توقُّع المتغير العشوائي

Expectation of a Random Variable

فكرة الدرس : إيجاد التوقُّع والتباين لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.

معلومات سابقة : تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد الوسط الحسابي **(�¯)** لبيانات مُمثَّلة في جداول تكرارية ؛ بقسمة مجموع حاصل ضرب القِيَم في تكراراتها (∑ � . �) على مجموع التكرارات (∑�) باستعمال الصيغة الآتية :

�¯ = ∑� . �∑ �

وبالمثل، يُمكِن إيجاد الوسط الحسابي لتوزيع احتمالي؛ لأنَّ احتمالات قِيَم المتغير العشوائي X نظرًا إلى ؛ (تكرارات نسبية) تُمثِّل تكرارات لتلك القِيَم قسمة كل تكرار على مجموع التكرارات). ولأنَّ مجموع احتمالات قِيَم المتغير العشوائي (التكرارات) هو 1، فإنَّ الوسط الحسابي هو ∑� . �(�)

ويُرمَز إليه ، X للمتغير العشوائي (expectation) في ما يُعرَف باسم التوقُّع بالرمز ***E*(*x*)** .

مفهوم أساسي (التوقع)

بالكلمات : في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع X التوقُّع للمتغير العشوائي في احتمال تلك القيمة X حواصل ضرب كل قيمة للمتغير.

بالرموز : �(�) = ∑� . �(�)

مثال 1 :

في مسح عشوائي شمل 100 أسرة لمعرفة عدد الأطفال لدى كل أسرة الذين تقل أعمارهم

عدد الأطفال (x)	0	1	2	3	4
عدد الأسر (التكرار f)	21	33	30	14	2

عن 3 سنوات ، كانت نتيجة المسح كما في الجدول الآتي:

يُمثِّل عدد الأطفال الذين تقل أعمارهم عن 3 سنوات X بافتراض أنَّ المتغير العشوائي :

1) أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x.

2) أجد التوقُّع للمتغير العشوائي x.

الحل :

1) أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x.

4	3	2	1	0	(x)
0.02	0.14	0.30	0.33	0.21	P(x)

أقسم كل تكرار على مجموع التكرارات، ثم أُنشِئ جدولًا للتوزيع الاحتمالي:

صيغة التوقُّع للمتغير العشوائي x   �(�) = ∑� . �(�)

مجاميع حاصل الضرب   = 0×0.21 + 1×0.33 + 2×0.30 + 3×0.14 + 4×0.02

بالتبسيط   = 1.43

2) أجد التوقُّع للمتغير العشوائي x.

، فإنَّه يُمكن تحديد قِيَم احتمالات مجهولة في X للمتغير العشوائي $E(x)$ إذا عُلِمت قيمة التوقُّع التوزيع الاحتمالي؛ بتكوين نظام من المعادلات الخطية، ثم حلِّه بطريقة الحذف والتعويض.

مثال 2 :

إذا كا ن التو زيع

(x)	1	2	3	4	5
P(x)	a	0.2	b	0.3	0.1

كما في الجدول الآتي X ع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

وكان E(x) = 2.7 من أوجد قيمة كلٍّ من ، : (P(x = 1 و (P(x = 3

�(�) = ∑� . �(�)	صيغة التوقّع للمتغير العشوائي x
1×� + 2 × 0.2 + 3 × � + 4 × 0.3 + 5 × 0.1 = 2.7	لأنَّ التوقُّع هو 2
� + 3� +2.1 = 2.7	بتجميع الحدود المتشابهة
� + 3� = 0.6 .... (1)	بالتبسيط
� + 0.2 + � +0.3 + 0.1 = 1	مجموع الاحتمالات هو 1
� + � + 0.6 =1	بتجميع الحدود المتشابهة
� + � = 0.4 ..... (2)	بالتبسيط
2� = 0.2	بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1)
� = 0.1	بالقسمة على 2
� + 0.1 = 0.4 ⇒ � = 0.3	بتعويض قيمة a أجد b في المعادلة (2)

الحل :

إذن : �(� = 3) = 0.1 , �(�= 1) = 0.3

- التباين(Variance) للمتغير العشوائي X عن المتغير قِيَم لتشتُّت مقياس هو وسطها الحسابي *E(x)* ، ويُمكِن إيجاده باستعمال الصيغة الآتية :

�2 = (∑�2. �(�)) - (�(�))2

مفهوم أساسي (التباين)

بالكلمات : في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع X التباين للمتغير العشوائي في احتمال كل قيمة مطروحًا منه مربع التوقُّع X حواصل ضرب مربعات قِيَم المتغير للمتغير x

بالرموز :   �2 = (∑�2. �(�)) - (�(�))2

مثال 3 :

يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x

(x)	0	1	2	3
P(x)	0.18	0.27	0.35	0.2

1) أجد التوقُّع *E(x)*.

2) أجد التباين �2.

الحل :

�(�) = ∑� . �(�) — صيغة التوقُّع للمتغير العشوائي x

= 0×0.18 + 1 × 0.27 + 2 × 0.35 + 3 × 0.2 — مجاميع حاصل الضرب

= 1.57 — بالتبسيط

1) أجد التوقُّع *E*(*x*).

2) أجد التباين �2

�2 = (∑�2. �(�)) - (�(�))2 — صيغة التباين للمتغير العشوائي x

= (02× 0.18 + 12× 0.27 + 22× 0.35 + 32× 0.2) - (1.57)2 — بالتعويض

= 1.0051 — بالتبسيط