـ س = ١

نقطة تقاطع $هـ^{س}$ مع $هـ^{-س}$ = عند س = ٠

$$م = \int_{-1}^{0} (هـ - هـ^{-س})\ دس + \int_{0}^{1} (هـ - هـ^{س})\ دس$$

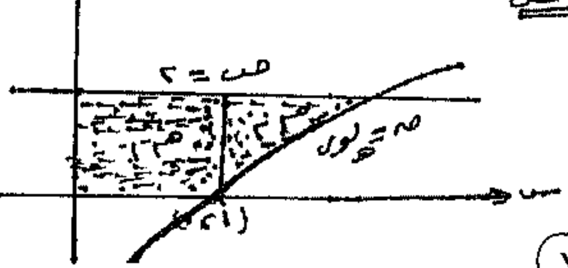
$$م = هـس + هـ^{-س} \Big|_{-1}^{0} + هـس - هـ^{س} \Big|_{0}^{1}$$

م = ٢ وحده مربعه

---

⑯ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = لوهـ س والمستقيم ص = ٢ ومحوري السينات والصادات

الحل



بداية المنطقة س = ٠

نهاية المنطقة تقاطع لو_هـ س مع ص = ٢

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = ٢ \leftarrow \text{س} = \text{هـ}^{٢}$

تقاطع م(س) مع محور السينات

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = ٠ \leftarrow \text{س} = ١$

$$\text{م} = \int_{٠}^{١} ٢\,\text{دس} + \int_{١}^{\text{هـ}^{٢}} (٢ - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{دس}$$

$$\text{م} = ٢ + ٢\text{س}\Big|_{١}^{\text{هـ}^{٢}} - \int_{١}^{\text{هـ}^{٢}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}$$

بالأجزاء

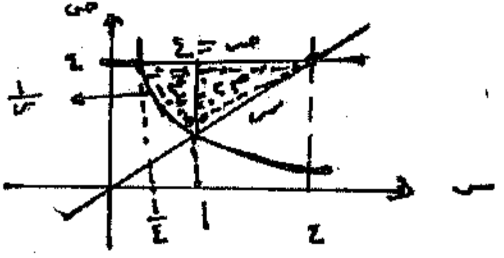
م = هـ^٢ − ١ وحدة مساحة

---

⑰ جد المساحة المحصورة بين منحنيات

$\text{م(س)} = \frac{١}{\text{س}}$ ، ل(س) = س ، ص = ٤

الحل



بداية المنطقة تقاطع $\frac{١}{\text{س}}$ مع ص = ٤

$\text{س} = \frac{١}{٤}$

نهاية المنطقة تقاطع س مع ص = ٤

س = ٤

تقاطع م(س) مع ل(س)

$\frac{١}{\text{س}} = \text{س} \rightarrow \text{س}^{٢} = ١ \rightarrow \boxed{\text{س} = ١}\ \text{س} \overset{\times}{=} -١$

$$\text{م} = \int_{\frac{١}{٤}}^{١} \left(٤ - \frac{١}{\text{س}}\right)\text{دس} + \int_{١}^{٤} (٤ - \text{س})\,\text{دس}$$

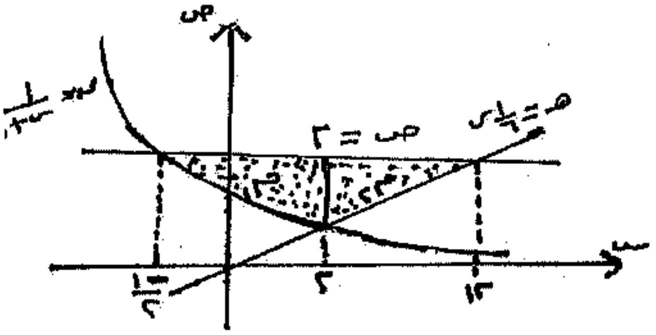
$\text{م} = \boxed{\quad}$

---

⑱ جد المساحة المحصورة بين منحنيات الاقترانات $\text{م(س)} = \frac{١}{\text{س}+١}$ ، $\text{هـ(س)} = \frac{١}{٢}\text{س}$ ، والمستقيم ص = ٣

الحل بداية المنطقة تقاطع م(س) مع ص = ٣

$\frac{١}{\text{س}+١} = ٣ \leftarrow \text{س} = \frac{-٢}{٣}$



نهاية المنطقة تقاطع هـ(س) مع ص = ٢

$\frac{١}{٢}\text{س} = ٢ \leftarrow \text{س} = ٢$

تقاطع م(س) مع هـ(س)

$\frac{١}{\text{س}+١} = \frac{١}{٢}\text{س} \leftarrow \text{س} = ٢$

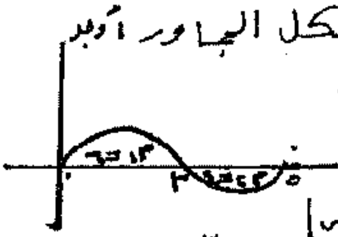
$$\text{م} = \int_{\frac{-١}{٢}}^{٢} \left(٣ - \frac{١}{\text{س}+١}\right)\text{دس} + \int_{٢}^{١٢} \left(٣ - \frac{١}{٢}\text{س}\right)\text{دس}$$

$\text{م} = \boxed{\quad}$

الجزء الرابع
حساب التكامل والمساحة من خلال رسمه معطى في السؤال

أمثلة

① معتمداً الشكل المجاور أوجد



١) $\int_{٠}^{٥} \text{م(س)}\,\text{دس}$

٢) $\int_{٠}^{٥} |\text{م(س)}|\,\text{دس}$

٣) $\left|\int_{٠}^{٥} \text{م(س)}\,\text{دس}\right|$

الحل ١) $\int \text{م(س)}\,\text{دس} + \int^{٣} \text{م(س)}\,\text{دس} + \int_{٣}^{٥} \text{م(س)}\,\text{دس}$

$= ٦ - ٤ = ٢$

٢) $\int_{٠}^{٥} |\text{م(س)}|\,\text{دس} = \int_{٠}^{٣} |\text{م(س)}|\,\text{دس} + \int_{٣}^{٥} |\text{م(س)}|\,\text{دس}$

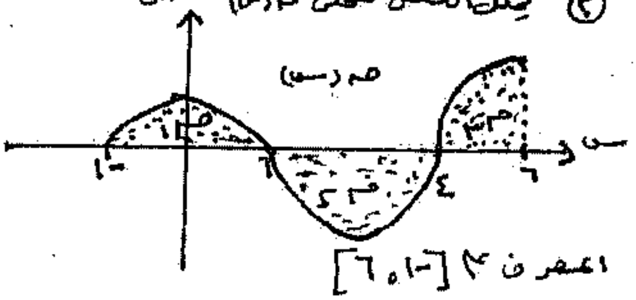
$= ٦ + |-٤| = ١٠$ (المساحة)

٣) $\left|\int_{٠}^{٥} \text{م(س)}\,\text{دس}\right| = \left|\int_{٠}^{٥} \text{م(س)}\,\text{دس}\right|$

$= |٦ - ٤| = |٢| = ٢$

٢٠١٠ ش

② يمثل الشكل منحنى ق(س)



المعرف ع [-١، ٦]

وكانت م١ = ٣ وحدات مربعة، م٢ = ٤ وحدات مربعة، م٣ = ٢ وحدة مربعة

أوجد ① $\int_{٦}^{١-} ق(س)\,دس$

الحل $\int_{٦}^{١-} ق(س)\,دس = -\int_{١-}^{٦} ق(س)\,دس$

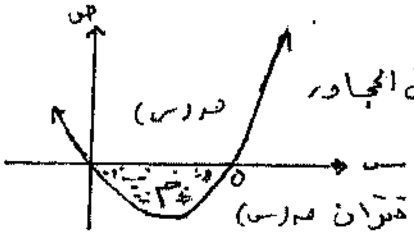
$= -\left(\int_{١}^{٢} ق(س)\,دس + \int_{١}^{٤} ق(س)\,دس + \int_{٤}^{٦} ق(س)\,دس\right)$

$= -(٣ - ٤ + ٢) = -١$

② المساحة المحصورة في الفترة [-١، ٤] **الحل** ٣ + ٤ = ٧ وحدة مساحة

٢٠١٣ ش ③

يمثل الشكل المجاور



منحنى الاقتران ق(س)

إذا كانت المساحة م = ٨ وحدات مربعة

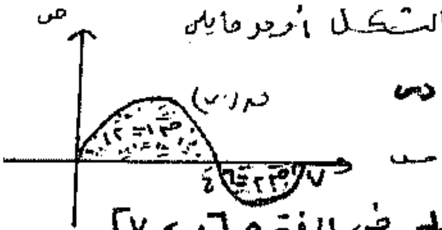
أوجد $\int_{٠}^{٥} (١ - ق(س))\,دس$

الحل $= \int_{٠}^{٥} ١\,دس - \int_{٠}^{٥} ق(س)\,دس$

$= ٥ - -٨ = ١٣$

---

④ معتمداً الشكل أوجد ما يلي



١) $\int_{٤}^{٠} ق(س)\,دس$

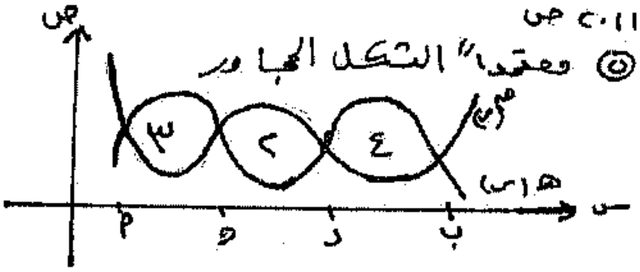
٢) المساحة في الفترة [٠، ٧]

الحل ١) $\int_{٤}^{٠} ق(س)\,دس = -\int_{٠}^{٤} ق(س)\,دس = -١٢$

٢) م = م١ + م٢ = ١٨ وحدة مساحة

٢٠١١ ص

⑤ معتمداً الشكل المجاور



إذا كان ق، هـ اقترانين متصلين في الفترة [أ، ب] وكانت مساحات المناطق بين الاقترانين كما في الشكل

أوجد $\int_{جـ}^{ب} (ق(س) - هـ(س))\,دس$

الحل $\int_{جـ}^{ب} (ق(س) - هـ(س))\,دس$

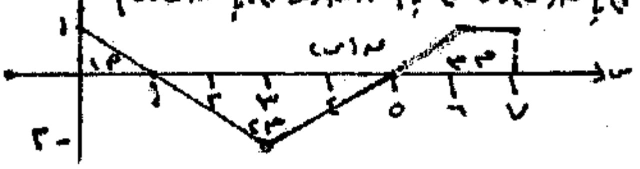
$= \int_{جـ}^{د} (ق(س) - هـ(س)) + \int_{د}^{ب} (ق(س) - هـ(س))\,دس$

$= ٢ + -٤ = -٢$

كتاب

⑥ معتمداً الشكل المجاور أوجد

١) $\int_{٠}^{٧} ق(س)\,دس$ ٢) $\int_{٠}^{٧} |ق(س)|\,دس$ ٣) $\left|\int_{٠}^{٧} ق(س)\,دس\right|$



م١ = م المثلث١ = ½ × ١ × ١ = ½

م٢ = م مثلث٢ = ½ × ٤ × ٢ = ٤

م٣ = م شبه المنحرف = ½ (١ + ٢) × ١ = $\frac{٣}{٢}$

١) $\int_{٠}^{٧} ق(س)\,دس = \int_{٠}^{١} ق(س)\,دس + \int_{١}^{٥} ق(س)\,دس + \int_{٥}^{٧} ق(س)\,دس$

$= \frac{١}{٢} - ٤ + \frac{٣}{٢} = -٢$

٢) $\int_{٠}^{٧} |ق(س)|\,دس$

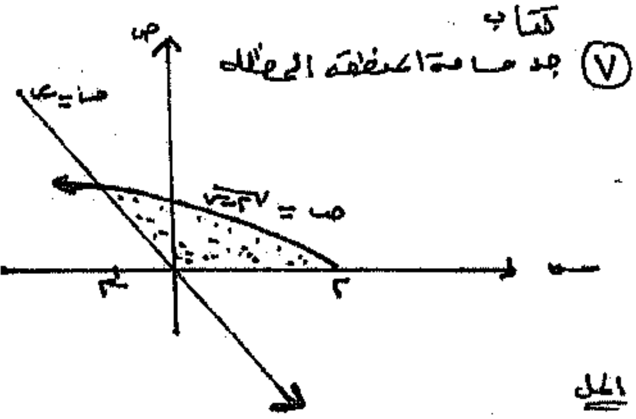
المطلوب المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات في الفترة [٠، ٧]

$= م_١ + م_٢ + م_٣ = \frac{١}{٢} + ٤ + \frac{٣}{٢} = ٦$

٣) $\left|\int_{٠}^{٧} ق(س)\,دس\right| = |-٢| = ٢$

كتاب

⑦ جد مساحة المنطقة المظللة



الحل

بداية المنطقة س = -٢ ، نهاية المنطقة س = ٢

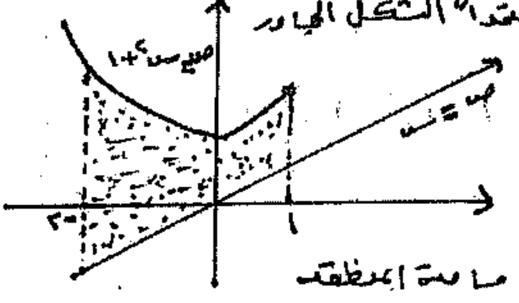
نقطة تقاطع س = ٠

$م = \int_{-٢}^{٠} (\sqrt{٢ - س} + س)\,دس + \int_{٠}^{٢} \sqrt{٢ - س}\,دس$

$م = \frac{١٠}{٣}$ وحدة مساحة

---

⑧ معتمداً الشكل المجاور

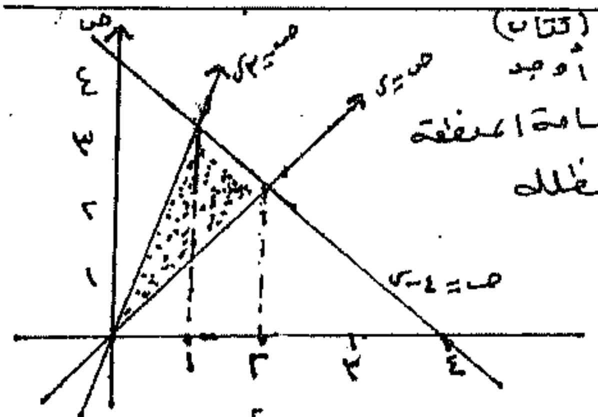


أوجد مساحة المنطقة المظللة

الحل $م = \int_{-٢}^{١} (س^٢ + ١ - س)\,دس = \frac{١٥}{٢}$ وحدة مربعة

(كتاب)

⑨ أوجد مساحة المنطقة المظللة

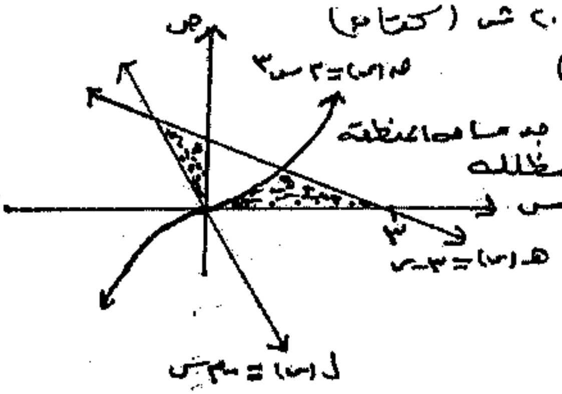


الحل $م = \int_{٠}^{١} (٣س - س)\,دس + \int_{١}^{٢} (٤ - ٢س)\,دس$

م = ١ + ١ = ٢ وحدة مساحة

٢٠٠٩ ش (كتاب)

⑩ أوجد مساحة المنطقة المظللة



الحل نجد نقاط التقاطع

ل(س) = هـ(س) ← $\boxed{س = -٣}$

ق(س) = هـ(س) ← $\boxed{س = ١}$

ق(س) = ل(س) ← $\boxed{س = ٠}$ من الشكل

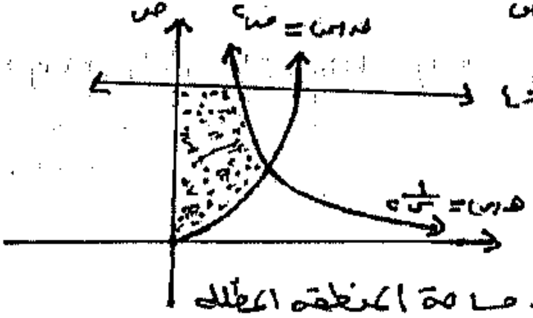
$م = \int_{-٣}^{٠} (٣ - س + ٢س)\,دس + \int_{٠}^{١} ٢س^٣\,دس + \int_{١}^{٣} (٣ - س)\,دس$

م = ٧ وحدة مساحة

---

١١ ص ٢٠

⑪



أوجد مساحة المنطقة المظللة

الحل نجد نقاط التقاطع

$\frac{١}{س^٢} = س^٢ \leftarrow س = \pm ١$ $\boxed{س = ١}$ نهاية المنطقة

$٤ = \frac{١}{س^٢} \leftarrow س = \pm \frac{١}{٢}$ $\boxed{س = \frac{١}{٢}}$

بداية المنطقة س = ٠

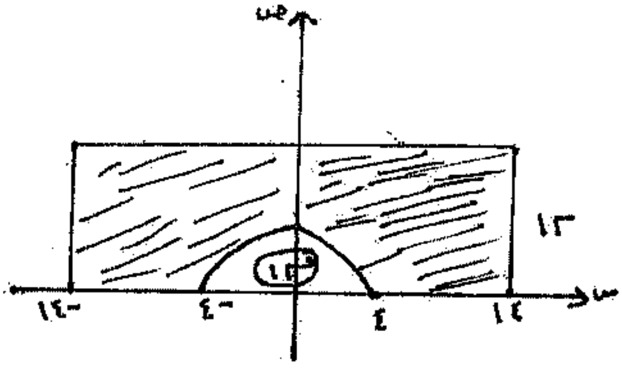
$م = \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} (٤ - س^٢)\,دس + \int_{\frac{١}{٢}}^{١} (\frac{١}{س^٢} - س^٢)\,دس$

$م = \frac{٨}{٣}$ وحدة مساحة

الجزء الخامس
أمثلة جميلة

وزاره تكتاب

① يمثل الشكل المجاور الواجهة الأمامية لمبنى ، موضح هذا المبنى يمثل المنحنى ق(س) = ٨ − $\frac{س^٢}{٢}$ ، جد التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة إذا علمت أن سعر دهان الوحدة المربعة ٢٠ قرش .



الحل نجد تقاطع ق(س) مع محور السينات

٨ − $\frac{س^٢}{٢}$ = ٠ ← س = ±٤

بداية المنطقة س = −١٤

نهاية المنطقة س = ١٤

م = م١ مستطيل − م٢

م = ١٣ × ٢٨ − $\int_{-٤}^{٤} (٨ - \frac{س^٢}{٢})$ دس

م = $\frac{٨٨٠}{٣}$ وحدة مساحة مربعة

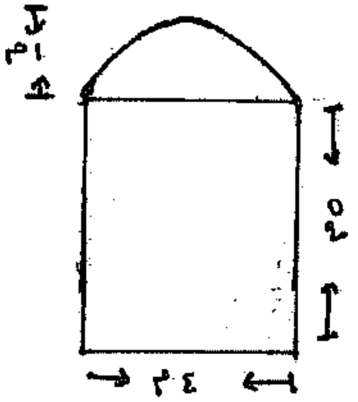
تكلفة الدهان = السعر × المساحة

= ٢٠ × $\frac{٨٨٠}{٣}$ = $\frac{١٧٦٠٠}{٣}$ قرش

= $\frac{١٧٦}{٣}$ دينار

وزاره

④ يمثل الشكل المجاور المدخل الجنوبي لوزارة التربية والتعليم وهو على شكل مستطيل يعلوه قوس على شكل قطع مكافئ ، جد مساحة واجهة هذا المدخل



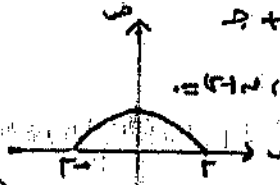
الحل مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ٤ × ٥ = ٢٠ م٢

مساحة القوس

ق(س) = أس٢ + ب س + جـ

ق(٠) = ١ ، ق(٢) = ٠ ، ق(−٢) = ٠



ق(٠) = ١ ← $\boxed{جـ = ١}$

ق(٢) = ٠ ← ٤أ + ٢ب + ١ = ٠ ← $\boxed{٤أ + ٢ب = −١}$ ①

ق(−٢) = ٠ ← ٤أ − ٢ب + ١ = ٠ ← $\boxed{٤أ − ٢ب = −١}$ ②

بحل المعادلتين أ = $\frac{-١}{٤}$ ، ب = ٠

ق(س) = $\frac{-١}{٤}$س٢ + ١

م القوس = $\int_{-٢}^{٢} (\frac{-١}{٤}س^٢ + ١)$ دس = $\frac{٨}{٣}$

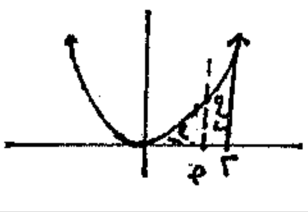
م المدخل = م المستطيل + م القوس

م = ٢٠ + $\frac{٨}{٣}$ = $\frac{٦٨}{٣}$

٢٠١١

③ جد قيمة الثابت (أ) بحيث أن المستقيم س = أ يقسم المساحة المحصورة بين منحنى س = $\sqrt{ص}$ والمستقيم س = ٢ ومحور السينات إلى قسمين متساويين

الحل



بداية المنطقة س = ٠

نهاية المنطقة س = ٢

أ ← يقسم المساحة إلى قسمين متساويين

$$\int^{٢} س^{٢} دس = ٢ \times \int^{أ} س^{٢} دس$$

$$\frac{س^{٣}}{٣} \Big|^{٢} = ٢ \times \frac{س^{٣}}{٣} \Big|^{أ}$$

$$\frac{٨}{٣} = ٢ \times \frac{أ^{٣}}{٣} \leftarrow أ^{٣} = ٤$$

$$أ = \sqrt[٣]{٤}$$

ورقة عمل الدرس العاشر

أسئلة متنوعة

① جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٨س ومحور السينات

$\boxed{م = ٨ \text{ وحدة مربعة}}$

② جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ١ − $\sqrt{س}$ ومحور السينات ومحور الصادات

$\boxed{م = \frac{١}{٣} \text{ وحدة مربعة}}$

③ جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = هـ^{س} والمستقيم ص = ٣ ومحور الصادات

$\boxed{م = لو_{هـ}^{٤} - ١}$

٢٠١٣ ش

④ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = س^{٢} − ١ ، ه(س) = ١ − س ، ل(س) = ٣

$\boxed{م = \frac{٧٩}{٦} \text{ وحدة مربعة}}$

٢٠١٢ ش (كتاب)

⑤ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = س^{٣} ، ه(س) = $\frac{١}{٤}$س ، ل(س) = ٦ − س

$\boxed{٢٢ \text{ وحدة مساحة}}$

٢٠١٢ ص (كتاب)

⑥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = س^{٣} ، ه(س) = س^{٢} + ٤ ، ل(س) = −٤س

$\boxed{\frac{٢٨}{٣} \text{ وحدة مربعة}}$

⑦ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات ق(س) = $\frac{١}{س}$ ، ل(س) = س ، ص = ٤

⑧ إذا كانت المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) = س^{٢} والمستقيم ص = أس تساوي $\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة ، جد قيمة أ حيث أ > ٠.

⑨ (كتاب + ٢٠١٦ ش)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س) = ١ + جاس ، هـ(س) = ١ + جتاس في الفترة $[\frac{\pi}{4} ، \frac{3\pi}{4}]$

الجواب : $2\sqrt{2}$ وحدة مساحة

⑩ (كتاب) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين المستقيم ص = ٨ س ، ومنحنى الاقتران ص = ٩ - $س^2$ ومحور الصادات

⑪ (كتاب)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س) = جاس ، هـ(س) = جا٢س الواقعة في الربع الأول

⑫ (كتاب + ٢٠١٥ ش)

جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{2}{س}$ ومحور الصادات والمستقيم ٢س - ص = ٠ ، والمستقيم هـ - س = ٠ حيث (هـ) العدد النيبيري .

الجواب : ٣ وحدات مساحة

⑬ . (كتاب)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ١ + $س^3$ ، ل(س) = $س^2$ + ٥ ، والمستقيمين ص + س - ١ = ٠ ، ٣ - س = ٠

⑭ (٢٠١٥ ص)

جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الثاني والمحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = $س^2$ ، هـ(س) = $س^3$ - ٣س ، والمستقيم ص = ٢س .

الجواب : $\frac{13}{4}$ وحدة مساحة

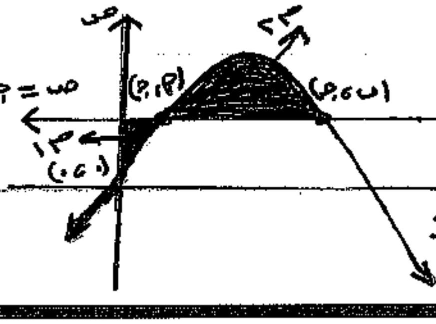
⑮ (٢٠١٧ ش)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات :
ق(س) = $س^2$ ، هـ(س) = $\sqrt{8س}$ ، ل(س) = س + ٦ ومحور الصادات .

الجواب : $\frac{56}{3}$ وحدة مساحة

⑯ (٢٠١٦ ص)

(رُسم المستقيم ص = جـ فقطع منحنى الاقتران ق(س) = ٢س - ٣$س^3$ في النقطتين (أ ، جـ) ، (ب ، جـ) حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية موجبة مكونا" المنطقتين م١ ، م٢ كما في الشكل الآتي ، جد قيمة (جـ) التي تجعل مساحة المنطقتين م١ ، م٢ متساويتين .



الجواب: جـ = $\frac{4}{9}$

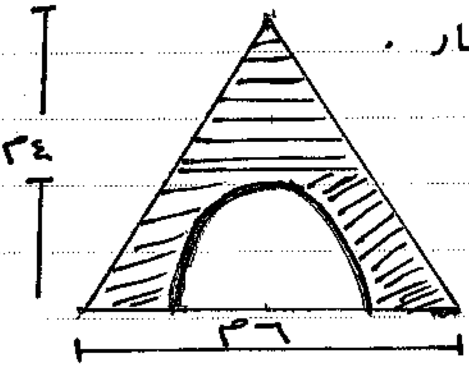
⑰ (كتاب)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية :

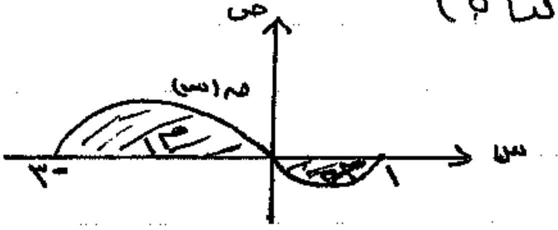
ق(س) = $\frac{٣}{س^٢}$ ، هـ(س) = س - ٢ ، ل(س) = ٣

⑱ (كتاب)

يمثل الشكل الآتي الواجهة الأمامية لأحد المباني ، ومدخل هذا المبنى على شكل منحنى الاقتران ق(س) = ٢ - $\frac{١}{٢}$ س^٢ ، ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة ، إذا علمت أن سعر دهان الوحدة المربعة نصف دينار .



⑲ (كتاب)



معتمداً الشكل إذا كان م١ = ١٠ ، م٢ = ٤ ، جد $\int^{٢}$ س ق(١-س^٢) دس