الاحتمال بالتباديل والتوافيق

Probability with Permutations and Combinations

فكرة الدرس : استعمال مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق لحساب احتمالات الحوادث في تجربة عشوائية.

تعلّمت سابقًا كيفية إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة عشوائية باستخدام مبدأ العدِّ، ويُمكنني الآن الاستفادة من ذلك في حساب احتمال وقوع حادث مُعيَّن ضمن تلك التجربة العشوائية.

مثال 1

على 4 بطاقات مُتماثِلة ، ثم رُتِّبت البطاقات عشوائيًّا في صف (year) كُتِبت أحرف كلمة واحد. ما احتمال أنْ يظهر الحرفان (a) وَ (y) متجاورين؟

الـحـل :

الخطوة 1: أفترض أنَّ الحادث A يعني ظهور الحرفين y وَ a متجاورين.

الخطوة 2: أحسب عدد عناصر Ω ؛ أي عدد طرائق ترتيب 4 عناصر في صف واحد.

�(�) = 4!	مبدأ العدِّ الأساسي
= 4×3×2×1	تعريف مضروب العدد
= 24	بالتبسيط

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A

وأُعامِل كلًّ منهما ، ay ، أو ya :متجاورين في إحدى صورتين a وَ y أُظهِر الحرفين كأنَّها عنصر واحد، ثم أجد عدد طرائق ترتيب 3 عناصر ، كما في الشكل.

r	e	y a		r	e	a y

عدد طرائق ترتيب 3 عناصر = !3 ، ويوجد ترتيبين ، إذن أضرب !3 في العدد 2 : إذن

�(�) = 2 × 3!	مبدأ العدِّ الأساسي
= 2 × 3 × 2 × 1	تعريف مضروب العدد
= 12	بالتبسيط

: ، لذا

�(�) = �(�)�(�) = 1224	بالتعويض في صيغة الاحتمال
�(�) = 12	الناتج

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

12متجاورين هو a وَ y إذن احتمال ظهور الحرفين

عندما يكون الترتيب مهمًّا في تجربة اختيار مجموعة من العناصر في تجربة عشوائية، فإنَّه يُمكن استخدام التباديل لحساب احتمالات اختيار تلك العناصر.

مثال 2

يتكوّن مجلس الإدارة في إحدى الشركات من 5 أعضاء، بينهم حسام وغيث .ما احتمال اختيار حسام رئيسًا لمجلس الإدارة، وغيث نائبًا للرئيس إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

: الحل

الخطوة 1: أفترض أنَّ A يعني اختيار حسام رئيسًا، وغيث نائبًا للرئيس.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω

عدد طرائق اختيار عنصرين (ترتيبهما مهم) من بين 5 عناصر — �(�) = �25

بالتعويض في قانون التباديل — =5!(5−2)!

بالتبسيط — =5×4×3!3! = 20

: الترتيب مهم في هذه الحالة ؛ لذا فإنَّ

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A

�(�) = 1 : توجد حالة واحدة يكون فيها حسام رئيسًا، وغيث نائبًا للرئيس ؛ لذا فإنَّ

بالتعويض في صيغة الاحتمال — �(�) = �(�)�(�) = 120

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

إذن احتمال اختيار حسام رئيسًا للمجلس وغيث نائبًا له هو 120

عندما لا يكون الترتيب مهمًّا في تجربة اختيار مجموعة من العناصر في تجربة عشوائية، فإنَّه يُمكن استخدام التوافيق لحساب احتمالات اختيار تلك العناصر. ••

مثال 3

أراد مُدرب كرة السلة اختيار 5 لاعبين من بين 12 لاعب لمنافسة فريق آخر ، ما احتمال اختيار : سعيد ، علي ، أحمد ، رامي ، جميل ، إذا كانت عملية الاختيار عشوائيًا ؟

الحل :

الخطوة 1: أفترض أنَّ A للمنافسة(جميل ، رامي ، أحمد ، علي ، سعيد) يعني اختيار .

عدد طرائق اختيار 5 عناصر من بين 12 عنصر �(�) = �512

بالتعويض في قانون التوافيق =12!5! (12-5)!

بالتبسيط = 12×11×10×9×8×7!5! × 7! =792

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A

سعيد ، علي ، أحمد ، رامي ، جميل) للمنافسة وهو اختيار (توجد حالة واحدة لاختيار

؛ اللاعبين الخمسة المذكورة أسمائهم وترتيب اختيارهم ليس مهمًا

لذا فإنَّ : 1 =(�)�

بالتعويض في صيغة الاحتمال �(�) = �(�)�(�) = 1792

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

•• من العناصر عشوائيًّا في مرحلة أولى 1� من بين 1� تتطلَّب بعض المواقف اختيار عدد 2� +1� من العناصر عشوائيًّا في مرحلة ثانية، وتُمثِّل 2� من بين 2� ، و مع مراعاة الترتيب (تباديل)، أو من دون 2� أو 1� العناصر الكلية، ويُمكِن اختيار مراعاة الترتيب (توافيق).

مثال 4

أرادت إحدى الشركات تكوين لجنة خُماسية من بين 5 مهندسين و 7 فنيين يعملون لديها ،
فأجد الاحتمال في كل من الحالات الآتية :

a) اختيار 3 من المهندسين و 2 من الفنيين لتكوين اللجنة.

الحل :

الخطوة 1: أفترض أنَّ الحادث A يعني اختيار 3 من الفنيين و 2 من المهندسين

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω

عدد طرائق اختيار 5 عناصر من بين 12 عنصر   �(�) = �512

بالتعويض في قانون التوافيق ، والتبسيط   =12!5! (12−5)! =12×11×10×9×8×7!5!×7! =792

الترتيب غير مهم لاختيار لجنة فيها 5 أعضاء من بين 12 عضو ؛ لذا أستخدم التوافيق :

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A

أجد عدد طرائق اختيار 3 مهندسين من بين 5 مضروبًا في عدد طرائق اختيار 2 فنيين من بين 7 والترتيب غير مهم في كلتا الحالتين. وبحسب مبدأ العَدِّ،
فإنَّ :

�(�) =�35×�27 =5!3!(5−3)!×7!2!(7−2)! =10×21 =210

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

التعويض في صيغة الاحتمال : �(�) = �(�)�(�) = 210792=35132

---

b) أنْ يكون رئيس اللجنة ونائبه من المهندسين ، والأعضاء الثلاثة الآخرون من الفنيين.

الحل :

الخطوة 1: أفترض أنَّ الحادث B يعني أنْ يكون رئيس اللجنة ونائبه من المهندسين ، والأعضاء الثلاثة الآخرون من الفنيين.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω

�(�) = �512 عدد طرائق اختيار 5 عناصر من بين 12 عنصر

=12!5! (12−5)! =12×11×10×9×8×7!5!×7! =792 بالتعويض في قانون التوافيق ، والتبسيط

: الترتيب غير مهم لاختيار لجنة فيها 5 أعضاء من بين 12 عضو ؛ لذا أستخدم التوافيق

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث B

أجد عدد طرائق اختيار مهندسَين من بين 5 مهندسِين (الترتيب مهم في هذه الحالة ؛ لأنَّ أحد المُهندسَين رئيس والآخر نائبه مضروبًا في عدد طرائق اختيار 3 فنيين من بين 7 (الترتيب غير مهم هنا) :

إذن :

�(�) =�25×�37 =5! (5−2)!×7!3!(7−3)! = 20×35 =700

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

التعويض في صيغة الاحتمال

: �(�) = �(�)�(�) = 700792=175198