التكامل غير المحدود

سؤال: ما هو الاقتران الذي مشتقته هو الاقتران $f(X) = 2X$

جواب: $F(X) = X^2$

$F(X) = X^2+1$

$F(X)= X^2 -21$

نلاحظ أن هناك عدد لا نهائي من هذه الاقترانات ولكن جميعها تكون مشتقتها هي $f(x) = 2x$ (مشتقة الثابت هي صفر)

وبصورة عامة نسمي الاقتران $F(X)$ بالاقتران الأصلي الذي مشتقته تساوي $f(x)$ ، حيث $f(x)$ يسمى الاقتران المكامل، أي أن

$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)+C]$

حيث $f(x)$ متصل ، c ثابت

مثال: جد الاقتران الأصلي لكل من:

$1)\ f(X) = 6X^5$

$F(X) = X^6 + C$ (لأن مشتقة $F(X)$ هي $5X^6$)

$2)\ f(X) = -2X^{-5}$

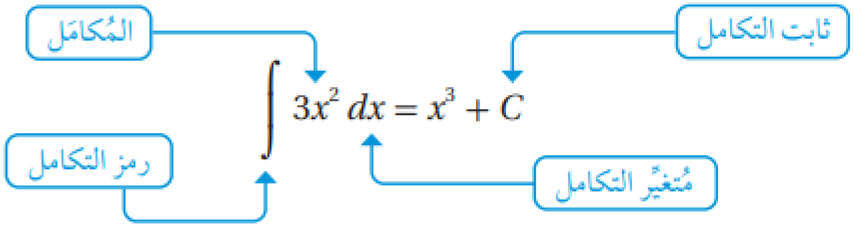
$FX = \frac{1}{2}X^{-4} + C$ (لأن مشتقة $F(X)$ هي $-2X^{-5}$)

وأنه يمكن أيضا كتابة هذه العلاقة في صورة المعادلة الآتية:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

تسمى المعادلة السابقة التكامل غير المحدود للاقتران $f(x)$، ويسمى($\int$) رمز التكامل، ويسمى الاقتران $f(x)$ المكامل، ويسمى c ثابت التكامل،أما dx فرمز يشير الى أن التكامل يتم بالنسبة الى المتغير x الذي يسمى متغير التكامل.

يُبيِّن المُخطَّط الآتي عناصر التكامل غير المحدود للاقتران: $f(x) = 3x^2$:



مثال: جد $\int 4x^3 dx$

الحل: $x^4 + C$

<u>قواعد التكامل غير المحدود:</u>

1) اذا كان k عددا حقيقيا، فأن:

$1)\ \int K dx = Kx + C$ تكامل الثابت $2)\ \int X^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ تكامل القوة

مثال: جد كلا من التكاملات الآتية:

$1)\ \int 2dx = 2x + C$

$2)\ \int X^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$

$3)\ \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C$

1) اذا كان k ثابتا، فإن:

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$1)\ \int Kf(x)\, dx = K \int f(x)\, dx$

تكامل المجموع أو الفرق

$2)\ \int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

مثال:أجد كلا من التكاملين الآتيين:

$1)\ \int 2x^8 dx = \frac{2x^9}{9} + C$

$2)\ \int (3X^{-4} + 2X^{\frac{-1}{2}})\, dx = 3\frac{x^{-3}}{-3} + 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -x^{-3} + 4x^{\frac{1}{2}} + C$

<u>لإيجاد تكامل اقتران يحتوي ضرب أو قسمة حدود تحتاج الى كتابة المكامل بصورة حدود جبرية على شكل اقتران قوة ثم اجراء عملية التكامل.</u>

مثال:أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$1)\ \int \frac{(x - 2x^{3})}{x} dx \ (\text{بتوزيع المقام على البسط})\ \int \left(\frac{x}{x} - \frac{2x^{3}}{x}\right) dx \int (1 - 2x^{2})\, dx = x - \frac{2}{3}x^{3} + C$$

$$2)\ \int \frac{(X+1)(X-1)}{\sqrt[3]{X}} dx \int x^{\frac{-1}{3}} (x^{2} - 1)\, dx = \int \left(x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{-1}{3}}\right) dx = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$$

تكامل $(ax+b)^n$

اذا كان a و b عددين حقيقيين، وكانت $a\neq0$، فأن:

$$\int (ax+b)^{n} dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + C$$

مثال:

أجد كل من التكاملات الآتية:

$$1)\ \int (3x-1)^{5} dx = \frac{1}{3(6)} (3x-1)^{6} + C = \frac{1}{18} (3X-1)^{6} + C$$

$$2)\ \int \frac{1}{\sqrt[3]{(5X-2)^{2}}} dx = \int (5x-2)^{\frac{-2}{3}} dx = \frac{1}{5\left(\frac{1}{3}\right)} (5x-2)^{\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(5x-2)} + C$$

الشرط الأولي:

يجب إيجاد قيمة ثابت التكامل في بعض التطبيقات مثل إيجاد قاعدة اقتران اذا علمت مشتقته حيث يتطلب إيجاد نقطة تحقق الاقتران الأصلي التي تساعدنا في إيجاد قيمة C عند تعويضها وتسمى هذه النقطة الشرط الأولي.

مثال: أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ علماً بأن $f'(x) = 2x+3$ ، ويمر منحناه بالنقطة $(2,2)$

$$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int (2x+3)\, dx = x^{2} + 3x + c$$

لإيجاد قيمة C وذلك أعوض النقطة المعطاة في الاقتران

$$f(x) = x^{2} + 3x + c f(2) = 22 = (2)^{2} + 3(2) + c2 = 10 + cc = -8 f(x) = x^{2} + 3x - 8$$

تطبيقات التكامل : معادلات الحركة:

***تعلمت سابقا:

1) مشتقة المسافة بالنسبة الى الزمن تعطي السرعة اللحظية.

2) مشتقة السرعة بالنسبة الى الزمن تعطي التسارع اللحظي.

***والآن سوف نتعلم ان:

1) تكامل التسارع بالنسبة الى الزمن يعطي السرعة اللحظية.

2) تكامل السرعة بالنسبة الى الزمن يعطي المسافة.

مثال:احسب سرعة جسيم بعد ثانيتين من بدء حركته علما بأنه بدأ الحركة من السكون و بتسارع 5mls^2

$= \int a(t)\,dt = \int 5dt = 5t + cv(0) = 05(0) + c = 0c = 0v(t) = 5tv(2) = 5(2) = 10mls$