التباديل

Permutations

فكرة الدرس : تعرُّف التباديل، واستعمالها في حَلِّ مسائل حياتية.

- التباديل : هي عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار مجموعة من الأشياء، ومراعاة ترتيب اختيار هذه الأشياء.

توجد طريقة واحدة لترتيب اختيار الحرف (K)

K

عدد تباديل الحرف (K) : 1

يُمكن اختيار الحرف (F) قبل ، أو بعده الحرف (K)

KF FK

عدد تباديل الحرفين (K, F) : 2

يُمكن اختيار الحرف (G) أولًا ، أو ثانيًا ، أو ثالثًا.

GFK FGK FKG GKF KGE KFG

عدد تباديل الأحرف (K , F , G) : 6

قد لا يَلزم أحيانًا إيجاد عدد طرائق الاختيار لعناصر المجموعة كلها. فمثلًا ، إذا أردْتُ تحديد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار لجنة مُكوَّنة من 3 أشخاص (رئيس ، ومساعد ، وعضو) ، وترتيبهم من مجموعة تحوي 6 أشخاص ، فإنَّه يُمكِنني استعمال مبدأ العَدِّ الأساسي كما يأتي :

عدد طرائق اختيار رئيس اللجنة		عدد طرائق اختيار مساعد اللجنة		عدد طرائق اختيار عضو اللجنة
6	×	5	×	4

إذن، يُمكِنني اختيار 3 أشخاص، وترتيبهم من مجموعة تحوي 6 أشخاص باستخدام 120 طريقة ، مُراعِياً المُسمّى الوظيفي لكل شخص.

- يُمكِنني أيضًا استعمال المضروب لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأشخاص الثلاثة، وذلك بإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأشخاص الستة جميعًا وترتيبهم، ثم اختصار عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأشخاص الثلاثة الباقين باستعمال القسمة كما يأتي :

$$\frac{\text{طرائق اختيار 6 أشخاص}}{\text{طرائق اختيار 3 أشخاص}} = \frac{6!}{3!} = 120$$

يُمكِن تعميم هذه النتيجة في صورة قانون.

مفهوم أساسي (التباديل)

بالكلمات : كل مرَّة، هو r من العناصر ، أُخِذ منها n عدد تباديل :

$$\text{عدد التباديل} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث : r , n وَ ، عددان صحيحان موجبان $r \leq n$

فمثلاً، عدد تباديل 5 عناصر، أُخِذ منها 3 عناصر كل مرَّة، هو :

$$\frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

- رموز رياضية : يُمكِن استعمال أيٍّ من الرموز الآتية للتعبير عن تباديل n من

(n, r) , $P(n, r)$, P_r^n : كل مرَّة r العناصر التي أُخِذ منها

- حالات خاصة للتباديل :

1. مثلاً ، $P_n^n = n!$: عنصر كل مرة n عنصر ، أُخذ منها n عدد تباديل :
$5! = 120$:
2. مثلاً ، $P_1^n = n$: عنصر ، أُخذ منها عنصر واحد كل مرة n عدد تباديل :
$P_5^5 = 5$:

مثال :

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي :

P_7^{10}) P_8^8

$P(38,8) = \frac{38!}{(38-8)!}$	تعريف التباديل
$=\frac{38\times37\times36\times35!}{35!}$	باختصار ! 35 من البسط والمقام
$= 336$	بالضرب

الحل :

$\frac{C(10,5)\times C(7,2)}{C(27,5)} = \frac{10!}{5!5!}\times\frac{7!}{2!5!}\div\frac{27!}{5!22!}$	بإعادة كتابة المسألة
$= \frac{10!}{5!(10-5)!}\div\frac{7!}{2!(7-2)!}$	تعريف التباديل
$= \frac{10!}{5!(10-5)!}\times\frac{2!(7-2)!}{7!}$	التبسيط بتحويل القسمة إلى ضرب
$= \frac{10!}{5!\,5!}\times\frac{5!\,7!}{7!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{7!} = 720$	باختصار العناصر المشتركة بين البسط والمقام

- يُمكِن إيجاد عدد طرائق الاختيار باستعمال التباديل في كثير من المواقف الحياتية التي يكون فيها الترتيب مهمًّا ، مثل عدد طرائق ترتيب الجلوس على مقاعد لعدد من الأشخاص ، أو عدد طرائق ترتيب مجموعة من الكتب المختلفة على رف.

مثال :

ما عدد الطرائق الممكنة لاختيار رئيسًا لمركز ثقافي ، ونائب له من الموظفين : أيمن ، خالد ، باسم ، غسّان ؟

الحل :

طريقة 1 : يُمكِنني استعمال الجدول لحصر الخيارات المُمكِنة جميعها على النحو الآتي :

نائب الرئيس / رئيس المركز	غسّان	باسم	خالد	أيمن
أيمن	(أيمن ، غسّان)	(أيمن ، باسم)	(أيمن ، خالد)	
خالد	(خالد ، غسّان)	(خالد ، باسم)		(خالد ، أيمن)
باسم	(باسم ، غسّان)		(باسم ، خالد)	(باسم ، أيمن)
غسّان		(غسّان ، باسم)	(غسّان ،خالد)	(غسّان ، أيمن)

أُلاحِظ أنَّ الترتيب مهم في هذه المسألة ؛ فالاختيار (أيمن ، غسّان) يعني أنَّ أيمن هو رئيس المركز ، وأنَّ غسّان هو نائب الرئيس . أمّا الاختيار (غسّان ، أيمن) فيعني أنَّ غسّان هو رئيس المركز ، وأنَّ أيمن هو نائب الرئيس .

بناءً على الجدول، يُمكِنني عَدُّ الخيارات المختلفة لتحديد عدد طرائق الاختيار ، وهو **12**

طريقة 2 : يُمكِنني استعمال مبدأ العَدِّ الأساسي لإيجاد عدد طرائق الاختيار ، حيث

عدد طرق اختيار نائب الرئيس		عدد طرق اختيار الرئيس	
3	×	4	= 12

طريقة 3 : استخدام التباديل لإيجاد عدد طرائق الاختيار :

أريد اختيار عنصرين من بين 4 عناصر ، مُراعِيًا الترتيب :

قانون التباديل 24 = 4!(4-2)! = 12

- يُمكِن استعمال التباديل أيضًا في التجارب التي تتطلَّب عدم تكرار العناصر المختارة عشوائيًّا من بين مجموعة عناصر ؛ لأنَّ ذلك يمنح كل عنصر أهمية في الترتيب.

مثال :

أجد عدد الكلمات الرباعية (ليس بالضرورة لها معنى) التي يُمكِن تكوينها من حروف اللغة العربية ، علمًا بأنَّه لا يُسمَح بالتكرار.

الحل :

عدد حروف اللغة العربية 28 حرفًا. ولأنَّ التكرار غير مسموح به؛ فإنَّ ترتيب الحروف

428= 28!(28-4)!	قانون التباديل
= 491400	الناتج باستخدام الآلة الحاسبة

مهم. إذن، يُمكِن استعمال التباديل لتحديد عدد طرائق اختيار 4 أحرف من بين 28 حرفًا :