حَلُّ المتباينة الخطية بمتغيرين بيانيًا

فكرة الدرس : حَلُّ متباينة خطية بمتغيرين بيانيًّا.

المتباينة الخطية : جملة رياضية تحوي الرمز ≥ ، أو ≤ ، أو > ، أو < ، وأنَّها قد تحتوي على متغير واحد أو متغيرين. من الأمثلة على المتباينات الخطية بمتغيرين:

$\square + 3\square \leq 6$, $4\square + 8 > 2\square$, $\square - 5\square \geq -10$

•• حلًا للمتباينة الخطية بمتغيرين إذا كان الناتج صحيحًا عند (a , b) يكون الزوج المُرتَّب تعويض إحداثييه في المتباينة.

مثال :

أُحدِّد إذا كان كل زوج مُرتَّب ممّا يأتي يُمثل حَلًا للمتباينة $5\square + 2\square \leq 6$:

a) (2 , -3)

b) (1 , 2)

الحل :

a) (2 , -3)

نعوض الزوج المرتب (2 , -3) في المتباينة : $5\square + 2\square \leq 6$

المتباينة

تعويض $x = 2$ ، $y = -3$

الناتج صحيح ، إذن الزوج المرتب (2 , -3) يمثل حلًا للمتباينة.

$5\square + 2\square \leq 6$

$5(2) + 2(-3) \stackrel{?}{\leq} 6$ - 10

$6 \stackrel{?}{\leq} 6$ ✓ $6 \leq 64$

---

b) (1 , 2)

نعوض الزوج المرتب (1 , 2) في المتباينة $5\square + 2\square \leq 6$

المتباينة الخطية $5x + 2y \leq 6$

تعويض $x = 2$ ، $y = -3$

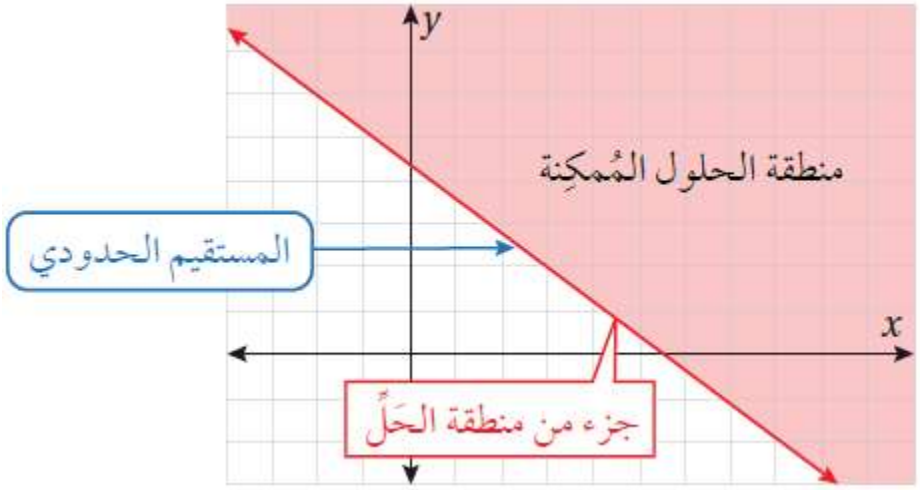
$5(1) + 2(2) \leq ? 65 + 4 \leq ? 69 \not\leq 6$ ✗ الناتج غير صحيح ، إذن الزوج المرتب (1 ، 2) لا يمثل حلًا للمتباينة.

تمثيل المتباينة الخطية بمتغيرين بيانيًا ، وتحديد منطقة الحلول الممكنة لها

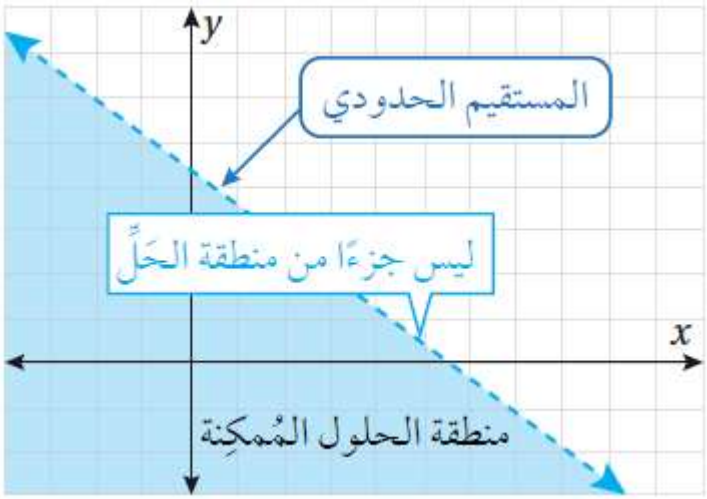
عند تمثيل المتباينة الخطية بيانيًّا على المستوى الإحداثي ، فإنَّ النقاط التي تُمثِّل جميع حلولها المُمكِنة تُسمّى منطقة الحلول المُمكِنة .

•• لتمثيل المتباينة بيانيًّا، أبدأ برسم مستقيم المعادلة المرافقة للمتباينة، التي أحصل عليها برمز المساواة (=) ، حيث تُمثِّل المعادلة الناتجة مستقيمًا ($<$، $>$، $\leq$، $\geq$) باستبدال الرمز يُسمّى المستقيم الحدودي ؛ وهو مستقيم يُقسِّم المستوى الإحداثي إلى جزأين، أحدهما منطقة الحلول المُمكِنة.

قد يكون المستقيم الحدودي جزءًا من منطقة الحلول المُمكِنة إذا تضمَّنت المتباينة الرمز $\geq$ أو الرمز $\leq$ ، عندئذٍ يُرسَم المستقيم الحدودي متصلًا كما في الشكل الآتي :



وقد لا يكون المستقيم الحدودي جزءًا من منطقة الحلول المُمكِنة إذا تضمَّنت المتباينة الرمز $>$ أو الرمز $<$ ، عندئذٍ يُرسَم المستقيم الحدودي مُتقطِّعًا كما في الشكل الآتي :



لتحديد أيِّ المنطقتين على جانبي المستقيم الحدودي هي منطقة الحلول المُمكِنة، أختار أيَّ نقطة (a, b) لا تقع على المستقيم الحدودي، ثم أُعوِّضها في المتباينة الخطية، فإذا كانت تُحققها (أي ينجم عنها نتيجة صحيحة) ، أُظلل الجزء من المستوى الإحداثي الذي تقع فيه تلك النقطة، وإلّا أُظلل الجزء الآخر الذي لا تقع فيه تلك النقطة.

مثال :

أُمثِّل المتباينة الخطية: $x + 2y > 4$ على المستوى الإحداثي.

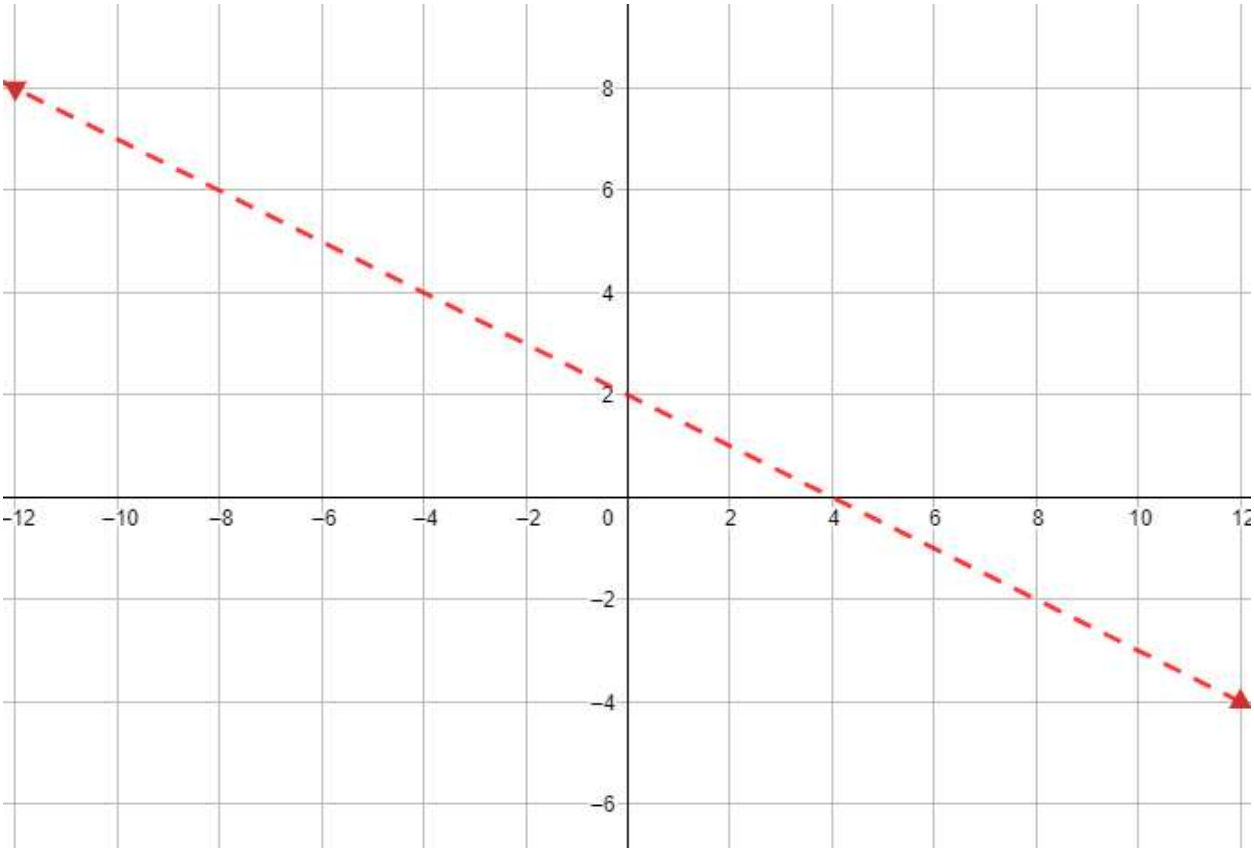
الحل :

الخطوة 1 : تمثيل المستقيم الحدودي $x + 2y = 4$

أُنشئ جدول قِيم لأجد نقاط تقاطع المستقيم مع المحورين ، وذلك بجعل $x = 0$ ؛ لأجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور y ، ثم جعل $y = 0$ ؛ لأجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x

x	0	4
y	2	0

أُعيِّن النقطتين (0 , 2) و (4 , 0) على المستوى الإحداثي ، ثم أرسم مستقيمًا يمر بهما. وبما أنَّه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإنَّ المستقيم الحدودي يُرسم متقطعًا كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2 : تحديد منطقة الحلول المُمكِنة.

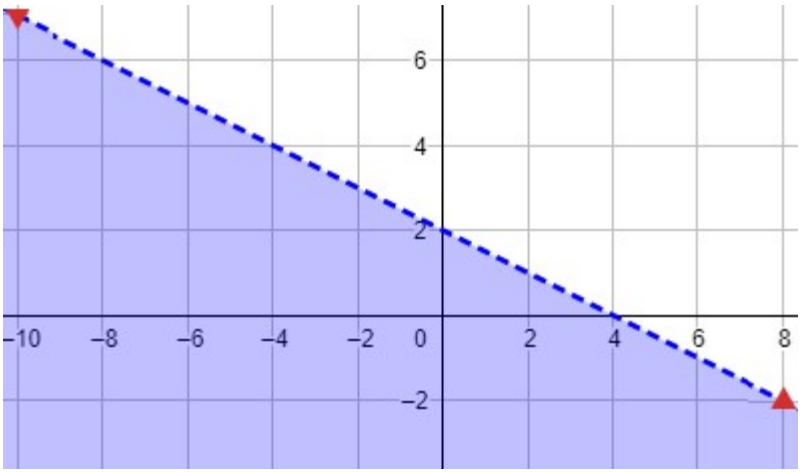
أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي ، مثل (0 , 0) ، ثم أتحقَّق إذا كان الناتج صحيحًا أم لا عند تعويضها في المتباينة :

المتباينة الخطية : $x + 2y < 4$

بالتعويض : $0+ 2(0) <? 40 < 4$ ✓

الخطوة 3 : تظليل منطقة الحلول المُمكِنة.

بما أنَّ النقطة (0 , 0) أفضت إلى ناتج صحيح للمتباينة ، فإنَّني أُظلِّل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة كما في الشكل الآتي :



•• للمتباينات استعمالات كثيرة في المواقف العلمية والحياتية ؛ إذ تساعدنا على اتخاذ القرار الأنسب المُتعلق بتحديد القِيَم المُمكنة ضمن شروط مُحددة.

مثال :

أراد مركز تعليمي شراء نوعين من الآلات الحاسبة ، إذا كان ثمن الحاسبة من النوع الأول يساوي 15 دينار ، وثمن الحاسبة من النوع الثاني يساوي 24 دينار ، وكان المبلغ المُخصص لشراء هذه الآلات لا يزيد عن 240 دينار ، فأجد عدد الآلات الحاسبة التي يُمكن شراؤها من كل نوع.

الحل :

الخطوة 1 : أكتب المتباينة التي تعبّر عن المسألة جبريًا .

x = أفرض عدد الآلات الحاسبة من النوع الأول

y = أفرض عدد الآلات الحاسبة من النوع الثاني

عدد القطع x ، إذن ثمن النوع الأول من الحاسبات = 15 × الثمن = سعر القطعة الواحدة

وثمن النوع الثاني من الحاسبات = 24 y

أكوّن المتباينة :

$15x + 24y \leq 240$

الخطوة 2 : أمثل المتباينة

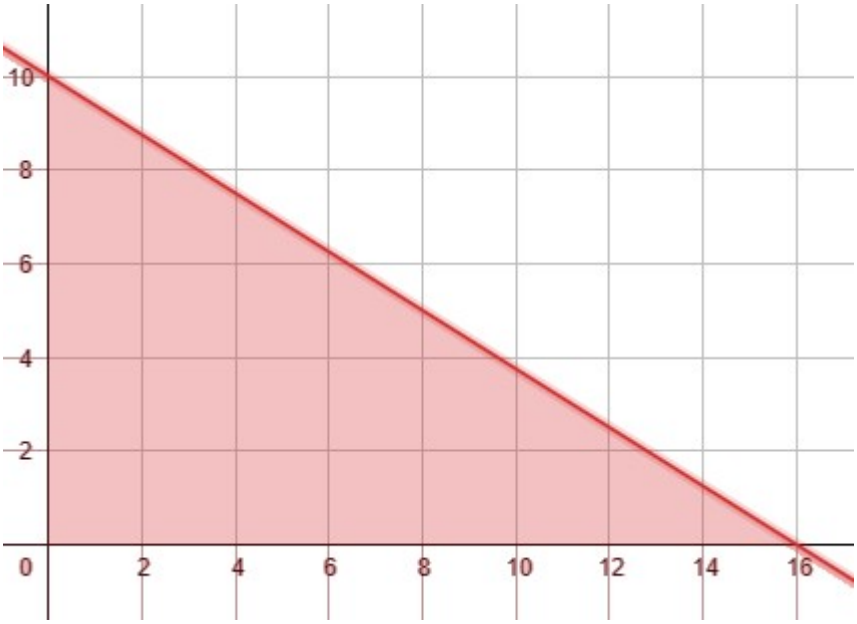
1) أرسم المستقيم الحدودي :

$15x + 24y = 240$

x	0	16

y	10	0

2) اختبار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي وتعويضها في المتباينة $15x + 24y \leq 240$ ، ثم تحديد منطقة الحل .



•• وهنا تنحصر منطقة الحل في الربع الأول من المستوى الإحداثي ؛ لأن أعداد الحاسبات لا يكون سالبًا ، ويُؤخذ من منطقة الحل الأعداد الصحيحة فقط لأن أعداد الحاسبات لا يكون إلا عددًا صحيحًا .

عدد الحاسبات x على سبيل المثال : النقطة (4 , 8) تُمثل حلًا للمتباينة ، ويمثل الإحداثي عدد الحاسبات من النوع الثاني . وعند التعويض في y من النوع الأول ، ويمثل الإحداثي المتباينة يكون الثمن أقل من 240 (أي ضمن المبلغ المُخصص لذلك).