98) أتحقق من فهمي صفحة):

يريد نجار بناء سقف خشبي لحظيرة حيوانات على شكل مستطيل محيطه 54m . جد أكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة.

الحل:

A =x yP=2x+y54=2x+yy=54-2x

A=x(54-2x)=54x-2x2A(x)=54x-2x2A'(x)=54-4x54-4x=054=4xx=13.5

اذن ، توجد قيمة حرجة واحدة هي: x=13.5

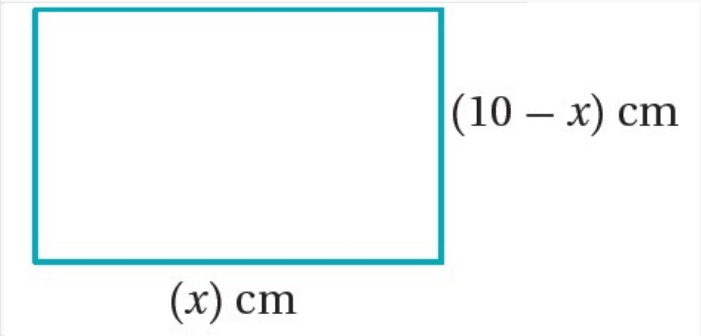
بما أن المشتقة الثانية للاقتران سالبة لقيم x جميعها ، فأنه توجد قيمة عظمى محلية عندما x=13.5 وهذا يعني ان مساحة سطح الحظيرة تكون اكبر ما يمكن اذا كان عرضه 13.5m

A(13.5)=54(13.5)-2(13.5)2 =729-364.5=364.5m2

---

99) أتحقق من فهمي صفحة):

يراد ثنيه لإحاطة المستطيل المجاور . جد أكبر سلك طوله 20cm مساحة يمكن احاطتها بالسلك.



الحل:

A(x)=(x)(10-x)A(x)=10x-x2A'(x)=10-2x10-2x=0x=5

يوجد قيمة حرجة للمساحة عند x=5

يوجد قيمة عظمى عند x=5

A"(x)=-2<0A(5)=(5)(10-5)=25cm2

نلاحظ أن أكبر مساحة عندما يكون الشكل مربع طول ضلعه 5 cm.

---

101) أتحقق من فهمي صفحة (:

أرادت إحدى الشركات أن تصنع خزانات معدنية على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كل منها 2m3 ، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزان الواحد التي تجعل كمية المعدن المستعملة لصنعه أقل ما يمكن.

الحل:

$V=x^2h \rightarrow h=2/x^2, x\neq 0$ $A=2x^2+4xh$ $A=2x^2+4x.2x^2 \rightarrow A(x)=2x^2+8x$ $A'(x)=4x-8x^2$ $A'(x)=0$ $4x=8x^2$ $4x^3=8x=23$

$x=23$ يوجد قيمة حرجة للمساحة الكلية عند

$A''(x)=4+8(2x)x4=4+16x3$

$A''(23)=4+16(23)3=4+8=12 > 0$

$x=23$ يوجد قيمة صغرى محلية عند

أقل كمية من المواد عندما يكون

$x=23$ الضلع وارتفاعها $h=2(23)2\approx 1.25$

---

103) أتحقق من فهمي صفحة (:

أراد أنْ يصنع منها 54 m^2 . لدى حدّاد صفيحةٌ معدنية مساحتها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات، على أن يكون الخزّان مفتوحًا من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

الحل:

$V=x^2h$ $A=4xh+2x^2$ $54=4xh+2x^2$ $h=54-2x^2/4x=(27-x^2)/2x$ $V(x)=x^2(27-x^2/2x)$ $V(x)=27x-x^3$ $V'(x)=27-3x^2$ $V'(x)=0$ $3x^2=27 \rightarrow x^2=27/6$ $x=\pm 9/2$

- بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالباً فأنه توجد قيمة حرجة عند x=92=32

V"(x)=-6xA"(32)=-3(3/√2)<0

- وهذا يعني ان حجم الخزان x=32 يوجد قيمة عظمى محلية عند ، h=27- ، وارتفاعها 32 يكون أكبر ما يمكن اذا كان طول القاعدة x22x=27-929=52m

---

أتحقق من فهمي صفحة (105):

وجدت خبيرة تسويق أنه لبيع ثلاجة من نوع جديد، فإن سعر الثلاجة الواحدة (بالدينار) يجب أن يكون s(x)=1750-2x حيث x عدد الثلاجات المبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الثلاجات تعطى بالاقتران C(x)=2250+18x ، فأجد عدد الثلاجات التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن.

الاجابة :

R(x)=(عدد الثلاجات المبيعة) (سعر الثلاجات الواحد)=x(1750-2x)

إذن، اقتران الإيراد هو: R(x)=(1750x-2x2)

- نجد اقتران الربح:

P(x)=R(x)-C(x) =(1750x-2x2)-(2250+18x) =1750x-2x2-2250-18xP(x)=-2x2+1732x-2250

- نجد الربح الحدي ، ثم نجد القيمة الحرجة ونحدد نوع النقطة الحرجة .

P'(x)=-4x+1732=0-4x=-1732x=433

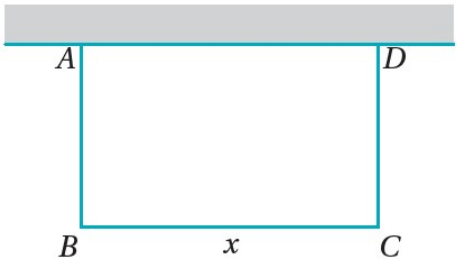
- اذن توجد قيمة حرجة واحدة هي: x=433

P"(x)=-4<0

الموجبة جميعها ، فأنه توجد قيمة x بما ان المشتقة الثانية سالبة لقيم
x=433 عظمى محلية عندما
أكبر ربح عند انتاج تقريباً 433 ثلاجة .

أتدرّب وأحلّ المسائل

يُمثّل الشكل المجاور
مخطّطًا لحديقة منزلية
يراد بناؤها مقابل جدار
حجري،
إذا كان محيط الحديقة دون
الجدار يساوي 300 m ؛
فأُجيب عمّا يأتي:



1) أجد المقدار الجبري الذي يُمثّل طول الضلع AB بدلالة x.
2) أجد اقتران مساحة الحديقة بدلالة x.
3) أجد أبعاد الحديقة بحيث تكون مِساحة الحديقة أكبر ما يُمكن.

الحل:

1) x+2y=300
2y=300-x → y=150-12x
2) A=xy → A(x)=x(150-12y)
A(x)=150x-12x2
3) A'(x)=150-x=0x=150
يوجد قيمة حرجة للمساحة عندما x=150m
A"(x)=-1<0
يوجد قيمة عظمى للمساحة x=150
y=150-12 (150)=75

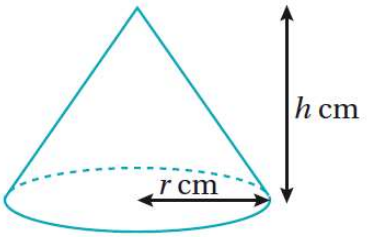
أكبر مساحة للحديقة عندما BC=150m ، DC =75m

---

4) أراد مزارع أن يحيط منطقة مستطيلة الشكل من حقله بسياج، وأن يقسمها إلى نصفين بسياج مساحتها 216 m2 موازٍ لأحد جانبيها. أجد أبعاد المنطقة التي تجعل طول السياج اللازم أقلّ ما يمكن، ثم أجد طوله.

الحل:

يُبيّن الشكل المجاور مخروطًا طول نصف قطر قاعدته r cm ، وارتفاعه h cm ، أجد حيث: r+h=60 ، اللتين يكون عندهما h و r قيمتَي حجم المخروط أكبر ما يُمكن.



الحل:

r+h=60 , V=13πr2hV=13πr2(60-r)V(r)=20πr2-13πr3V'(r)=40πr-πr2=0r=40cm

يوجد قيمة حرجة عند r=40

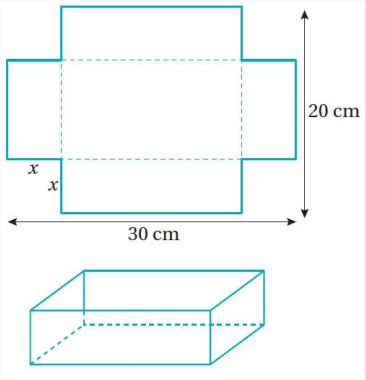
V''(r)=40π-2πrV''(40)=40π-2π(40)=-40π<0

يوجد قيمة عظمى عند r=40

h=60-40=20

إذن، h=20 , r=40

قطعة ورق مستطيلة الشكل طولها 30 cm ،
وعرضها 20 cm . قُصّ من جوانبها الأربعة مربّعات
متطابقة طول ضلع كل منها x cm كما في الشكل المجاور، ثمّ
ثُنيت الورقة لتشكيل علبة.



6) أجد الاقتران الذي يُمثّل حجم العلبة بدلالة x.

7) أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يُمكن.

الحل:

6) V(x)=(30-2x)(20-2x)(x) =4x3-100x2+600x

7) V'(x)=12x2-200x+600=0

x≈12.74 ,x=3.9

V''(x)=24x-200V''(3.9)=-102.4<0 عظمى V''(12.74)=1.5.76>0 صغرى

x=3.9 التي تجعل حجم العلبة اكبر ما يمكن x قيمة

---

x سعر القطعة الواحدة من مُنتَج بالدينار لإحدى الشركات، حيث s(x)=150-0.035x: يُمثِّل الاقتران عدد القطع

قطعة بالدينار، x تكلفة إنتاج C(x)=16000+10x+0.09x2: المُنتَجة. ويُمثِّل الاقتران

أجد كلًّا ممّا يأتي:

8) اقتران الإيراد.

9) الذي يتساوى عنده الإيراد الحدّي مع التكلفة x عدد القطع الحدّية.

10) اقتران الربح.

11) عدد القطع اللازم بيعها من المُنتَج لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم

أجد أكبر ربح مُمكِن.

12) سعر الوحدة الواحدة من المُنتَج الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

الحل:

8) R(x)=x(150-0.035x)

اقتران الإيراد: R(x)=150x-0.035x2

9) R'(x)=150-0.07x

C'(x)=10+0.18x→150-0.07x=10+0.18x-0.25x=-140 x=560

10) P(x)=R(x)-C(x)
=(150x-0.035x2)-
(16000+10x+0.09x2)P(x)=150x-0.035x2-
16000-10x-0.09x2

اقتران الربح: **P(x)=-0.125x2+140x-16000**

11) P'(x)=-0.25x+140=0

-0.25x=-140x=560

- عدد القطع الازم بيبعها هو 560 لتحقيق أكبر ربح ممكن .

P''(x)=-0.25<0 عظمى

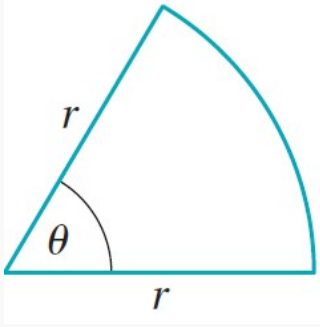
12) s(560)=150-0.035(560)=150-19.6=130.4

- اذن سعر الوحدة الواحدة هو 130.4

يُبيّن الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا محيطه 200 cm، أجد كلًّا ممّا يأتي:

13) الاقتران الذي يُمثّل مِساحة القطاع الدائري بدلالة r.

14) أكبر مِساحة ممكنة للقطاع الدائري.



الحل:

13) $A=\pi r2(\theta 360)$

المحيط $=2r+(\theta 360)2\pi r200=2r+(\theta 360)2\pi r\theta 360=200-2r2\pi r\theta 360=100\pi r-1\pi \ ,r\neq 0A(r)=\pi r2[100\pi r-1\pi]A(r)=100r-r2$

---

14) $A'(r)=100-2r=0 \rightarrow r=50$ cm

$A''(r)=-2<0$

يوجد قيمة عظمى للمساحة عند r=50 cm وهي:

$A(50)=100(50)-2500=2500cm2$

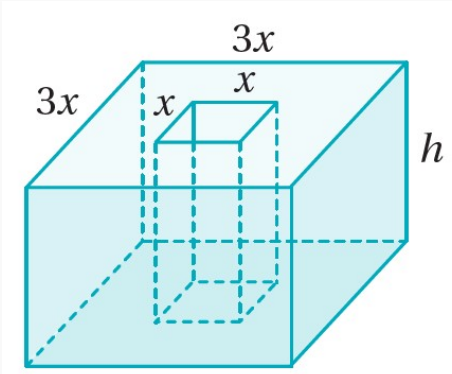
---

15) وجدت باحثة زراعية أنّ عدد حبّات البرتقال التي تنتجها كلّ شجرة في أحد بساتين غور الأردن، يعتمد على كثافة الأشجار المزروعة. إذا علمتُ أنّ عدد الأشجار في البستان $900-9n$ ، وأنّ كلّ شجرة تنتج n برتقالة؛ فأجد أكبر عدد من أشجار البرتقال التي يُمكن زراعتها في البستان للحصول على أكبر عائد.

الحل:

مهارات التفكير العُليا

تحدّ: تُريد إحدى شركات الشوكولاته إطالق منتج جديد في علب من الورق المقوى. إذا كانت العلبة على شكل متوازي مستطيلات وفي داخلها فراغ على شكل متوازي مستطيلات أيضًا كما في الشكل المجاور، إذا كان حجم العلبة 2000 cm3 ، فأجد كلًّا ممّا يأتي:



16) الاقتران الممثّل للمِساحة الكلّية الخارجية لسطح العلبة.

17) قيمة x التي تجعل المِساحة الكلّية الخارجية لسطح العلبة أقلّ ما يُمكن.

الحل:

16) A=4(3x.h)+2(9x2-x2)

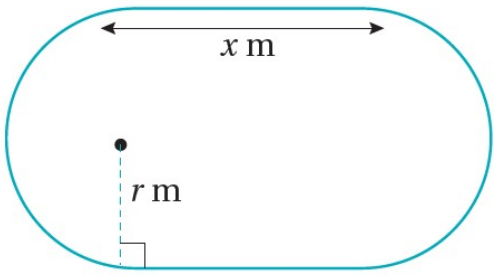
A=12x.h+16x2V=9x2h-x2h→2000=h(8x2)h=20008x2→A(x)=12x.20008x2+16x2 A(x)=3000x+16x2

---

17) A'(x)=-3000x2+32x=0

32x3=3000x≈4.54

تبرير: **x** مضمار سباق مكوّن من جزأين مستقيمين طول كل منهما **r** مترًا، وجزأين على شكل نصف دائرة طول نصف قطر كل منهما **m** مترًا كما في الشكل المجاور. وكان محيط المضمار **400** ؛ فأُجيب عمّا يأتي:



18) أجد الاقتران الذي يُمثّل مِساحة المنطقة التي يحيط بها المضمار بدلالة r.

19) أَثبتُ أنّه عندما يكون لمِساحة المنطقة التي يحيط بها المضمار نقطة حرجة؛ فإنّ المضمار لا يحتوي على أجزاء
مستقيمة، ثم أُبيّن نوع النقطة الحرجة. أُبرّر إجابتي.

الحل:

18) $S_{\text{المحيط}}=2x+2r\pi=400$

$x+r\pi=200 \rightarrow x=200-r\pi$

$A_{\text{المساحة}}=2r.x+\pi r2A(r)=2r(200-r\pi)+\pi r2A(r)=400r-2\pi r2+\pi r2A(r)=400-\pi r2$

---

19) $A'(r)=400-2\pi r=0$

$400-2\pi r=0$

$r=200\pi$

$A''(r)=-2\pi<0$

يوجد قيمة حرجة للمساحة عند $r=200\pi$

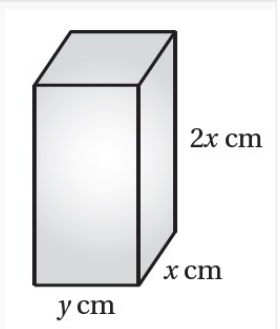
وعندها تكون قيمة $x=200-200\pi.\pi=0$

أي أنه عندما تكون القيمة الحرجة يكون المسار للمستقيم صفراً وبما أن $A''(r)<0$ فأن القيمة العظمى للمساحة عندما $r=200\pi$

يُبيّن الشكل المجاور قالَبًا يُستعمَل لصنع لَبِنات البناء، وتبلغ مساحة سطحه الكلية 600 cm2

1) أجد الاقتران الذي يُمثِّل حجم القالَب بدلالة x

2) أجد قيمة x التي تجعل حجم القالَب أكبر ما يُمكِن.



الحل:

1) حجم القالب: $V=lwh=yx(2x)$

مساحة سطح القالب: $A=2xy+(2x+2y)(2x)=6xy+4x2$

$600=6xy+4x2600-4x2=6xyy=600-4x26x$

حجم القالب بدلالة x: $V(x)=2x2(600-4x26x)V(x)=200x-43x3$

---

2) $V'(x)=200-4x2$

$200-4x2=0200=4x2x2=50x=\pm52$

$x=52$ cm لكن الطول لا يكون سالبا، لذا فان

$V''(x)=-8XV''(52)=-402<0$

، ويكون حجم القالب أكبر ما يمكن $x=52$ توجد قيمة عظمى عندما $x=52$ cm عندما

عدد **x** سعر البدلة الرجالية الذي حدَّدته شركة لإنتاج الملابس، حيث يُمثِّل الاقتران: $s(x)=150-0.5x$ البدلات المَبيعة.

بدلة، أجد كلّا مما يأتي: **x** تكلفة إنتاج ويُمثِّل الاقتران: $C(x)=4000+0.25x2$

3) اقتران الإيراد.

4) أجد عدد البدلات x التي يكون عندها الإيراد الحدِّي مثلَي التكلفة الحدِّية.

5) اقتران الربح.

6) عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

7) سعر البدلة الواحدة الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

الحل:

3) s(x)=150-0.5x

اقتران الإيراد: R(x)=x(150-0.5)=150x-0.5x2

---

4) الإيراد الحدي: R'(x)=150-x

التكلفة الحدية: C'(x)=0.5x

R'(x)=2C'(x)150-x=2(0.5)x150-x=x2x=150→x=75

---

5) اقتران الربح: P(x)=R(x)-C(x)

=150x-0.5x2-4000-0.25x2=150x-0.75x2-4000

---

6) P'(x)=150-1.5x

150-1.5x=0150=1.5xx=100

توجد قيمة حرجة عند x=100

P''(x)=-1.5

P''(100)=-1.5<0 عظمى محلية

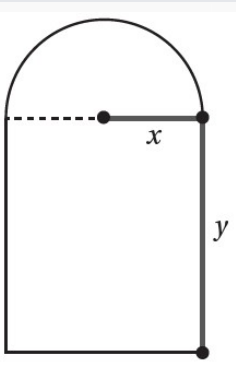
يكون أكبر ربح ممكن عندما تكون عدد البدلات المبيعة 100 ، - ون اكبر ربح ممكن هوxويك : P(100)=3500

---

7) ويكون حينها سعر البدلة الواحدة: s(100)=150-0.5(100)=100

---

8) نافذة على شكل مستطيل يعلوه كما في 8 m نصف دائرة، محيطها الشكل المجاور.



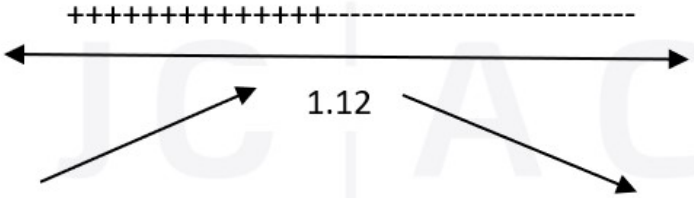
اللازمتين لمرور y و x أجد قيمتَي أكبر كمية من الضوء خلال النافذة.

الحل:

محيط النافذة: **8=2x+2y+πx**

y=4-x-π2x
y=4-x(1+π2)

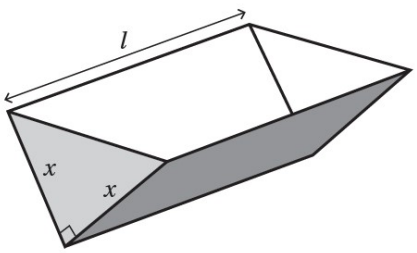
A=πx22+2xyA=π2x2+2x(4-x(1+π2))A=π2x2+8x-2x2(1+π2)A'=πx+8-4x(1+π2)=0πx+8-4x-4π2 x=0πx+8-4x-2πx=08-4x-πx=08=x(4+π)x=84+π=1.12



y=4-(1.12)(1+π/2)≈1.12m

---

9) خزّان ماء على شكل منشور ثلاثي سَعته 108 l m وطوله L ، والمقطع الجانبي للخزان على شكل مثلّث قائم الزاوية ومتساوي الساقين كما في الشكل المجاور.
يُراد دهن الخزان بمادّة عازلة من الداخل تحميه من التآكل.
أجد قيمة x التي تجعل مساحة السطح الداخلية أصغر ما يمكن.



الحل:

x2+x2=m22x2=m2 → m=x2V=12x2L1 08=12x2Ll=216x2	A=2(12x2)+2xl+x2lA=x2+2x(216x2)+2x(216x2)A= x2+432x+2162xA'=2x-432x2- 2162x2=02x=432+2162x22x3=432+2162x3=216+ 1082x≈7.171 m

A"=2+864x3+4322x3>0

x=7.17 اذن ، مساحة السطح الداخلية اصغر ما يمكن عندما